

**Uniwersytet Warszawski**  
**Wydział Fizyki**  
**Instytut Geofizyki**  
**Zakład Fizyki Atmosfery**

**Wpływ ruchów wirowych na ewolucję widma  
kropeł w chmurach**

**Krzysztof Markowicz**

**Praca magisterska**  
napisana pod kierunkiem  
dr Konrada Bajera

Warszawa, styczeń 1999

# 1. Wstęp

W fizyce chmur szerokie zainteresowanie wzbudza obecnie teoria powstawania ciepłego deszczu. Problem genezy opadu z chmur, w których nie występuje faza lodowa nie jest jak na razie zadowalająco wyjaśniony. Teoria przedstawiona przez F. Bergerona przeszło 50 lat temu wyjaśnia proces powstawania opadu w chmurach mieszanych, jednak nie funkcjonuje ona dla chmur zawierających jedynie kropelki wody. Z taką sytuacją mamy do czynienia np. w chmurach konwekcyjnych, w których w strefie tropikalnej opad może powstać w ciągu kilkunastu minut. Na aktualnym poziomie naszej wiedzy nie jesteśmy w stanie wyjaśnić poszerzania się wąskiego początkowo widma kropeł chmurowych tak aby powstały w chmurze duże krople mogące już zapoczątkować proces koagulacji. Istnienie dużych kropeł we wstępnej fazie istnienia chmury można tłumaczyć istnieniem tzw. gigantycznych jąder kondensacji. Jednak istnienie takich jąder obserwuje się jedynie w aerozolu pochodzenia morskiego. W związku z tym poszukuje się innych mechanizmów odpowiedzialnych za poszerzenie widma kropeł do momentu aż proces sedymentacji kropeł doprowadzi do intensywnej koagulacji.

Obecnie istnieje wiele hipotez próbujących opisać poszerzenie widma kropeł chmurowych. Zaliczyć do nich można procesy mieszania i wciągania powietrza z otoczenia chmury. Ostatnio jednak największą uwagę badaczy przyciąga turbulencja i jej wpływ na widmo kropeł.

W niniejszej pracy przedstawiony jest opis ruchu kropeł w obszarze wirów występujących w skali Komogorowa. Istnienie takich wirów potwierdzono w symulacjach numerycznych oraz w eksperymentach laboratoryjnych. Pomimo tego ich struktura jest jak na razie słabo poznana. Opisujemy ruch kropeł w obecności pojedynczego wiru biorąc także pod uwagę efekt rozciągania wiru. Badam dwa modele wirów: wir Rankine'a oraz wir Burgersa w różnych ustawieniach w stosunku do siły grawitacji.

Pokazano, że obecność wirów w chmurach modyfikuje początkowy rozkład kropeł. W obszarze wirów powstają strefy o dużych kontrastach koncentracji kropeł. Rozkład przestrzenny kropeł w chmurach w obecności ruchów wirowych nie jest przypadkowy. Krople skupiają się w obszarach o niskiej wirowości powodując lokalnie wzrost gęstości. Rozciąganie wiru oraz sedymentacja kropeł powodują sortowanie kropli o różnej wielkości. Tworzą one charakterystyczne skupiska w obrębie których występują krople o zbliżonych rozmiarach. Obszary te mają kształt wyciągniętych rurek równoległych do osi wiru. Czas formowania się takich struktur jest bardzo krótki, dla kropeł o promieniu 10  $\mu\text{m}$  wynosi kilka milisekund.

Niniejsza praca ma następującą strukturę. W rozdziale 2 przedstawiony jest w zarysie problem powstawania „ciepłego deszczu” w świetle ostatnich prac naukowych. Rozdział 3 poświęcony jest skalom ruchów turbulentnych jakie występują w chmurach. W rozdziale 4 przedstawione są wyjściowe równania ruchu kropeł w chmurze oraz ich przybliżenia stosowane w dalszej części pracy. Kolejny rozdział zawiera analizę ruchu pojedynczej kropli w pobliżu wiru Rankine'a. Przedstawione są w nim ruchy kropli w dwóch obszarach: wewnętrznym, gdzie wirowość jest stała różna od zera oraz zewnętrznym dla którego jest ona równa zero (wir punktowy). W paragrafie tym rozpatrywane są ponadto ruchy kropeł w pobliżu wiru punktowego, który jest rozciągany. Rozważane są dwa przypadki: pierwszy, gdy wir rozciągany jest w kierunku pionowym oraz drugi, gdy rozciąganie wiru odbywa się w kierunku poziomym. W tym ostatnim przypadku istotny staje się wpływ grawitacji na ruch kropeł w płaszczyźnie prostopadłej do osi wiru. W rozdziale 6 rozważamy sytuację kiedy mamy do czynienia z wieloma kroplami. Badamy koncentracje kropeł w pobliżu wiru punktowego oraz w obszarze wiru o stałej wirowości. Główną uwagę zwracamy na ewolucję

gęstości kropeł w płaszczyźnie prostopadłej do osi wiru oraz na rozkład przestrzenny kropeł w zależności od ich rozmiarów. Następny rozdział (7) poświęcony jest opisowi ruchu kropli w obszarze wiru Burgersa. Rozważane są trzy przypadki takiego wiru: wir pionowy, wir pionowy poddawany rozciąganiu oraz wir poziomy poddawany rozciąganiu. Rozdział 8 zawiera opis gęstości powierzchniowej kropeł w wyżej wymienionych przypadkach. Obliczenia numeryczne przestrzennego rozkładu kropeł wykonane zostały dla kropeł jednakowych oraz dla kropeł zróżnicowanych o zadanym widmie. W kolejnym rozdziale zamieszczone jest podsumowanie wyników uzyskanych w ramach tej pracy.

**Pragnę wyrazić podziękowanie dr Konradowi Bajerowi oraz za wnikliwe przeczytanie pracy i konstruktywne uwagi pomocnicze w jej napisaniu, jak również dr Szymonowi P. Malinowskiemu za uwagi merytoryczne i sugestie, które przyczyniły się do poprawy układu pracy jak i lepszego ujęcia treści fizycznej opisywanych zjawisk.**

## 2. Problem powstawania „ciepłego deszczu”

Problem poszerzenia widma kropli w chmurach, które prowadzi do powstania opadu jest jednym z głównych zagadnień w fizyce chmur nierozwiązanych do chwili obecnej. Procesy odpowiedzialne za pojawianie się kropeł chmurowych są jak na razie słabo poznane. Nie wiadomo dokładnie jakie procesy fizyczne są odpowiedzialne za powstawanie ciepłego deszczu.

Proces kondensacji i dyfuzji pary wodnej prowadzi w obecności typowych jąder kondensacji do powstania wąskiego widma kropeł. Wzrost kropeł, początkowo szybki, z czasem jednak staje się mało wydajny. Prowadzi to do stagnacji widma kropeł, którego parametry fizyczne zależą od przesylenia powietrza parą wodną oraz rozmiaru zaktywizowanych jąder kondensacji. Tak powstałe krople w chmurach są bardzo małe, ich typowe rozmiary nie przekraczają kilku mikrometrów. Dalszy ich wzrost wskutek koalescencji jest niemożliwy ponieważ współczynnik wychwytu kropeł jest bardzo mały. Intensywny wzrost występuje dopiero dla kropeł, których promień jest większy od  $20 \mu\text{m}$ . Obecność takich kropli w widmie można stwierdzić sporadycznie jedynie w aerozolu pochodzenia morskiego, który zawiera tzw. jądra gigantyczne. Zwykle jednak w widmie chmurowe powstałe w wyniku kondensacji nie zawiera kropeł mogących zapoczątkować proces koalescencji. Ostatnio uwagę uczonych absorbuje wpływ turbulencji na poszerzenie widma kropeł.

Stosunkowo dużo wiemy o ruchach kropeł w nieruchomym powietrzu (Pruppacher i Klett 1978) zaś dużo mniej w obecności turbulencji. Jednymi z prekursorów tego zagadnienia byli Ivanovskij i Mazin 1960, Smirnoff (1969) oraz Maxey i Corsin (1986). Badali oni osiadanie małych, sferycznych cząstek pod wpływem grawitacji w periodyczno-komórkowym polu prędkości. Pokazali oni, że krople o małej bezwładności w słabym polu prędkości mają tendencje do gromadzenia się wzdłuż separatory. Studia nad ruchem dużych cząstek wewnątrz turbulentnego pola prędkości były prowadzone przez Squires'a i Eatona (1991), Funga (1993) oraz Wanga i Maxeya (1993). Prace te były poświęcone wpływom turbulencji na osiadanie cząstek aerozolu.

Problem wpływu turbulencji na współczynnik wychwytu był analizowany przez Almeida (1976). Pokazał on, że współczynnik wychwytu wzrasta szybko ze wzrostem intensywności turbulencji. Efekt ten jest szczególnie widoczny dla kropeł o promieniu  $r < 30 \mu\text{m}$ , które na swojej drodze zbierają mniejsze krople. Duże krople nie podlegają wyraźnie temu efektowi ze względu na ich dużą bezwładność. Główną wadą teorii Almeidy było założenie inercyjnego reżimu turbulencji i wynikające stąd funkcje korelacji prędkości dla małych kropeł, gdy w rzeczywistości należy brać pod uwagę fluktuacje prędkości w reżimie lepkim. Wynika to z faktu, że w przypadku małych odległości pomiędzy kroplami (kilka promieni kropli) istotne dla procesu zderzania kropeł stają się korelacje prędkości na niewielkich odległościach.

Przez wiele lat brak było praktycznych eksperymentów potwierdzających lub obalających modele teoretyczne koalescencji. Problemem było wytworzenie pola prędkości o dobrze określonym spektrum energii turbulencji, które mogłoby sprzyjać wzrostowi kropeł przez ich zderzanie się ze sobą. Jedną z nielicznych były prace Woodsa (1972) i Balcera (1981). Pierwszy z nich badał spadek kropli przez obszar pionowego gradientu prędkości powietrza ograniczony do warstwy kilku milimetrów. Taki przepływ trudno uznać za zadowalający model turbulencji w troposferze.

Balcer umieszczał w pionowym tunelu małe krople, które zderzały się z większą kroplą zbierającą. Autor pokazał, że współczynnik zderzeniowy kropeł jest bardzo czuły na względne prędkości pomiędzy kroplami.

W ostatnim czasie pojawiły się prace, w których autorzy przedstawili wyniki modeli, prowadzących do poszerzenia się widma kropli w chmurach w obecności turbulencji. Jedną z nich jest praca Pinsky'ego i Khain'a (1997 I, 1997 II), która dotyczy wzrostu kropli chmurowych poprzez koalescencje. Autorzy przedstawiają mechanizmy powstawania względnych prędkości kropeł w jednorodnej i izotropowej turbulencji. Zaliczają do nich bezwładność kropeł, grawitację oraz gradient prędkości powietrza z wysokością. Opis ruchu turbulentnego uwzględniał zarówno reżimy lepkościowy jak i bezwładny. Względne prędkości kropeł jak pokazali autorzy bardzo zależą od rozmiarów kropeł oraz intensywności turbulencji. Nawet dla słabej turbulencji ( $\varepsilon = 10 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-3}$ ) typowej dla chmur stratus względne prędkości kropeł o promieniu  $r < 30 \text{ }\mu\text{m}$  są rzędu 30% wartości uzyskanej w wyniku grawitacyjnego opadania. Przy silniejszej turbulencji ( $\varepsilon = 100 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-3}$ ) charakterystycznej dla małych chmur typu cumulus różnice prędkości kropeł są dwukrotnie większe niż wywołane sedymentacją. W chmurach konwekcyjnych bardziej rozwiniętych, gdzie turbulencja jest większa, względne prędkości kropeł są 5-7 razy większe. Wyniki takie uzyskano w losowym polu prędkości i na ich podstawie można stwierdzić, że turbulencja ma istotny wpływ na formowanie się względnych prędkości kropeł. Wobec tego proces koalescencji jest znacznie wydajniejszy niż w przypadku, gdy zderzenia kropeł są jedynie wynikiem różnych prędkości ich opadania. Klasyczne teorie koalescencji opisywane są przez wzór na tzw. jądro koalescencji, które określa liczbę połączeń kropli dużej z małymi w jednostce czasu:

$$k(m_i, m_j) = \pi(r_i + r_j)^2 E(m_i, m_j) |\Delta V_t|, \quad (2.1)$$

gdzie

$r_i, r_j$  promień kropli i oraz j

$m_i, m_j$  masa kropli i oraz j

$E$  – współczynnik wychwytu

$\Delta V_t$  - względna prędkość graniczna opadania kropli (terminal velocity)

Autorzy zaproponowali nową formułę uwzględniającą różnice prędkości kropeł spowodowane turbulencją.

$$k(m_i, m_j) = \pi(r_i + r_j)^2 E(m_i, m_j) \sqrt{\Delta V_t^2 + \langle R_{ij}^2 \rangle \Delta V_t^2}, \quad (2.2)$$

gdzie:

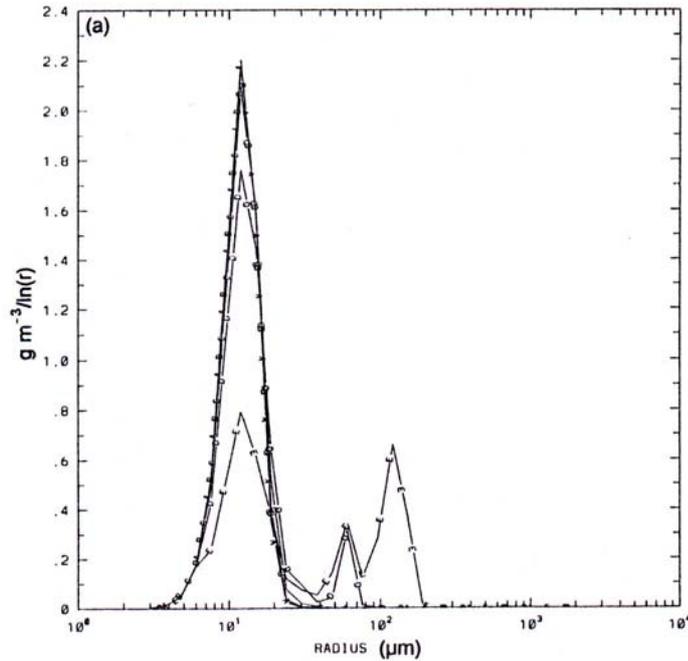
$R_{ij} = \frac{\Delta V'}{\Delta V_t}$  zaś  $\Delta V'$  jest względną wartością fluktuacji prędkości kropli i oraz j

Powyższe równanie było punktem wyjściowym do obliczeń numerycznych ewolucji widma kropeł chmurowych. Autorzy nie uwzględnili wpływu turbulencji na współczynnik wychwytu, który w obu równaniach miał taką samą postać. Wydaje się jednak, że jest to ważny problem, ponieważ teorie klasyczne dają zerową wartość współczynnika wychwytu dla kropli z których przynajmniej jedna nie ma promienia większego od  $18 \text{ }\mu\text{m}$ . Problem ten był studiowany przez F.C Alemeide (1979).

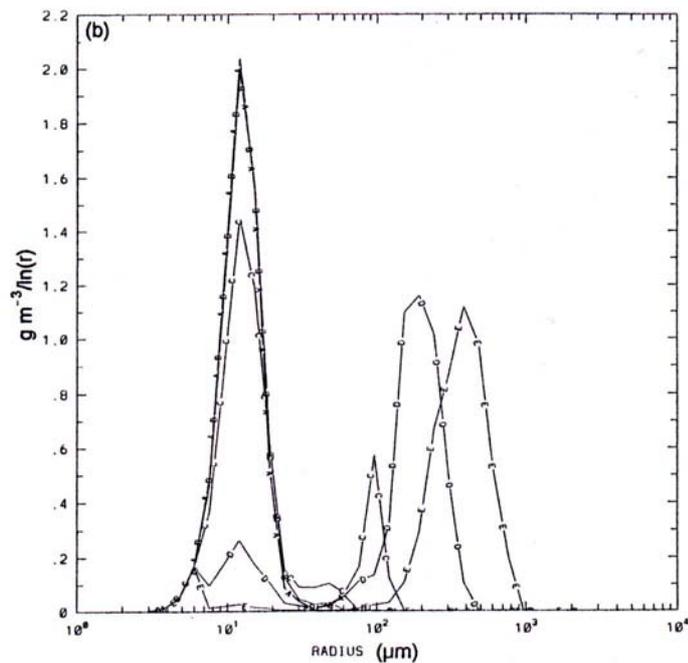
Wyniki obliczeń numerycznych ewolucji widma kropeł (Pinsky, Khain (1997)) przedstawia rysunku 2.1 i 2.2. Początkowo widmo kropeł było centrowane na  $r=10 \text{ }\mu\text{m}$ . Czas

formowania się krople opadowych ( $r = 100\mu\text{m}$ ) wynosił 10 min przy  $\varepsilon = 200 \text{ cm}^2\text{s}^{-3}$  oraz około 20 min przy  $\varepsilon = 50 \text{ cm}^2\text{s}^{-3}$ . Przy braku turbulencji krople opadowe nie pojawiły się a widmo nie ulegało praktycznie zmianie.

Autorzy do obliczeń przyjęli dość szerokie widmo początkowe kroplel, w którym niewątpliwie znajdują się krople o promieniu większym od  $20 \mu\text{m}$ . W takim przypadku również klasyczne teorie koalescencji prowadzą do wzrostu kroplel. Dla takiego



**Rysunek 2.1** Widmo kroplel po 10 minutach. Krzywe A, B, C, D, E odpowiadają  $\varepsilon=0 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-3}$ ,  $\varepsilon=50 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-3}$ ,  $\varepsilon=100 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-3}$ ,  $\varepsilon=200 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-3}$ ,  $\varepsilon=500 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-3}$  (Pinsky, Khain (1997)).



**Rysunek 2.2** Widmo kropeł po 20 minutach (Pinsky , Khain (1997))

widma turbulencja przyspiesza proces łączenia się kropeł w większe, pozostaje jednak bez odpowiedzi pytanie czy turbulencja może spowodować poszerzenie się wąskiego widma kropeł, takiego jak powstaje we wczesnym stadium rozwoju chmury? Bez oszacowania wpływu turbulencji na współczynnik wychwytu odpowiedź na to pytanie jest niemożliwa.

Zasadniczo inne podejście do problemu zaproponował Raymond Shaw (1997) w swojej pracy. Autor przedstawił wpływ turbulencji na poszerzenie się widma kropeł podczas ich wzrostu wskutek kondensacji. Tym razem turbulencja modelowana jest w postaci wirów powietrza zlokalizowanych w sposób losowy. Wykorzystano model wiru Rankine'a tzn. wiru, który blisko swojej osi obraca się ze stałą prędkością kątową, zaś daleko prędkość jest taka jak dla wiru punktowego. Shaw pokazał, że krople zostają szybko wyrzucone z obszaru wiru i dalej już wolno oddalają się od niego. Wnioskuje z tego, że w obszarach chmury o dużej wirowości koncentracja kropeł jest dużo mniejsza niż w obszarach o niskiej wirowości. Regiony o dużej wirowości pozbawiane są kropeł wobec tego jeśli porcja takiego powietrza wznosi się do góry występują w niej przesycenia. Sytuacja taka występuje dopóki nie zaktywizują się nowe jądra kondensacji. Na podstawie tego autor stwierdza, że krople poruszając się przez obszar chmury znajdują się w obszarach o różnych przesyceniach powietrza. W obszarach o różnej wirowości wzrost kropeł ze względu na wartość przesycenia będzie intensywny.

Model stosowany przez autora zawiera trzy podstawowe części: ewolucja przesycenia w chmurze, aktywacja kropeł oraz ich wzrost przez kondensację. Zmiana przesycenia s w czasie opisywana jest równaniem:

$$\frac{ds}{dt} = \alpha w - \beta s \sum_i r_i, \quad (2.3)$$

gdzie: w- prędkość pionowa powietrza, zaś  $\alpha$ ,  $\beta$  stałe

Wzór ten określa zmiany przesycenia, wywołane ruchami pionowymi powietrza oraz kondensacją pary wodnej na kropelkach.

Wzrost kropli opisywany jest w tym modelu wzorem:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{Gs}{r}, \quad (2.4)$$

gdzie G jest stałą.

Początkowy promień kropli w mikrometrach opisuje formuła Twomeya:

$$r_0 = \frac{0.0145}{s^{2/3}}, \quad (2.5)$$

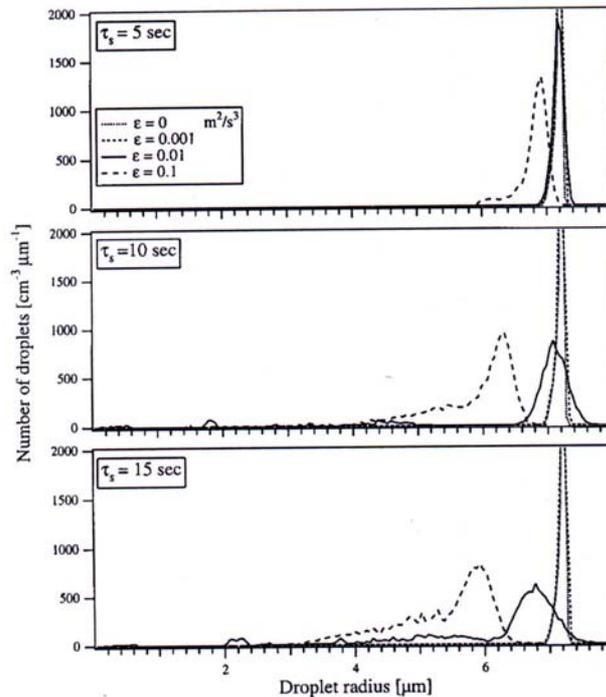
zaś liczbą zaktywizowanych kropeł zaś wyraża się wzorem:

$$N_{CCN} = Cs^k, \quad (2.6)$$

gdzie C i k są stałymi.

Rozwiązanie równania wzrostu kropli (2.4) wskazuje na powolny wzrost kropli przy założeniu stałej wartości przesycenia. Jednak w obszarze turbulentnym wartość przesycenia

nie jest stała, co prowadzi do zależności intensywności wzrostu kropli od jej położenia w chmurze. Autor przyjął do obliczeń typowe wartości stałych wchodzących w skład powyższych równań i prędkość pionową równą 2 m/s. Rozmiar wirów powietrza wynosił  $10\eta$ , gdzie  $\eta$  jest skalą przestrzenną Komogorowa (wzór 3.1). W modelu zmieniana była również intensywność turbulencji poprzez zmianę tempa dysypacji energii  $\varepsilon$ . Wyniki obliczeń po czasie  $t=150s$  przedstawiają rysunek 2.3. Górny wykres przedstawia widmo



kropel w przypadku gdy czas życia wirów wynosił  $\tau_s = 5 s$ . Pozostałe wykresy dla czasów równych odpowiednio 10 i 15 s. Widmo kropli w przypadku bardzo słabo rozwiniętej turbulencji jest wąskie. Wzrost turbulencji powoduje znaczne poszerzenie widma z

**Rysunek 2.3.** Widmo kropli po czasie  $t=150 s$  w zależności od tempa dysypacji energii  $\varepsilon$  oraz czasu istnienia wirów  $\tau_s$  (Shaw 1997)

jednoczesnym przesunięciem się jego maksimum w stronę mniejszych kropelek. Obecność kropli o bardzo zróżnicowanych urozmaiconych rozmiarach wynika z fluktuacji przesylenia w chmurze i związane z nimi zróżnicowaną szybkością wzrostu kropli. Wzrost kropli jak wynika z przedstawionych wykresów zależy od czasu życia struktury koherentnej wiru.

Autor nie przedstawia dalszej ewolucji pola kropli chmurowych, a więc ich wzrostu przez koalescencje, jednak wskazuje, że w tym przypadku, w porównaniu z sytuacją klasyczną, mechanizm koalescencji doprowadzić może do szybszego ich wzrostu. Z pracy Shaw'a wynikają trzy istotne wnioski. Po pierwsze, że rozkład kropelek w chmurze nie jest losowy, występują znaczne fluktuacje przesyceń powietrza parą wodną. Po drugie, po stosunkowo krótkim czasie (2.5 min) widmo kropli staje się znacznie szersze niż pod nieobecność wirów. Po trzecie czas życia wirów dla których ten efekt odgrywa rolę jest niewielki i wynosi kilka lub kilkanaście sekund.

Rozkład przestrzenny kropli we mgłę był studiowany przez A. Kozikowską i K. Hamana. (1984). Praca ta powstała na podstawie pomiarów rozkładu kropelek przy użyciu hologramu. Wyniki przeprowadzonych eksperymentów były porównywane z losowym rozkładem Poissona. W przypadku wąskiego widma kropli hipoteza rozkładu losowego została zadowalająco potwierdzona. Jednak dla szerszych widm (o szerokości kilkanaście

mikrometrów) wyniki są bardzo wątpliwe. Autorzy stwierdzają, że jest to efekt pojawienia się klastrow kropel. Wynika stąd, że dalsze badania koalescencji powinny być prowadzone przy założeniu nielosowego rozkładu kropel a nie jak dotąd kropel rozłożonych przypadkowo.

### 3. Skale ruchów turbulentnych.

Ruch turbulentny płynów charakteryzuje się w każdym punkcie nieregularnymi i nieuporządkowanymi zmianami prędkości w czasie. W chwili obecnej nie istnieje jeszcze pełna ilościowa teoria turbulencji. Znane jest jednak wiele ważnych wyników jakościowych uzyskanych dzięki analizie wymiarowej. W dalszej części interesować nas będzie ruch w małej skali, w której decydujący wpływ ma lepkość powietrza. Przedział skal turbulencji w tym przypadku nosi nazwę przedziału dyssypacyjnego. Zachodzi w nim największa dyssypacja energii kinetycznej. Źródłem energii w tej skali jest strumień energii kinetycznej skierowany z tzw. przedziału energii poprzez przedział inercyjny do przedziału dyssypacji. Ustala się w ten sposób stan stacjonarny a turbulencja określana jest jako statystycznie stacjonarna. Eksperymenty laboratoryjne i numeryczne wskazują, że typowymi strukturami, które dyssypują znaczną część energii są długie i cienkie włókna wirowe.

W obszarze dyssypacji możemy na podstawie analizy wymiarowej określać skale ruchu tzw. skale Komogorowa:

$$\mu = \left( \frac{v^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \quad \text{- skala długości} \quad (3.1)$$

$$\tau_\mu = \left( \frac{v}{\varepsilon} \right)^{1/2} \quad \text{- skala czasu} \quad (3.2)$$

$$V_\mu = (v\varepsilon)^{1/4} \quad \text{- skala prędkości} \quad (3.3)$$

gdzie:  $v$  jest lepkością kinetyczną powietrza, zaś  $\varepsilon$  oznacza tempo dyssypacji energii. Współczynnik dyssypacji energii  $\varepsilon$  zmienia się w szerokim zakresie w zależności od rodzaju oraz stopnia rozwoju chmury. Dla typowych chmur stratocumulus wynosi około  $\varepsilon=10 \text{ cm}^2 / \text{s}^3$  zaś dla małych chmur typu cumulus wynosi  $\varepsilon=100 \text{ cm}^2 / \text{s}^3$ . W silnie rozbudowanych chmurach konwekcyjnych może przekroczyć wartość  $\varepsilon=1000 \text{ cm}^2 / \text{s}^3$  (Mazin i inni 1984, 1989).

Tabela 3.1 Typowe wartości skal Komogorowa obserwowane w chmurach

$\varepsilon$ [ $\text{cm}^2/\text{s}^3$ ]	$\mu$ [mm]	$\tau_\mu$ [s]	$V_\mu$ [cm/s]
0.1	3.9	1.11	0.35
1	2.2	0.36	0.61
10	1.2	0.11	1.09
100	0.7	0.04	1.75

1000	0.4	0.01	4.0
------	-----	------	-----

Z powyższej tabeli wynika, że typowa skala przestrzenna wirów wynosi 1mm, skala czasowa zmienia się w zakresie od 0.01-1s. Przeciętna prędkość wynosi 1cm/s. Wzrost intensywności turbulencji prowadzi do zmniejszania się charakterystycznych skal czasowych i przestrzennych oraz wzrostu prędkości. Sytuacja taka odpowiada wzrostowi liczby Reynoldsa i poszerzeniu przedziału inercyjnego energii. W tym przypadku lepkość prowadzi do destrukcji tylko bardzo małych wirów. Interesuje nas tutaj ruch kropeł w chmurach, gdzie tempo dyssypacji energii nie jest dobrze określone. Z powodu występowania intermitencji wielkość ta może znacznie zmieniać się w zależności od położenia w chmurze. W związku z tym do typowe skale wirów w chmurach przedstawionych w tabeli 3.1 należy traktować z dużą ostrożnością. Nie ma jak na razie pomiarów chmurowych pola prędkości powietrza ze względu na trudności z pomiarami przepływów w skalach milimetrowych w tych warunkach. Zatem struktura pola prędkości w chmurach jest jeszcze wielką niewiadomą i trudno być pewnym z jakimi ruchami mamy tam do czynienia.

## 4. Równania ruchu kropli chmurowych.

Rozważmy ruch kropli poruszającej się w powietrzu o prędkości  $\vec{v}_a$ . Zakładając będziemy kropla w czasie swojego ruchu nie oddziałuje z innymi kroplami. Równanie ruchu kropli ma następującą postać:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} + \vec{F}_0 + \vec{F}_b \quad (4.1)$$

gdzie:

$$\vec{F}_b = -mg \frac{\rho_a}{\rho_w} \quad \text{jest siłą wyporu kropli} \quad (4.2)$$

$\vec{F}_0$  jest siłą oporu aerodynamicznego kropli, zaś

$$m = V(\rho_w + \frac{\rho_a}{2}) \text{ jest masą efektywną} \quad (4.3)$$

gdzie  $V$  oznacza objętość kropli.

W dalszym ciągu będziemy pomijali siłę wyporu kropli oraz przyjmiemy, że masa efektywna kropli jest równa zwykłej masie ze względu na relację:

$$\frac{\rho_a}{\rho_w} \ll 1 \quad (4.4)$$

Siła oporu aerodynamicznego Stokesa w ogólności ma postać:

$$\vec{F}_0 = -\frac{1}{2} \rho_a \pi R^2 C_d |\vec{v} - \vec{v}_a| (\vec{v} - \vec{v}_a) \quad (4.5)$$

zaś współczynnik oporu

$$C_d = \frac{24}{Re} [1 + f(Re)] \quad (4.6)$$

gdzie:

$$Re = \frac{2R\rho_a}{\mu} |\vec{v} - \vec{v}_a| \quad (4.7)$$

zaś  $f(Re)$  jest funkcją liczby Reynoldsa wyznaczoną empirycznie przez Wang'a i Pruppacher'a 1997. Dla małych liczb Reynoldsa  $f(Re) \rightarrow 0$  i poprawkę tę można pominąć. W tym przypadku siła oporu Stokesa znacznie się upraszcza przyjmując postać:

$$\vec{F}_0 = -6\pi R\mu (\vec{v} - \vec{v}_a) \quad (4.8)$$

Ostatecznie równanie ruchu ma postać:

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = -6\pi R\mu(\bar{v} - \bar{v}_a) - mg\bar{e}_z \quad (4.9)$$

## 5. Ruch kropli w pobliżu wiru Rankine'a.

Przechodzimy teraz do analizy ruchu pojedynczej kropli w obszarze odosobnionego wiru w powietrzu. Zawirowanie to będzie miało postać wiru Rankine'a, w którym mamy dwa różne reżimy ruchu. W pierwszym, znajdującym się wewnątrz wiru prędkość kątowna powietrza jest stała a więc powietrze wiruje tak jak bryła sztywna, w drugim zaś, prędkość powietrza jest taka jak od wiru punktowego. Profil prędkości takiego wiru mam więc postać:

$$\vec{v} = \begin{cases} c_1 r \vec{e}_\varphi & r < r_0 \\ \frac{c_2}{r} \vec{e}_\varphi & r \geq r_0 \end{cases} \quad (5.1)$$

gdzie  $c_1$ ,  $c_2$  są stałymi takimi aby była zapewniona ciągłość prędkości na granicy wiru, czyli w  $r_0$ . Taki model wiru jest powszechnie używany, każdy wir można w przybliżeniu traktować jako twór składający się z dwóch części. Wewnątrz wiru można założyć, że wirowość jest stała, zaś na zewnątrz jego w dostatecznie dużej odległości można traktować go jak wir punktowy.

### 5.1 Ruch kropli w pobliżu pionowego wiru punktowego

Rozpatrzmy ruch kropli wokół wiru punktowego w przypadku którego wirowość jest równa zero poza jego punktem centralnym i wyraża się ona wzorem:

$$\zeta = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{\delta(r)}{r} \quad (5.1.1)$$

gdzie:  $\Gamma$  jest cyrkulacją wiru,  $r$  zaś odległością od środka wiru  
Profil prędkości takiego wiru ma postać:

$$\vec{v}_a = \frac{\Gamma}{2\pi r} \vec{e}_\varphi \quad (5.1.2)$$

Prędkość podobnie jak wirowość ma osobliwość w punkcie  $r=0$ . Przechodzimy do cylindrycznego układu współrzędnych tak, że oś wiru pokrywa się z osią z tego układu. Po podstawieniu do równania ruchu (4.9) otrzymujemy:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -mg \vec{e}_z - 6\pi R \mu \left( \frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{\Gamma}{2\pi r} \vec{e}_\varphi \right) \quad (5.1.3)$$

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -g \vec{e}_z - a \left( \frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{\Gamma}{2\pi r} \vec{e}_\varphi \right) \quad (5.1.4)$$

$$\text{gdzie: } a = \frac{9\mu}{2R^2 \rho_w} \quad (5.1.5)$$

Po rozpisaniu wektora przyspieszenia i prędkości na składowe dostajemy:

$$[\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2]\vec{e}_r + [2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}]\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z = -g\vec{e}_z - a\left(\dot{r}\vec{e}_r - r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi - \frac{\Gamma}{2\pi r}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z\right) \quad (5.1.6)$$

Równanie to prowadzi do układu trzech równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu.

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -a\dot{r} \\ 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = a\left(\frac{\Gamma}{2\pi r} - r\dot{\varphi}\right) \\ \ddot{z} = -g - a\dot{z} \end{cases} \quad (5.1.7)$$

Z powyższych równań wynika, że ruch w płaszczyźnie (x, y) jest niezależny od ruchu w kierunku prostopadłym do niej. W kierunku pionowym mamy spadek kropli w polu grawitacyjnym hamowanym poprzez siłę oporu aerodynamicznego. Przyspieszenie w kierunku radialnym jest spowodowane siłą odśrodkową działającą na kroplę i siłą oporu aerodynamicznego w tym kierunku. Ruch obrotowy kropli wywołany jest przez działanie siły aerodynamicznej związanej z wirowaniem powietrza.

Równanie trzecie we wzorze (5.1.7) daje się łatwo scałkować co prowadzi do wzoru:

$$\dot{z} = -gt - az + C_1 \quad (5.1.8)$$

Rozwiązując kolejno równanie jednorodne i następnie niejednorodne metodą uzmienniania stałej otrzymujemy wzór:

$$z(t) = C_0 \exp(-at) + \frac{C_1}{a} - \frac{g}{a}t + \frac{g}{a^2} \quad (5.1.9)$$

Uwzględniając warunki początkowe  $z(t=0)$  oraz  $\dot{z}(t=0) = 0$  dostajemy rozwiązanie równania ruchu w kierunku pionowym

$$\begin{cases} z(t) = z_0 + \frac{g}{a^2}(\exp(-at) - 1) + \frac{g}{a}t \\ \dot{z}(t) = \frac{g}{a}(1 - \exp(-at)) \end{cases} \quad (5.1.10)$$

Na podstawie rozwiązania łatwo stwierdzić, że zasięg ruchu jest nieograniczony, prędkość kropli wzrasta dążąc asymptotycznie do wartości (terminal velocity):

$$v_t = \frac{g}{a} \quad (5.1.11)$$

Wielkość  $\tau=1/a$  jest czasem adaptacji, po którym kropla dostosowuje swoją prędkość do warunków zewnętrznych.

Przechodzimy obecnie do rozwiązywania dwóch pierwszych równań ruchu

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -a\dot{r} \\ 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = a\left(\frac{\Gamma}{2\pi r} - r\dot{\varphi}\right) \end{cases}$$

(5.1.12)

Drugie równanie daje się scałkować

$$2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi} = a\left(\frac{\Gamma}{2\pi} - r^2\dot{\varphi}\right) \quad (5.1.13)$$

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = a\left(\frac{\Gamma}{2\pi} - r^2\dot{\varphi}\right) \quad (5.1.14)$$

gdzie  $r^2\dot{\varphi} = L$  jest momentem pędu kropli na jednostkę masy, czyli

$$\frac{dL}{dt} = a\left(\frac{\Gamma}{2\pi} - L\right) \quad (5.1.15)$$

Rozwiązując to równanie różniczkowe mamy;

$$\frac{dL}{\left(\frac{\Gamma}{2\pi} - L\right)} = a dt \quad (5.1.16)$$

$$-\ln\left(\frac{\Gamma}{2\pi} - L\right) = at + C \quad (5.1.17)$$

$$L(t) = \frac{\Gamma}{2\pi} - \exp(-at - C) \quad (5.1.18)$$

Uwzględniając warunek początkowy  $L(t)=L_0$  otrzymujemy:

$$L(t) = L_w - (L_w - L_0)\exp(-at) \quad (5.1.19)$$

gdzie:

$$L_w = \frac{\Gamma}{2\pi} \quad (5.1.20)$$

Zbadajmy zachowanie asymptotyczne dla  $t \gg 1$ . Moment pędu kropli dąży do wartości  $L_w$ .  
Gdy początkowa wartość momentu pędu kropli jest równa tej wartości wówczas moment pędu jest wielkością stałą, niezależną od czasu.  
Rozwiązujemy równanie radialne, w tym celu podstawiamy do pierwszego równania ze wzoru (5.1.12) wielkość  $r^2\dot{\varphi} = L(t)$  w celu wyeliminowania zmiennej azymutalnej  $\varphi$ . W wyniku tego otrzymujemy równanie różniczkowe zwyczajne 2-go rzędu.

$$\ddot{r} + a\dot{r} = \frac{L^2(t)}{r^3} \quad (5.1.21)$$

Rozpatrzy ponownie zachowanie asymptotyczne dla  $t \gg 1$ . Dla dostatecznie dużych czasów kropla będzie znajdowała się daleko od centrum wiru i jej prędkość będzie niewiele różniła się od prędkości powietrza. Zatem siły aerodynamiczne działające na krople będą niewielkie i pierwszy czynnik w równaniu (5.1.21) pominąć. Tak uproszczone równanie różniczkowe daje się łatwo rozwiązać co uczyniono poniżej.

$$a \frac{dr}{dt} = \frac{L^2(t)}{r^3} \quad (5.1.22)$$

$$ar^3 dr = [L_w - (L_w - L_0) \exp(-at)]^2 dt \quad (5.1.23)$$

$$\frac{1}{4} ar^4 + C = \int dt [L_w^2 - 2L_w(L_w - L_0) \exp(-at) + (L_w - L_0)^2 \exp(-2at)] \quad (5.1.24)$$

$$\frac{1}{4} ar^4 + C = L_w^2 t + 2 \frac{L_w}{a} (L_w - L_0) \exp(-at) + \frac{(L_w - L_0)^2}{2a} \exp(-2at) \quad (5.1.25)$$

przyjmując warunek początkowy  $r(t=0) = r_0$  kontynuujemy obliczenia prowadzące do ostatecznego równania.

$$C = -\frac{1}{4} r_0^2 a + \frac{2L_w}{a} (L_w - L_0) - \frac{(L_w - L_0)^2}{2a} \quad (5.1.26)$$

$$\frac{1}{4} ar^4 = \frac{1}{4} ar_0^4 + \frac{2L_w}{a} (L_w - L_0) [\exp(-at) - 1] - \frac{(L_w - L_0)^2}{2a} [\exp(-2at) - 1] + 4L_w^2 t \quad (5.1.27)$$

$$r = \sqrt[4]{r_0^4 + \frac{8L_w}{a^2} (L_w - L_0) [\exp(-at) - 1] - \frac{2(L_w - L_0)^2}{a^2} [\exp(-at) - 1] + \frac{4L_w^2}{a} t} \quad (5.1.28)$$

W przypadku gdy  $L_w = L_0$  równanie (5.1.28) znacznie się upraszcza

$$r = \sqrt[4]{r_0^4 + \frac{4L_w^2}{a} t} \quad (5.1.29)$$

Kropla oddala się od centrum wiru potęgowo z czasem. Odległość jej rośnie coraz wolniej w coraz dalszych momentach czasu. Takie samo zachowanie otrzymujemy gdy  $L_w \neq L_0$ , ponieważ dla dużych czasów czynniki wykładnicze:  $\exp(-at)$  i  $\exp(-2at)$  dążą do zera. Wyrażenie w wykładniku  $a$  jest odwrotnością czasu relaksacji kropli. Ze wzoru wynika, że czas ten jest proporcjonalny do kwadratu promienia kropli. Małe krople w krótkim czasie będą dostosowywały swoją prędkość do profilu prędkości wiru, w przeciwieństwie do dużych dla których czas ten ulega znacznemu wydłużeniu. Wielkość  $T=1/a$  jest więc skalą czasową ruchu kropli w wirze. Wir punktowy nie ma wyróżnionej skali przestrzennej ze względu na swoją geometrię, pomimo tego oznaczmy przez  $S$  skalę długości ruchu kropli. Wielkość  $o$

wymiarze długości można utworzyć z stałych charakteryzujących wir ( $L_w$ ) oraz krople ( $a$ ) w następujący sposób:

$$S = \sqrt{\frac{L_w}{a}} \quad (5.1.30)$$

Wprowadzona po wyżej skala długości jest odległością na której kropla dostosowuje swój ruch do otoczenia. Ta charakterystyczna odległość na której następuje relaksacja jest tym większa im większa jest cyrkulacja wiru i większy promień kropli.

Definiujemy zmienne bezwymiarowe:

$$r' = \frac{r}{S} \quad t' = \frac{t}{T} \quad (5.1.31)$$

Dokonyjemy kolejno zamiany zmiennych w równaniach ruchu (5.1.12)

$$\begin{cases} \ddot{r}' \frac{S}{T^2} - r' \dot{\phi}'^2 \frac{S}{T^2} = -a \ddot{r}' \frac{S}{T} \\ 2\dot{r}' \dot{\phi}' \frac{S}{T^2} + r' \ddot{\phi}' \frac{S}{T^2} = a \left( \frac{\Gamma}{2\pi r' S} - r' \dot{\phi}' \frac{S}{T} \right) \end{cases} \quad (5.1.32)$$

Pomijając kolejno znak prim przy wyrażeniach i podstawiając za skale długości i czasu otrzymujemy:

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = -\dot{r} \\ 2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} = \frac{1}{r} - r\dot{\phi} \end{cases} \quad (5.1.33)$$

Równania ruchu w zmiennych bezwymiarowych nie zależą od rozmiarów kropli ani od cyrkulacji wiru. Ruch kropli w obszarze wiru punktowego jest zawsze taki sam, nie zależy on od bezwymiarowych wielkości charakteryzujących krople oraz wir. W zmiennych bezwymiarowych rozwiązanie asymptotyczne dla dużych czasów przyjmuje postać:

$$r = \sqrt[4]{r_0^4 + 4t} \quad (5.1.34)$$

Przy analizie ruchu kropli o różnych wielkościach powyższy zapis równań jest dość niewygodny, ponieważ wykonując w tych zmiennych obliczenia numeryczne różnym kroplom odpowiadają różne chwile czasu. Dlatego aby uniknąć tego problemu można wprowadzić skale czasu i długości jednakowe dla wszystkich kropli.

$$T = \frac{1}{a_0}, \quad S = \sqrt{\frac{L_w}{a_0}} \quad (5.1.35)$$

gdzie

$$a_0 = \frac{9\mu}{2\rho_w R_0^2}, \quad (5.1.36)$$

zaś  $R_0$  jest promieniem kropli względem którego skalowany jest ruch pozostałych kropli. Wówczas równia ruchu przyjmują postać:

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = -\frac{a}{a_0} \dot{r} \\ 2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} = \frac{a}{a_0} \left( \frac{\Gamma}{2\pi r} - r\dot{\phi} \right) \end{cases} \quad (5.1.37)$$

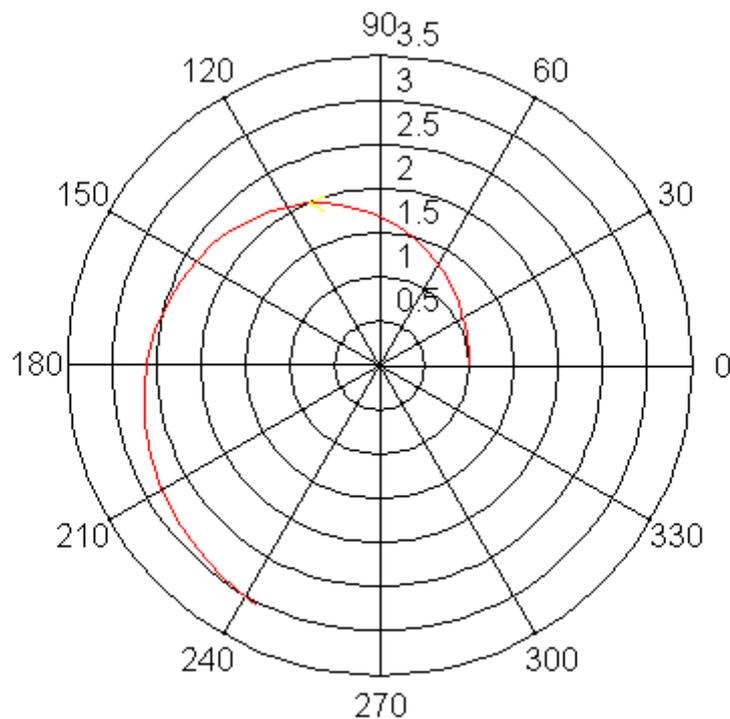
W tym przypadku równania ruchu zależą od bezwymiarowego czynnika  $a/a_0$ . W takich zmiennych rozwiązanie asymptotyczne wyraża się wzorem:

$$r = \sqrt[4]{r_0^4 + 4 \left[ \frac{a_0}{a} \right]^2 t} \quad (5.1.38)$$

Po uwzględnieniu wzorów 5.1.5 i 5.1.36 oraz pominięciu pierwszego czynnika pod pierwiastkiem otrzymujemy ostatecznie:

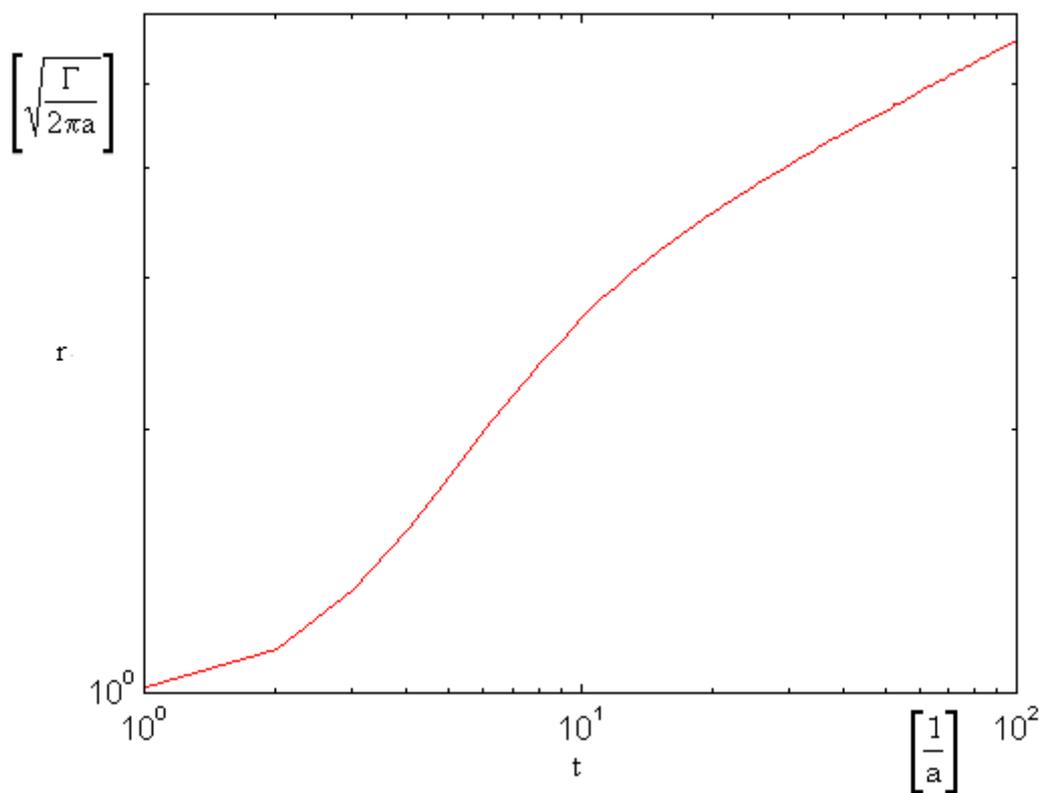
$$r = \frac{R}{R_0} \sqrt[4]{4t} \quad (5.1.39)$$

Z powyższego wzoru wynika, że kropla dwa razy większa znajduje się dwa razy dalej od osi wiru niż mniejsza. Krople cięższe podlegają większej sile odśrodkowej co powoduje ich szybsze oddalenie się od osi wiru w porównaniu z mniejszymi kroplami.

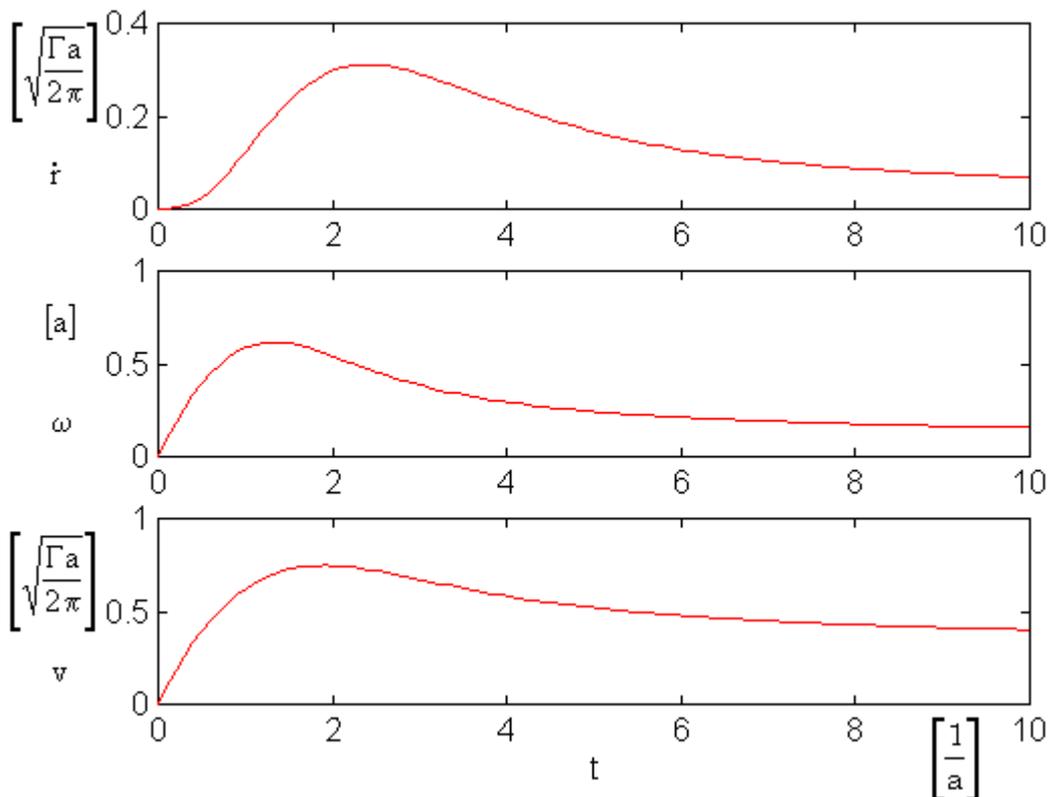


**Rysunek 5.1.1** Położenie kropli w ruchu w pobliżu wiru punktowego w czasie  $t=10 [1/a]$ .

Na rysunku 5.1.2 przedstawiona jest ruch kropli wokół wiru punktowego. Całkowity czas ruchu wynosił 1.6 turnover time (dla  $r=1$ ) w czasie którego kropla wykonała 0.6 obrotu. Odległość kropli w skali podwójnie logarytmicznej ukazana jest na rysunku 5.1.2. Dla czasów



**Rysunek 5.1.2** Odległość kropli od środka wiru w funkcji czasu



**Wykres 5.1.3** Prędkości kropli w czasie ruchu przez wir. Górny wykres przedstawia prędkość radialną, środkową prędkość kątową i dolny prędkość całkowitą. Całkowity czas ruchu jest równy w przybliżeniu czasowi jednego obrotowi wiru wokół własnej osi dla  $r=1$ .

większych od  $t=10$   $[1/a]$  wykres staje się liniowy co oznacza, że odległość kropli jest potęgowej. Prędkość radialna i kątowa kropli osiąga maksimum po czym obie wartości zmniejszają się dążą asymptotycznie do zera (rys. 5.1.3). Wartość maksymalną szybciej osiąga prędkość kątowa (dla  $t \approx 1$   $[1/a]$ ) co spowodowane azymutalnym profilem prędkość powietrza w pobliżu wiru punktowego.

Wygodną do analizy ruchu kropli jest jednostka czasu określająca czas obrotu wiru wokół własnej osi tzw. turnover time  $T_{ov}$ . W przypadku wiru punktowego nie jest on wielkością stałą, ponieważ zależy od odległości od osi wiru.

$$T_{ov} = \frac{2\pi r}{v} \quad (5.1.40)$$

Podstawiamy ze wzoru 5.1.2 za prędkość wiru oraz zmieniamy zmienne na bezwymiarowe co prowadzi do wzoru:

$$T_{ov} = \frac{(2\pi r' S)^2}{\Gamma} \quad (5.1.41)$$

Wykorzystując kolejno definicje skali przestrzennej i pomijając znak prim przy  $r$  mamy:

$$T_{ov} = \frac{2\pi r^2}{a} \quad (5.1.42)$$

Wyznaczając turnover time w jednostkach czasu relaksacji  $\tau = 1/a$  otrzymujemy wzór:

$$\frac{T_{ov}}{\tau} = 2\pi r^2 \quad (5.1.43)$$

Powyższy wzór ukazuje kwadratową zależność czasu obrotu wiru od odległości. Dla  $r=1$  turnover time jest przeszło 6-krotnie dłuższy od czasu adaptacji kropli, oznacza to relaksacja ruchu kropli do otoczenia odbywa się w czasie mniejszym niż jeden obrót kropli wokół wiru. Podczas gdy kropla znajduje się jeszcze dalej od wiru turnover time jest dużo większy niż czas adaptacji.

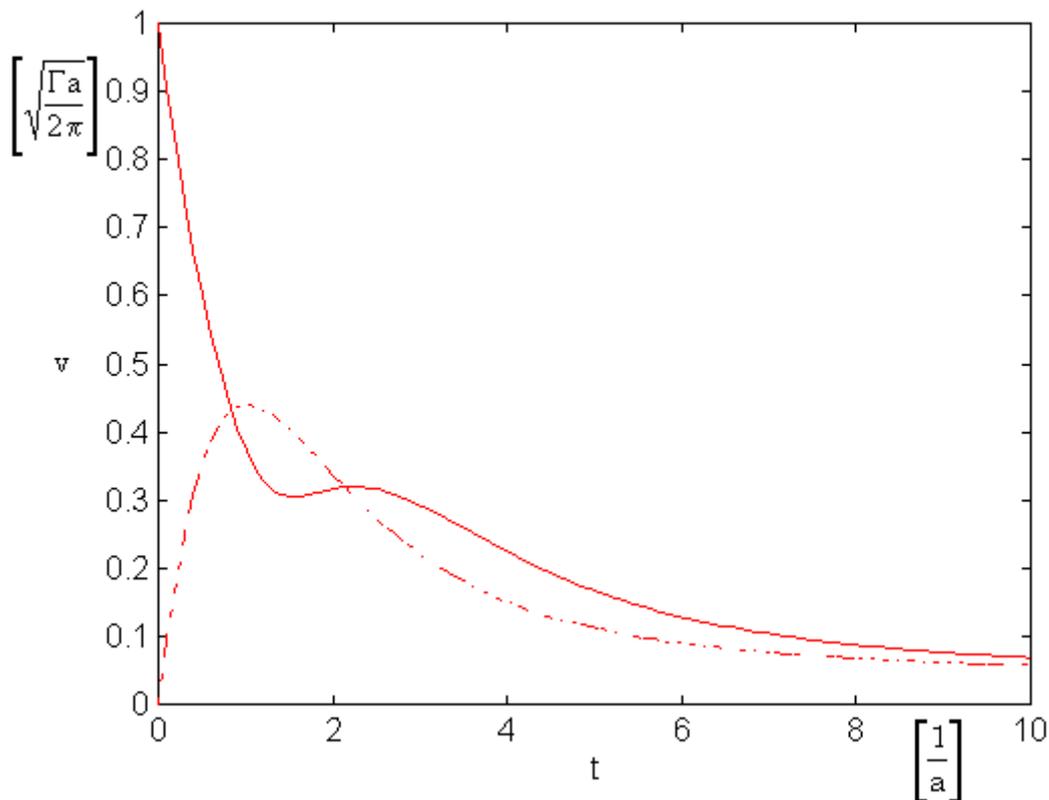
Równania ruchu w przybliżeniu Stokesa są poprawne pod warunkiem, że liczba Reynoldsa jest dużo mniejsza od jednośc. W celu oszacowania liczby Reynoldsa przeprowadźmy dyskusję w przypadku gdy kropla początkowo spoczywa oraz gdy w chwili początkowej jej prędkość kątowa jest tak sama jak prędkość kątowa wiru. Zauważmy, że w pierwszej sytuacji największa liczba Reynoldsa występuje gdy kropla spoczywa, ponieważ po rozpoczęciu ruchu względna prędkość kropli i powietrza zmniejsza się. Obliczmy wartość liczby Reynoldsa w chwili początkowej.

$$Re = \frac{2R_0 v}{\nu} \quad (5.1.44)$$

gdzie  $R_0$  -promieniem kropli,  $v$ -prędkość powietrza,  $\nu$  -lepkość kinematyczna powietrza  
Obliczamy prędkość wiru, wyrażając ją w jednostkach bezwymiarowych. Wychodząc ze wzoru 5.1.2 na prędkość wiru i dokonując zmiany zmiennych na bezwymiarowe mamy

$$v = \frac{\Gamma}{2\pi r^2 S} \quad (5.1.45)$$

Wykorzystując kolejno definicję skali przestrzennej  $S$  –wzór 5.1.35 i pomijając znak prim przy  $r$  dostajemy:



**Rysunek 5.1.4** Względna prędkość powietrza i kropli. Linią ciągłą przedstawiony jest przypadek gdy kropla początkowo spoczywa, zaś przerywaną gdy prędkość kątowna kropli w chwili początkowej jest równa prędkości kątownej powietrza.

$$v = \frac{\Gamma}{2\pi r \sqrt{\frac{\Gamma}{2\pi a}}} \quad (5.1.46)$$

Podstawiając ze wzoru 5.3.5 za  $a$  i po kilku przekształceniach otrzymujemy wzór na prędkość powietrza:

$$v = \frac{\Gamma}{2\pi r \sqrt{\frac{\Gamma R_0^2 \rho_w}{9\pi a v \rho_a}}} \quad (5.1.47)$$

gdzie  $\rho_a$  i  $\rho_w$  są odpowiednio gęstością powietrza i wody

Podstawiając do wzoru na liczbę Reynoldsa dostajemy końcowy wzór:

$$Re = \frac{3}{\sqrt{\pi r}} \sqrt{Re_w \frac{\rho_a}{\rho_w}} \quad (5.1.48)$$

gdzie  $Re_w = \frac{\Gamma}{\nu}$  jest liczbą Reynoldsa wiru punktowego.

W reżimie stoksowskim spełniony musi być warunek  $Re \ll 1$  co jest równoznaczne z zachodzeniem nierówności:

$$r \gg \sqrt{Re_w \frac{\rho_a}{\rho_w}} \quad (5.1.49)$$

Mamy stąd warunek na początkową odległość kropeł od wiru, przy której przybliżenie Stokesa jest uzasadnione. Zauważmy, że stosunek  $\rho_a / \rho_w$  wynosi około 0.001, dużo większe problemy są oszacowaniem liczby Reynoldsa wiru punktowego. Typowy przedział zmienności tej wielkości jest oceniany na 100-1000 (Douady, Couder, Brachet 1991). Na podstawie tych danych otrzymujemy, że odległość początkowa kropli od wiru musi być większa od  $r=1$  [ $\sqrt{L_w / a}$ ] aby równania ruchu analizowane powyżej były spełnione.

Otrzymany warunek w rzeczywistości jest dużo słabszy wynika to z rysunku 3.1.4. Względna prędkość powietrza i kropli szybko zmniejsza się z czasem a zatem liczba Reynoldsa staje się coraz mniejsza.

W drugim przypadku, gdy kropla początkowo ma prędkość taką samą jak wir, maksymalna względna prędkość jest mniejsza niż gdy kropla początkowo spoczywa (rys. 3.1.4). W związku z tym ograniczenie stosowalności równań w tym przypadku jest słabsze.

Z przedstawionej analizy ruchu kropli w wirze punktowym wynika, że krople w początkowym momencie swego ruchu oddalają się szybko od centrum wiru. Z czasem ich prędkość radialna szybko maleje i w granicznym przypadku odległość kropli od wiru będzie proporcjonalna do  $t^{1/4}$ . Wir punktowy jest obiektem czysto teoretycznym i niespotykanym w atmosferze. Jest to obiekt nietrwały, ponieważ napięcia lepkie powodują rozmywanie się osobliwości wirowości. Na podstawie równania Helmholtza dla lepkiego i nieściśliwego płynu opisującego ewolucję pola wirowości, które w chwili początkowej ma postać wiru punktowego otrzymujemy rozwiązanie w postaci (wiru Lamba):

$$\zeta(t) = \frac{\Gamma}{4\pi vt} \exp\left(-\frac{r^2}{4vt}\right) \quad (5.1.50)$$

Wirowość ma postać funkcji Gaussa o szerokości

$$\sigma = \sqrt{2vt} \quad (5.1.51)$$

Wirowość będzie z upływem czasu ulegała rozmyciu. Wynika z tego, że pole prędkości będzie zmieniało się z czasem. W związku z tym ruch kropli będzie inny niż jak było to przedstawione powyżej. Jeśli jednak kropla znajduje się z dala od maksimum funkcji Gaussa wówczas "czuła" pole prędkości jak od wiru punktowego. Wynika to z prostego rachunku.

$$\vec{\zeta} = \nabla \times \vec{v} \quad (5.1.52)$$

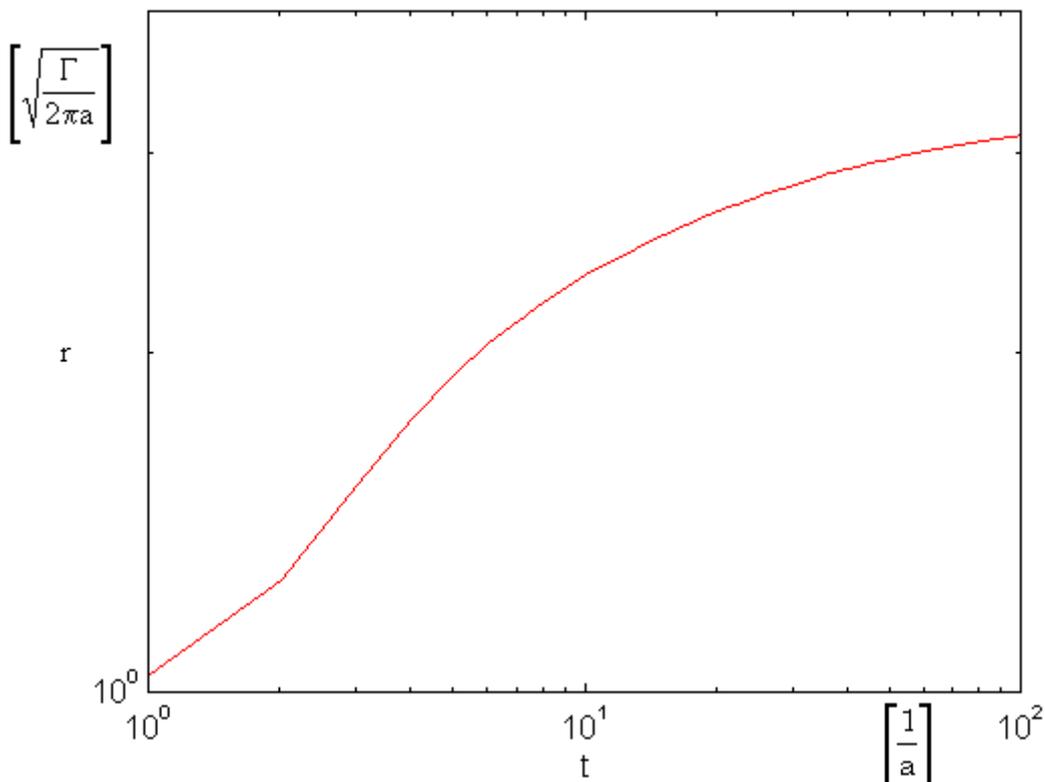
Składowa z wirowości wyraża się wzorem

$$\zeta = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (rv_\phi) \quad (5.1.53)$$

stąd

$$v_\phi = \frac{1}{r} \int_0^r r' \zeta dr'$$

(5.1.54)



Rysunek 5.1.5 Odległość kropli od wiru punktowego, który ulega dyssypacji.

$$v_{\varphi} = \frac{1}{r} \int_0^r dr' \left[ \frac{\Gamma}{4\pi vt} r' \exp\left(-\frac{r'^2}{4vt}\right) \right] \quad (5.1.55)$$

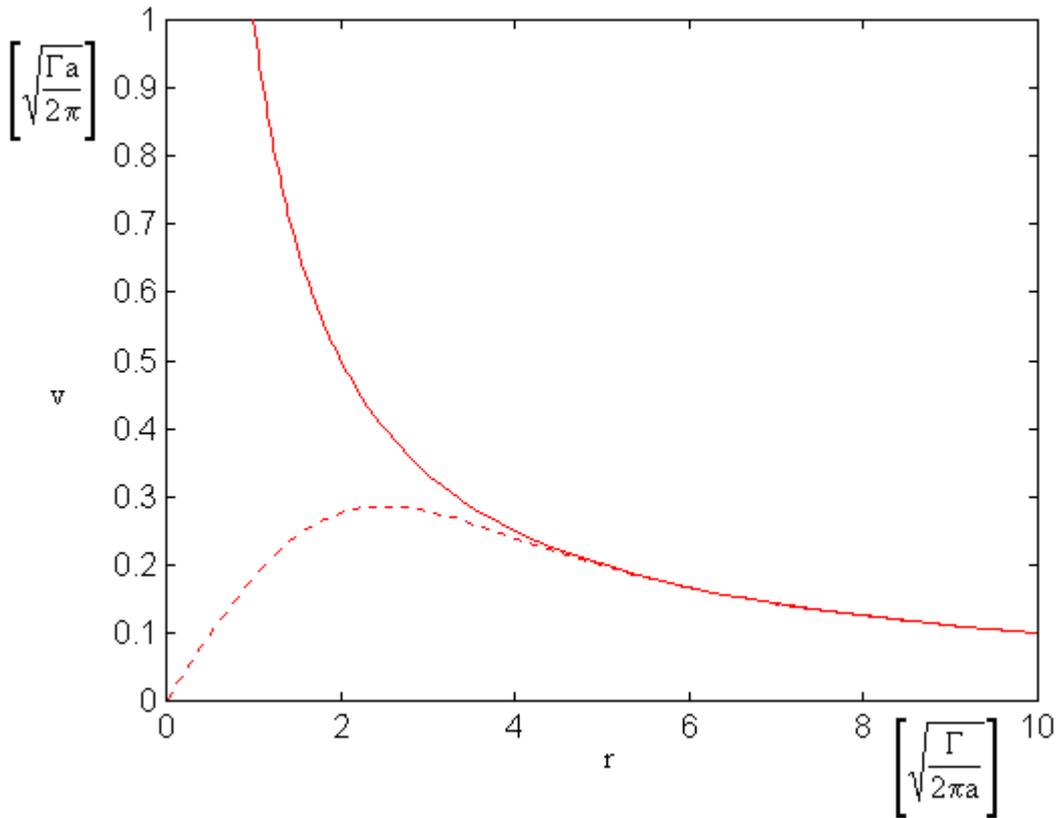
W wyniku scałkowania otrzymujemy następujący wzór:

$$v_{\varphi} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4vt}\right) \right] \quad (5.1.56)$$

Dla dostatecznie dużego  $r$  otrzymujemy profil prędkości jak w przypadku wiru punktowego. Jak wynika ze wzoru (5.1.29) szerokość wiru jest proporcjonalna do  $t^{1/2}$  podczas gdy kropla oddala się od wiru wolnej tzn.  $t^{1/4}$ . Oznacza to, że po pewnym czasie wir „dogoni” kroplę i przedstawione powyżej wzory opisujące ruch kropli ulegną zmianie. Czas po którym wir dogoni kroplę zależy od wielu zmiennych takich jak cyrkulacja wiru, masa i położenie początkowe kropli.

Większa cyrkulacja powoduje szybsze oddalanie się kropli od centrum wiru wobec tego powyższy czas ulegnie wydłużeniu. Podobnie krople większe będą dłużej poruszać się „czując” profil wiru punktowego niż krople małe. Ponadto krople zlokalizowane daleko od wiru w momencie początkowym będą długo poruszały się w polu wiru punktowego. Ze wzoru (5.1.56) wynika, że lepkość powietrza modyfikuje profil prędkości wiru w całej przestrzeni. Sprawia ona, że znika osobliwość prędkości w punkcie  $r=0$ . W całym obszarze

objętym przez wir prędkość powietrza staje się mniejsza od wartości początkowej rysunek 5.1.6. Ma to miejsce również w obszarze maksimum prędkości, które oddala się od punktu centralnego. Ze względu na to prędkość powietrza będzie stawała się coraz mniejsza zatem kropelka będzie wolniej oddalała się niż wynika to ze wzoru 5.1.29



**Wykres 5.1.6** Profil prędkości wiru punktowego (linia ciągła) oraz prędkość wiru gaussowskiego otrzymanego po rozmyciu się osobliwości wirowości (linia przerywana).

## 5.2 Ruch kropli w wirze o stałej wirowości.

Rozpatrujemy ruch w obszarze wewnętrznym wiru, gdzie wirowość jest stała i wynosi:

$$\zeta(r) = 2\omega = \text{const} \quad (5.2.1)$$

gdzie  $\omega$  jest prędkością kątową powietrza

Wewnątrz wiru powietrze porusza się jak bryła sztywna, wirując ze stałą prędkością kątową  $\omega$ . Profil prędkości azymutalnej wiru ma postać:

$$v_\varphi(r) = \omega r \vec{e}_\varphi \quad (5.2.2)$$

Analizę ruchu kropli przeprowadzamy dla wiru pionowego. Równanie ruchu kropli ma postać we współrzędnych biegunowych:

$$m\ddot{\vec{r}} = am(\vec{v}_a - \dot{\vec{r}}) \quad (5.2.3)$$

Wewnątrz wiru profil prędkości rośnie liniowo wraz z odległością od centrum wiru. Małe krople poruszające się w wirze podlegają mniejszej sile odśrodkowej niż duże krople, dlatego ich ruch będzie szybko adaptował się do otoczenia. Zauważmy, że prędkość azymutalna kropli będzie rosła z oddalaniem się jej od centrum wiru. W związku z tym ich prędkość kątowa zbliżać się będzie po dostatecznie długim czasie do prędkości kątowej wiru. Duże krople, ze względu na bezwładność, nie będą się mogły poruszać z tak dużymi prędkościami kątowymi. Oczekujemy, że po dostatecznie długim czasie ruchu wewnątrz wiru prędkość kątowa kropel będzie mało zmieniać się z czasem. Oznaczmy graniczną prędkość kątową przez  $\omega_k$  i rozpatrzmy przypadek asymptotyczny.

Równania ruchu w płaszczyźnie poziomej mają postać:

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -a\dot{r} \\ 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = a(\omega r - r\dot{\varphi}) \end{cases} \quad (5.2.4)$$

Kiedy prędkość kątowa osiągnie wartość graniczną wówczas równania upraszczają się do postaci:

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\omega_k^2 = -a\dot{r} \\ 2\dot{r}\omega_k = a(\omega r - \omega_k r) \end{cases} \quad (5.2.5)$$

Rozwiązujemy pierwsze równanie, które jest równaniem różniczkowym 2-go rzędu o stałych współczynnikach. Dlatego rozwiązanie jest postaci:

$$r(t) = A \exp(\lambda t) \quad (5.2.6)$$

Po podstawieniu do równanie 5.2.5 otrzymujemy warunek na współczynniki  $\lambda$

$$\lambda^2 + a\lambda - \omega_k^2 = 0 \quad (5.2.7)$$

$$\text{Otrzymujemy: } \lambda_{1/2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4\omega_k^2}}{2} \quad (5.2.8)$$

Z rozwiązania wynika, że jeden ze współczynników jest dodatni drugi zaś ujemny. Oznacza to, że odległość kropli od wiru rośnie wykładniczo z czasem. Po uwzględnieniu warunków początkowych  $r(t=0) = r_0$  oraz  $\dot{r}(t=0) = 0$  rozwiązanie pierwszego z równań 5.4.5 równań ma postać:

$$r(t) = r_0 \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \exp(\lambda_1 t) - r_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \exp(\lambda_2 t) \quad (5.2.9)$$

Pierwszy czynnik w równaniu jest dominujący ze względu na współczynnik  $\lambda_1 > 0$ , przy spełnieniu relacji  $a \gg \omega_k$  co dla małych kropli jest bardzo dobrze spełnione możemy dokonać rozwinięcia wyrażenia pod pierwiastkiem na  $\lambda$ . W skutek tego otrzymujemy asymptotyczne zachowanie:

$$r(t) \propto \exp\left(\frac{\omega_k^2}{a} t\right) \quad (5.2.10)$$

Z powyższego wzoru wynika, że prędkość oddalania się kropli będzie tym większa im większa jest prędkość kątowna wiru  $a$  co za tym idzie wirowość wiru. Ponadto prędkość ta rośnie w miarę wzrostu wielkości kropli.

Przechodzimy obecnie do rozwiązywania drugiego z równań 5.2.5 ale dopuszczamy zmiany prędkości kątowej w tym przypadku równanie na prędkość kątową kropli ma postać:

$$2\dot{r}\omega_k + r \frac{d\omega_k}{dt} = ar(\omega - \omega_k) \quad (5.2.11)$$

Podstawiając ze wzoru 5.2.10 za  $r$  oraz po zróżniczkowaniu po czasie za  $\dot{r}$  otrzymujemy

$$2\lambda_1 r \omega_k + r \frac{d\omega_k}{dt} = ar(\omega - \omega_k) \quad (5.2.12)$$

Rozwiązanie tego równania różniczkowego ma postać:

$$\omega_k = \frac{a\omega}{a + 2\lambda_1} - \frac{C}{a + 2\lambda_1} \exp[-t(a + 2\lambda_1)] \quad (5.2.13)$$

Po uwzględnieniu warunku początkowego  $\omega_k(t=0) = 0$  oraz wykorzystując wzór na wartość współczynnika  $\lambda_1$  otrzymujemy równanie uwikłane na prędkość kątową kropli:

$$\omega_k = \frac{a\omega}{\sqrt{a^2 + 4\omega_k^2}} \left[ 1 - \exp\left(-t\sqrt{a^2 + 4\omega_k^2}\right) \right] \quad (5.2.14)$$

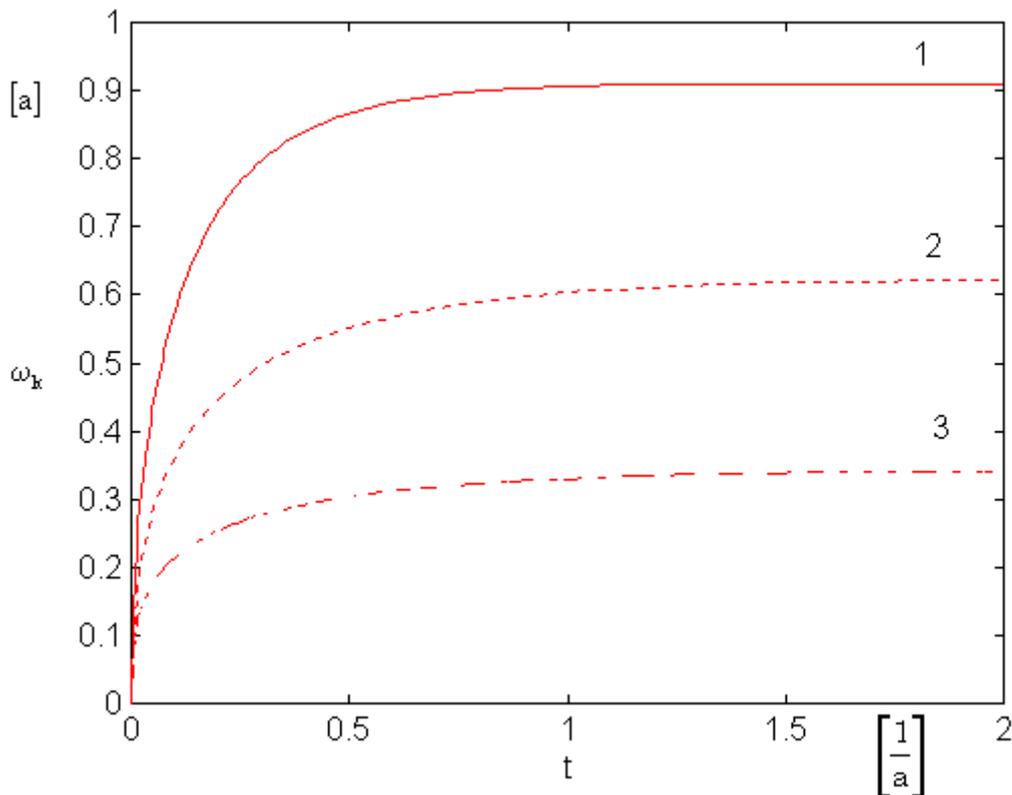
Wyrażenie w wykładniku zanika z czasem dlatego do analizy asymptotycznej prędkość kątową kropli w exponensie możemy zastąpić prędkością kątową wiru. W wyniku czego z równania 5.2.14 łatwo jest wyznaczyć  $\omega_k$ .

$$\omega_k = \frac{a}{2\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + 16 \frac{\omega^2}{a^2} \left[ 1 - \exp\left(-t\sqrt{a^2 + 4\omega^2}\right)\right]} - 1} \quad (5.2.15)$$

Rozważmy przypadek graniczny kropeł bezmasowych ( $a \rightarrow \infty$ ) wówczas wyrażenie pod pierwiastkiem można rozwinąć i po kilku przekształceniach otrzymujemy końcowy wynik:  $\omega_k = \omega$ . Nie ma w nim niczego zaskakującego, kropelka porusza się tak jak powietrze.

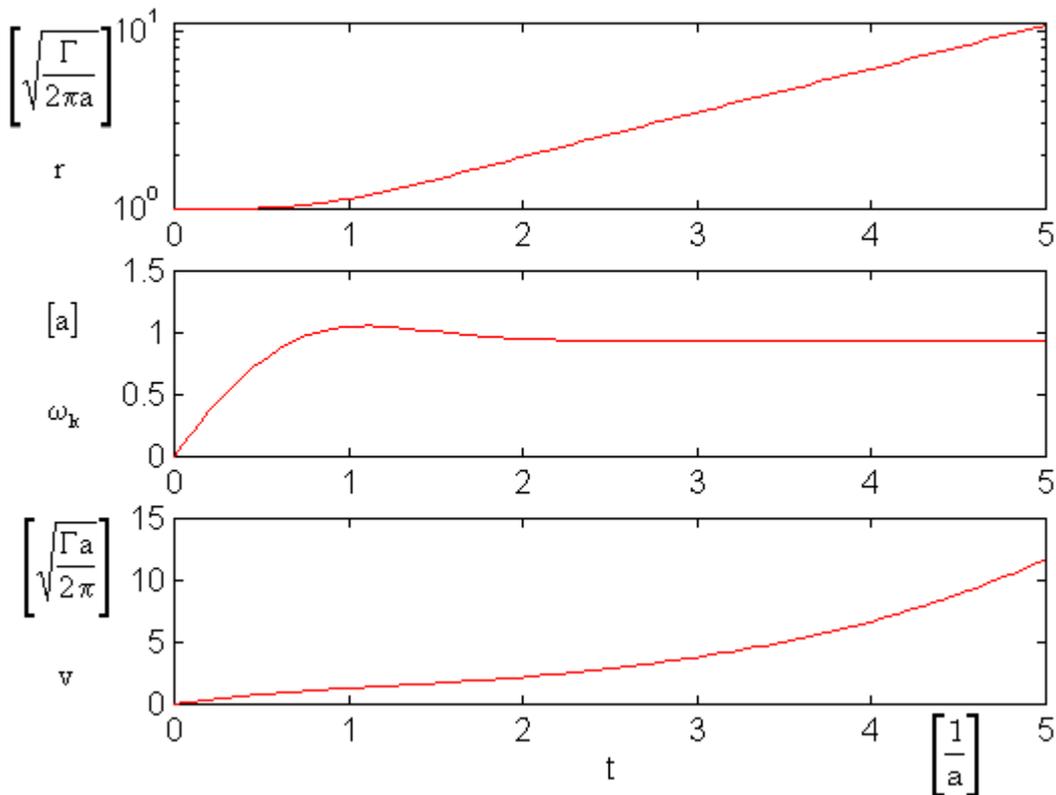
Podobną analizę można przeprowadzić dla dużych kropeł, w tym przypadku prędkość kątową dąży do zera. Również dla pośrednich wartości promienia kropeł istnieje wartość prędkości kątowej do której dąży kropka.

$$\omega_k = \frac{a}{2\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + 16 \frac{\omega^2}{a^2}} - 1} \quad (5.2.16)$$



**Rysunek 5.2.1** Prędkość kątową kropli w ruchu w wirze o stałej wirowości równej 2. Krzywa 1 odpowiada najbliższym krople (  $\omega/a = 0.25$  ), krzywa 2 krople większym (  $\omega/a = 1$  ) zaś linią 3 oznaczone są krople najdalsze (  $\omega/a = 0.25$  ).

Na rysunku 5.2.1 przedstawione są zmiany prędkości kątowej podczas ruchu kropli w wirze uzyskane ze wzoru 5.2.15. Wynika z niego, że krople dążą do stałej prędkości kątowej mniejszej niż prędkość kątową wiru. Krople małe już po czasie ok.  $t=0.1[1/a]$  osiągają 2/3 wartości końcowej prędkości kątowej dla dużych kropeł trwa to zdecydowanie dłużej.



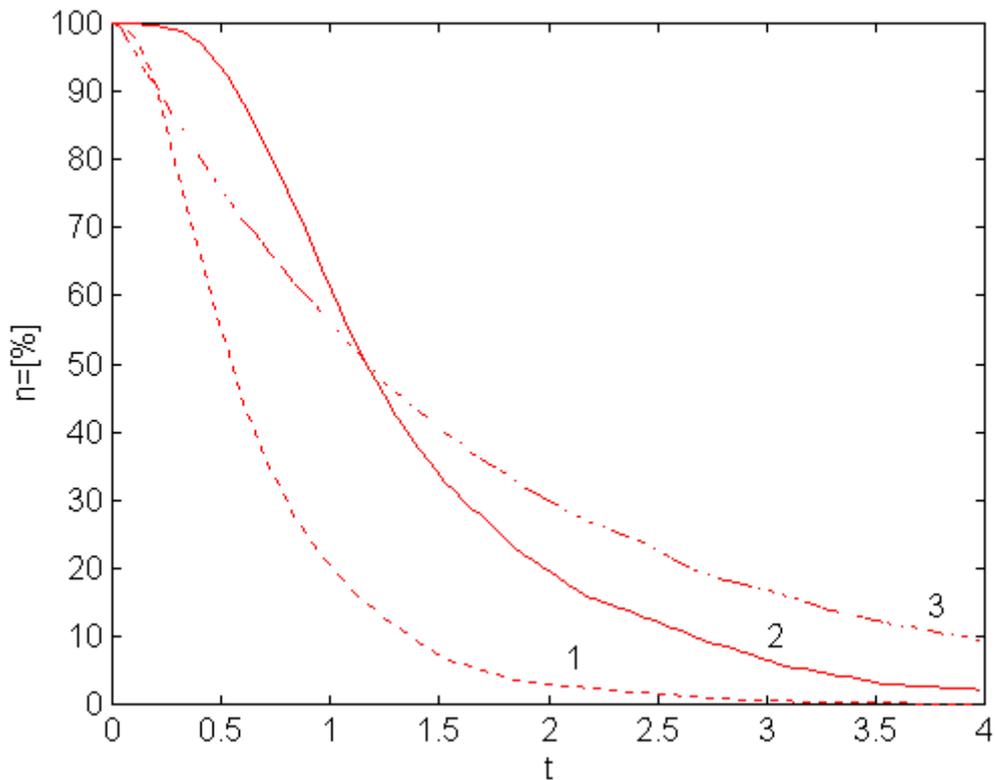
**Rysunek 5.2.2** Odległość kropli od osi wiru (górny wykres), prędkość kątowna (wykres środkowy) oraz prędkość całkowita (wykres dolny).

Rozpatrzy obecnie ściśle równania ruchu kropli w wirze. Rozwiązujemy jej numerycznie w tym celu zamianie zmiennych na bezwymiarowe wprowadzając wielkości skalujące:  $T = 1/a$  podobnie jak w przypadku wiru punktowego jest to czas relaksacji. Jako skale przestrzenną wybrano promień wiru czyli  $S = r_0$ . W zmiennych bezwymiarowych równania ruchu mają postać:

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = -\dot{r} \\ 2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} = \frac{\omega}{a}r - r\dot{\phi} \end{cases} \quad (5.417)$$

Równania ruchu zależą od jednego bezwymiarowego czynnika  $\omega/a$ . Wyniki obliczeń numerycznych powyższego układu równań przedstawione są na rysunku 5.2.2. Otrzymane rezultaty potwierdzają przedstawioną powyżej analizę asymptotyczną ruchu. Odległość kropli od wiru w skali logarytmicznej jest dla  $t > 1$   $[1/a]$  liniowa. Oznacza to, że po krótkim czasie adaptacji kropla oddala się wykładniczo z czasem od centrum wiru. Prędkość kątowna kropli dąży do stałej wartości po osiągnięciu maksimum związanego z początkowym przyspieszaniem kropli.

Rozpatrujemy ruch różnych krople w wirze o stałej wirowości. Krople różnej wielkości będą podlegały różnym przyspieszeniom radialnym. Krople małe, dla których czas adaptacji do ruchu otoczenia jest niewielki będą początkowo najszybciej oddalać się od osi wiru. Taka sytuacja trwa do momentu kiedy duże krople uzyskają wystarczającą prędkość kątowną, która spowoduje większą niż dla małych kropli siłą odśrodkową. Kiedy to nastąpi krople będą miały największą prędkość radialną.

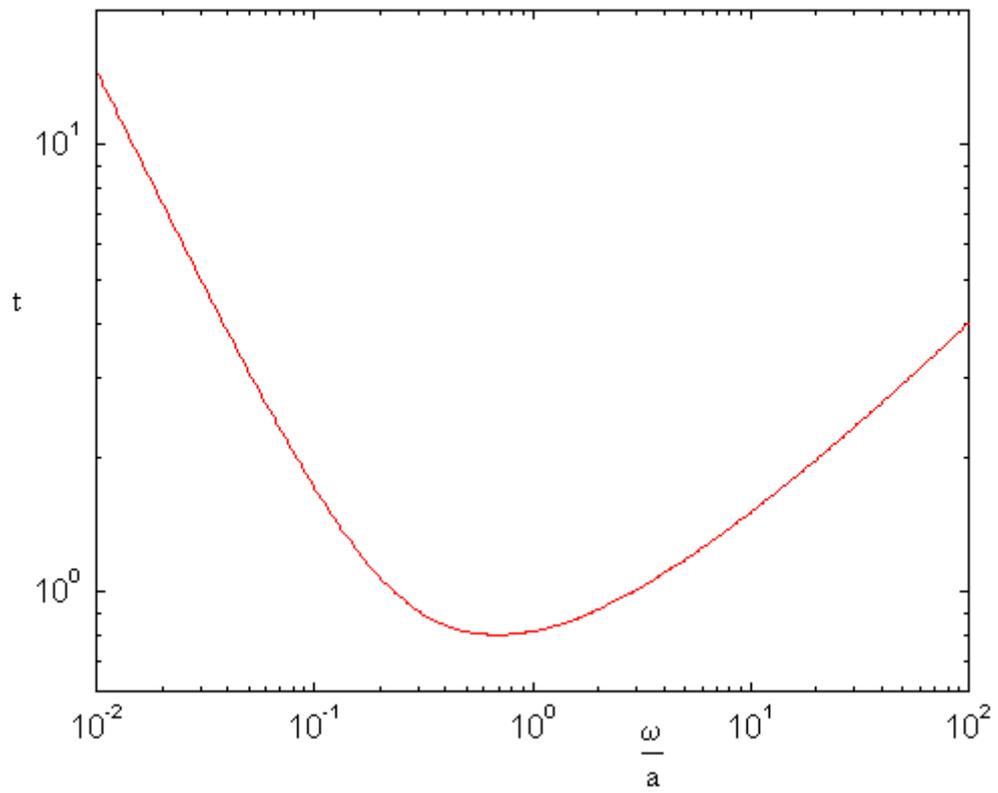


**Rysunek 5.2.3** Procentowa liczba kropeł znajdujących się w obszarze wiru o promieniu  $r = 0.5r_0$ . Jednostką czasu jest okresu obrotu wiru wokół własnej osi. Krzywa 1 odpowiada kroplom o średnich rozmiarach ( $\omega/a = 1$ ), krzywa 2 kroplom większym ( $\omega/a = 10$ ), zaś krzywa 3 kroplom mniejszym ( $\omega/a = 0.1$ ).

Z przedstawionej powyżej analizy ruchu wynika, że krople oddalają się od wiru wykładniczo z czasem przy czym współczynnik w wykładniku jest tym większy im większy jest promień kropli. Liczba kropeł w wirze w funkcji czasu przedstawiona jest na rysunku 5.2.3. Na początku symulacji z obszaru wymiatane są najmniejsze krople, później zaś krople większe. Po czasie równym jednemu obrotowi wiru wewnątrz jego pozostało jedynie 20% kropeł średnich i 50% kropeł najmniejszych i największych. Pod koniec okresu symulacji w obrębie wiru nie ma już kropeł średnich, jest około 2% kropeł dużych i 10% kropeł małych.

Na rysunku 5.2.4 przedstawiony jest czas ruchu kropli w wirze w funkcji wielkości  $\omega/a$ , która jest proporcjonalna do kwadratu promienia kropli. Funkcja ta posiada minimum dla  $\omega/a$  równego około 0.7. Krople takie zostają najszybciej wyrzucane z obszaru wiru. Zarówno krople większe od nich jak i mniejsze poruszają się w wirze dłużej. Czas ten szybko rośnie w miarę oddalania się  $\omega/a$  od minimum tej funkcji. Istnienie takiego rozmiaru promienia kropli dla których czas ruchu w obszarze wiru jest najmniejszy wydaje się dość intuicyjne. Rozmiar kropli odpowiadający temu minimum zależy od szerokości wiru oraz jego prędkości kątowej.

Wykładnicze oddalanie się wykładnicze krople od osi wiru powoduje, że opuszczają one szybko obszar o dużej wirowości. Odległości pomiędzy poszczególnymi kroplami rosną z czasem co prowadzi do zmniejszania się koncentracji kropeł wewnątrz wiru. Wynika z tego, że w obszarach chmury w których występuje duża wirowość gęstość kropeł jest mniejsza niż w obszarach sąsiednich.



**Rysunek 5.2.4** Czas przebywania kropli w wirze w zależności od stosunku ( $\omega/a$ ). Jednostką czasu jest czas obrotu wiru wokół własnej osi.

### 5.3 Ruch kropli w pobliżu wiru punktowego rozciąganego w kierunku pionowym.

Rozpatrzmy obszar przestrzeni, w której znajduje się pionowy wir punktowy. Przyjmijmy, że wir ten jest rozciągany w kierunku pionowym. Warunek ciągłości wymaga aby powietrze napływało do środka wiru podtrzymując w ten sposób rozpływanie powietrza w kierunku pionowym. Innymi słowy po zrzutowaniu ruchu powietrza na płaszczyznę poziomą w centralnej części wiru mamy zlew o sile  $\gamma$  i jego profil prędkości ma postać.

$$\vec{v}_a = \left( -\frac{1}{2} \gamma x, -\frac{1}{2} \gamma y, \gamma z \right) \quad (5.3.1)$$

W układzie cylindrycznym: 
$$\vec{v}_a = -\frac{\gamma}{2} r \vec{e}_r + \gamma z \vec{e}_z \quad (5.3.2)$$

Wobec tego rozkład prędkości powietrza dla rozciąganego wiru punktowego ma postać:

$$\vec{v}_a = -\frac{\gamma}{2} r \vec{e}_r + \frac{\Gamma}{2\pi} \vec{e}_\varphi + \gamma z \vec{e}_z \quad (5.3.3)$$

Równanie ruchu kropli w obszarze o takim rozkładzie prędkości przyjmuje postać:

$$m \ddot{\vec{r}} = m a (\vec{v}_a - \dot{\vec{r}}) - m g \vec{e}_z \quad (5.3.4)$$

Równanie ruchu rozwiązujemy w układzie cylindrycznym w którym po rozpisaniu wektorów przyspieszenia, prędkości oraz położenia otrzymujemy układ równań różniczkowych zwyczajnych 2-go rzędu,

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = a \left( -\frac{\gamma}{2} r - \dot{r} \right) \\ 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = a \left( \frac{\Gamma}{2\pi r} - r\dot{\varphi} \right) \\ \ddot{z} = a(\gamma z - \dot{z}) - g \end{cases} \quad (5.3.5)$$

Rozwiązanie trzeciego równania można otrzymać w sposób analityczny zaczynając od rozpatrzenia równania jednorodnego:

$$\ddot{z} - a\gamma z + a\dot{z} = 0 \quad (5.3.6)$$

Równanie powyższe jest równaniem różniczkowym 2-go rzędu o stałych współczynnikach. W związku z tym rozwiązanie ma postać:

$$z(t) = \alpha \exp(\lambda t) \quad (5.3.7)$$

Po podstawieniu do równania otrzymujemy równanie kwadratowe na współczynniki  $\lambda$ , którego rozwiązanie prowadzi do wzoru

$$\lambda_{1/2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4a\gamma}}{2} \quad (5.3.8)$$

Rozwiązanie równania jednorodnego jest więc postaci:

$$z(t) = \alpha_1 \exp(\lambda_1 t) + \alpha_2 \exp(\lambda_2 t) \quad (5.3.9)$$

Uwzględnienie niejednorodności jest natychmiastowe, ponieważ niejednorodność jest wielkością stałą. Otrzymujemy po kilku przekształceniach ostateczną postać wzoru:

$$z(t) = \alpha_1 \exp(\lambda_1 t) + \alpha_2 \exp(\lambda_2 t) + \frac{\gamma g}{a} \quad (5.3.10)$$

Uwzględnienie warunków początkowych prowadzi do wzoru:

$$z(t) = \frac{z_0 a - \gamma g}{a(\lambda_2 - \lambda_1)} [\lambda_2 \exp(\lambda_1 t) - \lambda_1 \exp(\lambda_2 t)] + \frac{\gamma g}{a} \quad (5.3.11)$$

Jak wynika ze wzoru 5.3.8  $\lambda_1 > 0$  zaś  $\lambda_2 < 0$ . Zatem kropelka będzie oddalać się od płaszczyzny  $z=0$  wykładniczo z czasem do góry lub na dół w zależności od początkowego położenia.

Prędkość oddalania kropli zależy od jej wielkości.

Wracając do pierwszego i drugiego równania ruchu 5.3.5 rozważmy siły działające na krople w płaskim ruchu. W skutek wirowania powietrza poprzez lepkość kropla będzie uzyskiwała prędkość kątową. Z kolei ruch po krzywej spowoduje zadziaływanie na nią siły odśrodkowej.

Ponadto powietrze będzie spływało do punktu  $r=0$ . Zatem pojawi się siła równoważąca siłę odśrodkową. Możemy oczekiwać sytuacji stacjonarnej, w której kropelka będzie poruszać się po okręgu wokół wiru. Wówczas wielkości takie jak:  $\ddot{\phi}, \dot{r}, \ddot{r}$  będą równe zero. Po tym uproszczeniu równania 5.3.5 upraszczają się do postaci:

$$\begin{cases} -r\dot{\phi}^2 = -a \frac{\gamma}{2} r \\ a \left( \frac{\Gamma}{2\pi r} - r\dot{\phi} \right) = 0 \end{cases} \quad (5.3.12)$$

Otrzymujemy stąd, że prędkość kątowa kropli jest stała i wynosi:  $\dot{\phi} = \sqrt{\frac{\gamma a}{2}}$  (5.3.13)

Z drugiego równania 5.3.12 mamy, że  $r^2 = \frac{\Gamma}{2\pi\dot{\phi}}$  (5.3.14)

Na podstawie ostatnich dwóch równań otrzymujemy wzór na promień orbity kropelki:

$$r = \sqrt[4]{\frac{2}{a\gamma} \left( \frac{\Gamma}{2\pi} \right)^2} \quad (5.3.15)$$

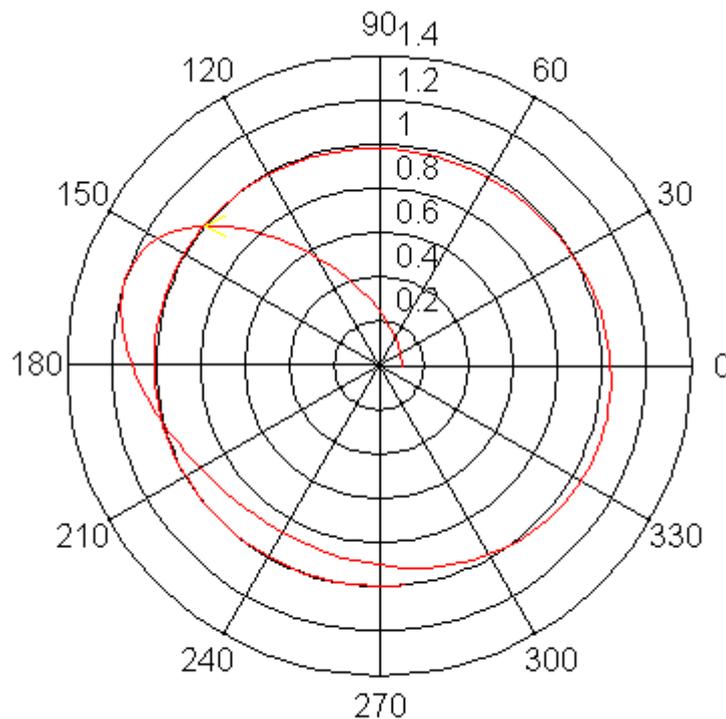
Promień orbity stacjonarnej będzie tym większy im silniejszy będzie wir i większy jest promień kropli. Kropelki niezależnie od swego początkowego położenia będą zbliżały się do ruchu na promieniu stacjonarnym. Siła odśrodkowa maleje z odległością od środka wiru a siła Stokesa pochodząca od rozciągania rośnie a zatem jeśli kropelka znajdzie się poza promieniem stacjonarnym działać na nią będą siły w kierunku osiągnięcia orbity stacjonarnej. Ruch jej w kierunku radialnym przypomina drgania o gasnącej z czasem amplitudzie.

Dokładny ruch kropli uzyskano w wyniku obliczeń numerycznych. Obliczenia wykonano dla zmiennych bezwymiarowych (wzór 5.1.31). W nowych zmiennych równia ruchu przyjmują postać:

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = -\frac{1}{2} \frac{\gamma}{a} r - \dot{r} \\ 2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} = \frac{1}{r} - r\dot{\phi} \end{cases} \quad (5.3.16)$$

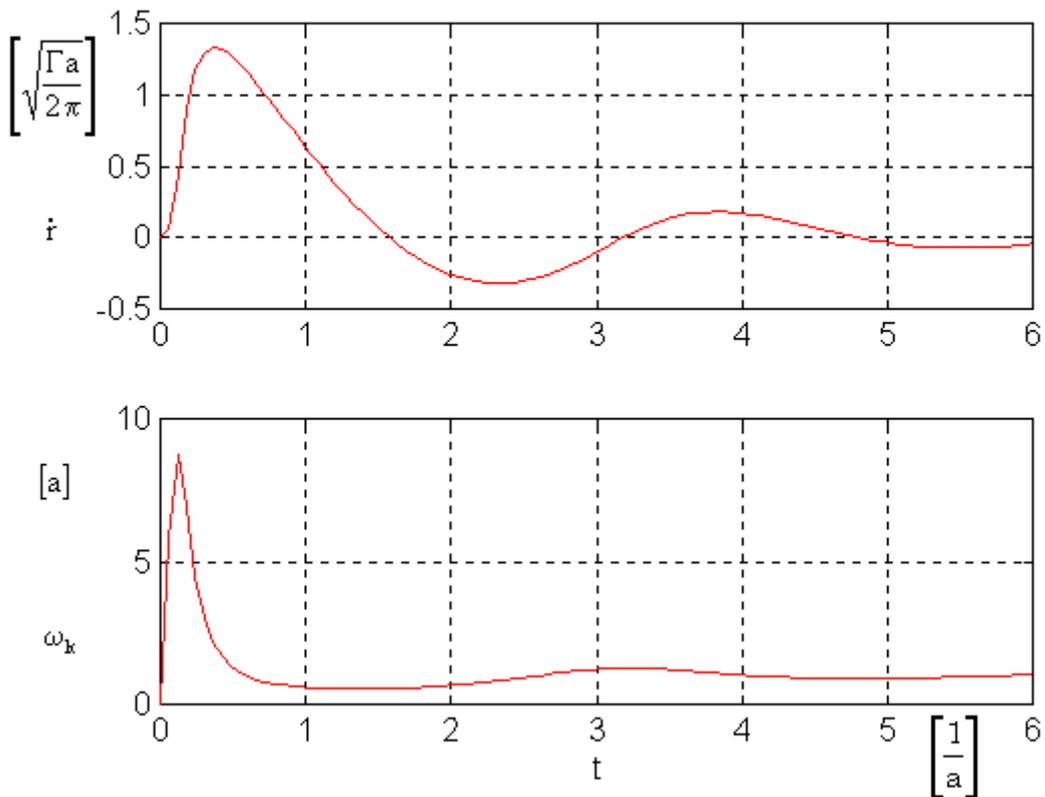
Pierwsze równanie ruchu zależy od bezwymiarowej wielkości:  $L_1 = \frac{\gamma}{a}$ , (5.5.17)

która określona jest przez wielkość kropli oraz współczynnik rozciąganie wiru.

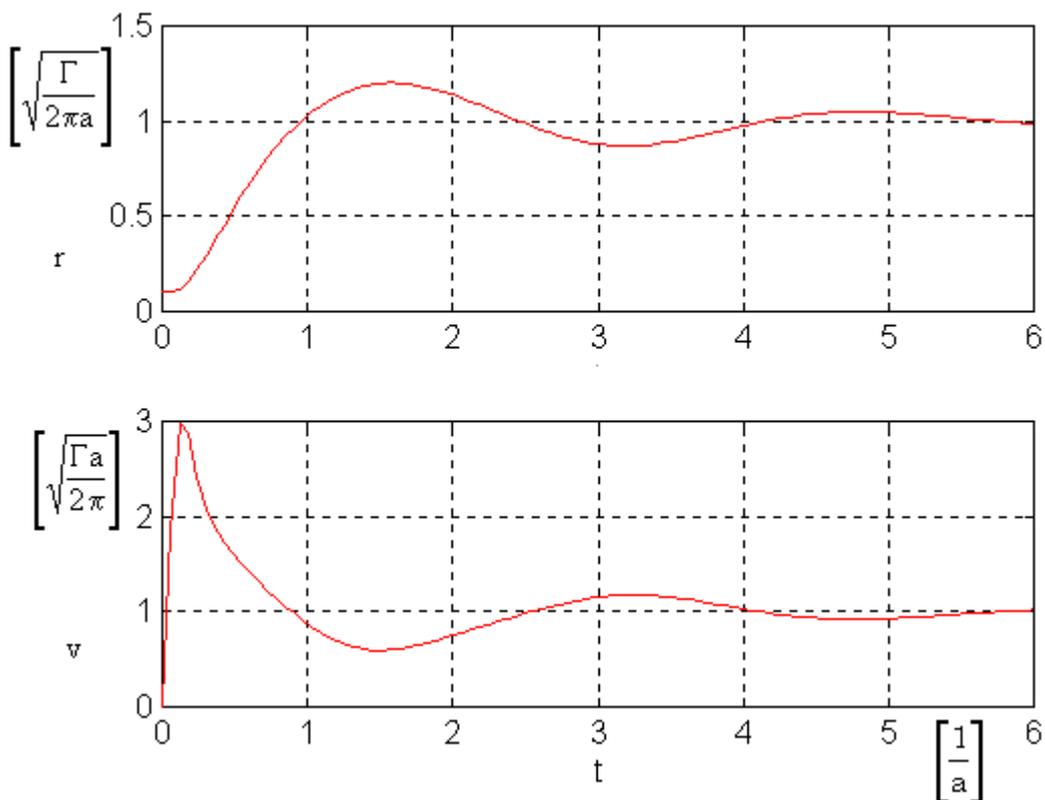


**Rysunek 5.3.1** Położenie kropli w ruchu w wirze w czasie  $t$  [ $1/a$ ]

Trajektorja kropli widoczna jest na rysunku 5.3.1. Początkowo oddala się ona od osi wiru, jednak po przekroczeniu największej odległości od wiru jej ruch radialny staje się znacznie mniejszy a dominuje ruch wokół osi wiru. Z przedstawionych rysunków (5.3.2 i 5.3.3) wynika, że po stosunkowo krótkim czasie krople wchodzą na orbitę stacjonarną. Czas po którym to następuje wynosi około jeden turnover-time wiru (dla  $r=1$ ).



**Rysunek 5.3.2** Prędkość radialna (górny wykres) i prędkość kątowna (dolny rysunek) kropli



**Rysunek 5.3.3** Odległość kropli od osi wiru (wykres górny) i całkowita prędkość kropli (wykres dolny)

Prędkość radialna kropli podlega oscylacjom o amplitudzie wykładniczo gasnącej z czasem.

Kropelka uzyskuje początkowo dużą prędkość kątową, która z czasem szybko zanika, dążąc do wartości stałej wynikającej ze wzoru 5.3.13

Podobnie jak w przypadku wiru punktowego drugie wzoru 5.3.5 daje się łatwo scałkować i po podstawieniu do pierwszego równania otrzymujemy równanie na składową radialną.

$$\ddot{r} + a\dot{r} = \frac{L^2}{r^3} - a\frac{\gamma}{2}r \quad (5.3.18)$$

gdzie L opisywane jest wzorem 5.1.19

Ropatrujemy sytuację asymptotyczną dla dużych czasów wówczas możemy pominąć pierwszy czynnik z lewej strony. Prowadzi to do równania różniczkowego pierwszego rzędu:

$$a\dot{r} = \frac{L^2}{r^3} - a\frac{\gamma}{2}r \quad (5.3.19)$$

$$\frac{1}{4} \frac{dr^4}{dt} = \frac{L^2}{a} - \frac{\gamma}{2}r^4 \quad (5.3.20)$$

Zamieniamy kolejno zmienne  $x=r^4$

$$\frac{dx}{dt} = 4\frac{L^2}{a} - 2\gamma x \quad (5.3.21)$$

$$\text{gdzie: } L = \frac{\Gamma}{2\pi}[1 - \exp(-at)] \quad (5.3.22)$$

$$\text{Rozwiązujemy najpierw równanie jednorodne } \frac{dx}{dt} = -2\gamma x \quad (5.3.23)$$

co prowadzi do równania:

$$x(t) = C \exp(-2\gamma t) \quad (5.3.24)$$

Równanie niejednorodne obliczamy przy pomocy metody uzmienniania stałej C. Prowadzi to do równania różniczkowego na zmienną C(t).

$$\frac{dC}{dt} = 4\frac{L^2}{a} \exp(2\gamma t)[1 - 2\exp(-at) + \exp(-2at)] \quad (5.3.25)$$

$$C(t) - C_0 = 4\frac{L_w^2}{a} \int dt [\exp(2\gamma t) - 2\exp(t(2\gamma - a)) + \exp(2t(\gamma - a))] \quad (5.3.26)$$

$$C(t) - C_0 = 4\frac{L_w^2}{a} \left[ \frac{\exp(2\gamma t)}{2\gamma} - \frac{2\exp(t(2\gamma - a))}{2\gamma - a} + \frac{\exp(2t(\gamma - a))}{2(\gamma - a)} \right] \quad (5.3.27)$$

Wracając do starych zmiennych mamy:

$$r(t) = \sqrt[4]{r_0^4 \exp(-2\gamma t) + 4 \frac{L_w^2}{a} \left[ \frac{1 - \exp(-2\gamma t)}{2\gamma} + \frac{2(\exp(-2\gamma t) - \exp(-ta))}{2\gamma - a} + \frac{\exp(-2ta) - \exp(-2\gamma t)}{2(\gamma - a)} \right]}$$

(5.3.28)

W przypadku granicznym możemy pominąć czynniki wykładnicze i otrzymujemy znany już wynik na orbitę stacjonarną:

$$r(t) = \sqrt[4]{\frac{2L_w}{a\gamma}}$$

(5.3.29)

Zależność odległości kropli od wiru ma zbliżoną postać do tej dla ruchu kropli w wirze punktowym. Wyrażenie pod pierwiastkiem jest sumą członów wykładniczych, które zmniejszają się z czasem. Szybkość tych zmian jest tym większa im mniejsza jest kropla i większy spływ powietrza do środka wiru. Jak łatwo przekonać się ze wzoru 5.3.28, odległość kropelki podlega oscylacjom wokół położenia równowagi.

## 5.4 Ruch kropli w pobliżu wiru punktowego rozciąganego w kierunku poziomym.

Rozważmy przypadek ruchu pojedynczej kropli w obszarze wiru punktowego zorientowanego nie pionowo lecz poziomo do siły grawitacji. Podobnie jak poprzednio ruch kropli rozpatrywać będziemy w układzie cylindrycznym, lecz tym razem oś symetrii ustawiona jest poziomo. Interesujący z punktu widzenia analizy gęstości kropeł jest ich ruch w płaszczyźnie pionowej. W tym przypadku symetria ruchu jest zakłócona poprzez siłę grawitacji. Wskutek tego kropelki nie będą obsadzały orbity kołowej. Równania ruchu kropli mają tym razem postać:

$$m\ddot{\vec{r}} = am(\vec{v}_a - \dot{\vec{r}}) - mg \sin \varphi \vec{e}_r - mg \cos \varphi \vec{e}_\varphi \quad (5.4.1)$$

Modyfikacji uległ człon pochodzący od siły grawitacji, który tym razem będzie wpływał na ruch radialny i azymutalny kropli. Po rozpisaniu na współrzędne otrzymujemy układ trzech równań różniczkowych:

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = a\left(-\frac{\gamma}{2}r - \dot{r}\right) - g \sin \varphi \\ 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = a\left(\frac{\Gamma}{2\pi r} - r\dot{\varphi}\right) - g \cos \varphi \\ \ddot{z} = a(\gamma z - \dot{z}) \end{cases} \quad (5.4.2)$$

W rozważanym przypadku nie można bezpośrednio scałkować drugiego równania przez co pierwsze i drugie równanie nie separuje się. W dalszej analizie przyjmujemy, że  $\dot{z} = 0$ . Dokonujemy zamiany zmiennych dla pierwszych dwóch równań w analogiczny sposób jak dla wiru punktowego co prowadzi do układu równań:

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{L_1}{2}r - \dot{r} - L_2 \sin \varphi \\ 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = \frac{1}{r} - r\dot{\varphi} - L_2 \cos \varphi \end{cases} \quad (5.4.3)$$

$$\text{gdzie; } L_1 = \frac{\gamma}{a}, \text{ zaś} \quad (5.4.4)$$

$$L_2 = \frac{g}{a^2} \sqrt{\frac{2\pi a}{\Gamma}} \quad (5.4.5)$$

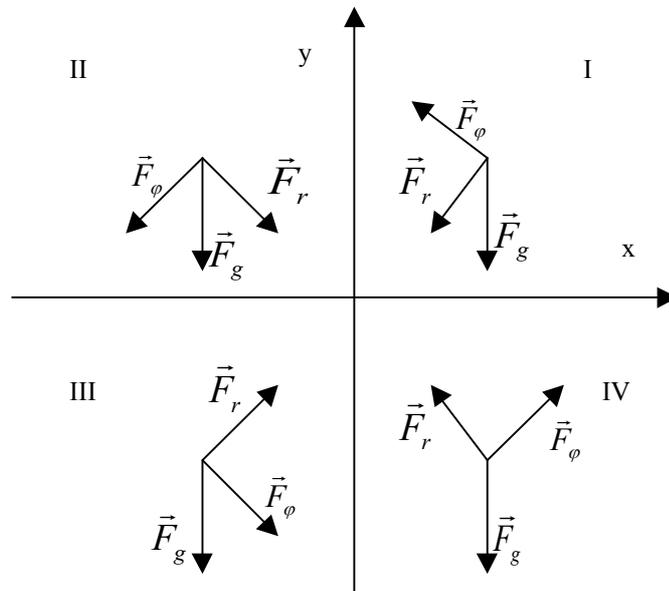
Równania ruchu zależą od dwóch bezwymiarowych liczb ( $L_1$ ,  $L_2$ ), które zależą od wielkości kropli, cyrkulacji wiru, przyspieszenia grawitacyjnego oraz parametru rozciągania. Nowy parametr ( $L_2$ ) charakteryzujący ruch w analizowanym przypadku ma łatwą interpretację fizyczną. Wykorzystując wzór na skale długości w wirze pionowym (wzór 5.1.35), oraz wzór określający prędkość graniczną do której dąży kropla opadając w nieruchomym powietrzu (terminal velocity wzór 5.1.11) otrzymujemy:

$$L_2 = \frac{v_t}{V} \quad (5.4.6)$$

gdzie:  $V$  jest charakterystyczną skalą prędkości w ruchu kropli w wirze pionowym, zaś  $v_t$  jest prędkością graniczną (terminal velocity).

Zatem parametr ten jest stosunkiem prędkości granicznej kropli do prędkości charakteryzującej ruch kropli w wirze pionowym.

Rozpatrujemy siły działające na kropelkę w tej płaszczyźnie. Są to: siła grawitacji skierowana pionowo w dół, dwie siły Stokesa, jedna skierowana radialnie do środka wiru, a druga azymutalnie zgodnie z kierunkiem ruchu wiru. Rozpatrujemy cztery położenia kropli w każdej ćwiartce układu współrzędnych. Jedynie w ćwiartce IV możliwa jest równowaga sił działających na kropelkę w płaszczyźnie prostopadłej do osi wiru. W pozostałych przypadkach zrównoważenie sił jest niemożliwe z przyczyn czysto geometrycznych. Rozważany był przypadek dodatniej cyrkulacji wiru punktowego. Stan równowagi kropli może nie istnieć np. gdy siła grawitacji jest zbyt mała aby zrównoważyć siły aerodynamiczne. Wówczas kropla porusza się do góry i po dotarciu do I części układu współrzędnych wypadkowa siła spowoduje zakręcanie ruchu w lewo. Podobnie w II części układu nastąpi ruch ku dołowi itd. Wnioskujemy stąd, że możliwy będzie ruch po krzywych zamkniętych. Łatwo przekonać się, że wystąpi on dla małych kropli oraz przy dostatecznie dużym stretchingu. Obliczmy położenie równowagi kropli w płaszczyźnie pionowej, w tym przypadku wszystkie pochodne po czasie znikają. Dostajemy w zatem układ równań algebraicznych.



**Rysunek 5.4.1** Siły działające na kropelkę w spoczynku:  $\vec{F}_g$  -siła grawitacji,  $\vec{F}_r$  -siła stokesowska pochodząca od stretchingu,  $\vec{F}_\varphi$  -siła stokesowska pochodząca od ruchu wirowego powietrza.

$$\begin{cases} -\frac{L_1}{2} r = L_2 \sin \varphi \\ a \frac{1}{r} = L_2 \cos \varphi \end{cases} \quad (5.4.7)$$

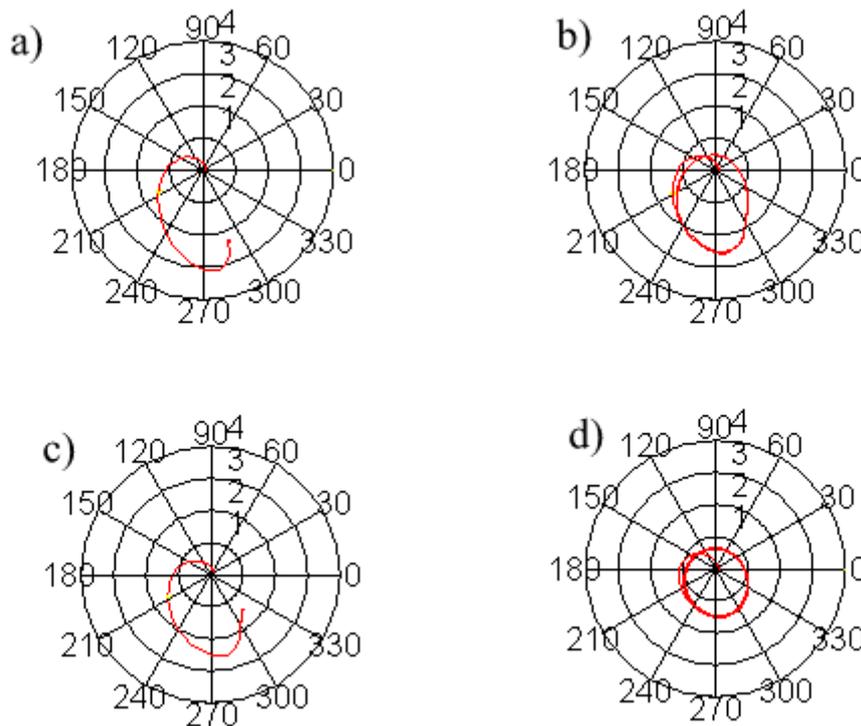
Stąd otrzymujemy położenie równowagi

$$\begin{cases} r = \frac{\sqrt{2}L_2}{L_1} \sqrt{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2}} \\ \varphi = -\arcsin \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2}} \right] \end{cases} \quad (5.4.8)$$

Położenia równowagi istnieją jeśli spełniony jest warunek:

$$\frac{L_1}{L_2} \geq 1 \quad (5.4.9)$$

co prowadzi do nierówności:  $\frac{\gamma \Gamma a^2}{2\pi g^2} \geq 1 \quad (5.4.10)$



**Rysunek 5.4.2** Trajektorie kropli wokół wiru w zależności od parametru  $L_1/L_2^2$ , a)  $L_1/L_2^2 = 0.8$ ,  
b)  $L_1/L_2^2 = 1.004$ , c)  $L_1/L_2^2 = 1$ , d)  $L_1/L_2^2 = 2$

Warunek ten wyraża zależność pomiędzy parametrami wiru i kropli dla których mamy równowagę sił. Wyrażenie z lewej strony nierówności 5.4.10 jest odwrotnie proporcjonalne do  $R^{-4}$ . Krople, dla których spełniona jest ta nierówność zdążają do osiągnięcia punktu równowagowego. Jest to punkt równowagi trwałej, ponieważ ciała z niej wytracone będzie poddawane sile spychającej je do położenia wyjściowego. Przy ustalonych parametrach wiru

istnieją krople o masie poniżej krytycznej, dla których siła grawitacji będzie zbyt mała aby zrównoważyć pozostałe siły działające na nią i w rezultacie kropelka będzie poruszała się wokół wiru. Gdy promień kropelki będzie zbliżał się do wartości krytycznej wówczas jej położenie stacjonarne będzie miało współrzędne:

$$(r, \varphi) = \left( \frac{\sqrt{2}}{\gamma} \frac{L_2}{L_1}, \frac{7}{4} \pi \right) \quad (5.4.11)$$

Dla kropeł dużych współrzędna radialna położenia równowagowego stawać się będzie coraz większa, jednocześnie odchylenie je od pionowej osi  $y$  stawać się będzie coraz mniejsze. Wynika stąd, że krople o największe będą skupiały się w pobliżu osi  $y$ , zaś coraz mniejsze z dala od niej osiągając maksymalne odchylenie od niej dla masy krytycznej. Tory kropeł w zależności od czynnika  $L_1 / L_2^2$  przedstawione są na rysunku 5.4.2. Dla dużych kropeł ich trajektoria zmierza do punktu równowagi ( $L_1 / L_2^2 < 1$ ), zaś dla małych mamy cykl graniczny ( $L_1 / L_2^2 > 1$ ).

## 6 Ewolucja czasowa pola gęstości kropeł chmurowych w wirze punktowym.

### 6.1 Gęstość kropeł w obecności pionowego wiru punktowego.

Rozpatrzmy ewolucję jednorodnego pola kropeł w obecności pojedynczego pionowego wiru punktowego. Interesować nas będzie modyfikacja początkowego rozkładu kropełek. Na początek rozważmy przypadek kropeł o jednakowych masach. Stosujemy do opisu ruchu identyczne wzory jak w przypadku ruchu jednej kropli. Opisujemy ruch w płaszczyźnie poziomej, prostopadłej do osi wiru. Rozważania rozpoczniemy od przypadku asymptotycznego ( $t \gg 1$ ) i obliczymy jak zmienia się odległość pomiędzy dwiema dowolnymi kroplami znajdującymi się w chwili początkowej w odległości  $r_{01}$  oraz  $r_{02}$  od centrum wiru Korzystając ze wzoru 5.1.29 mamy.

$$\Delta r = r_1 - r_2 = \sqrt[4]{r_{01}^4 + \frac{4L_w^2}{a}t} - \sqrt[4]{r_{02}^4 + \frac{4L_w^2}{a}t} \quad (6.1.1)$$

Rozwijamy wyrażenia pod pierwiastkiem i tak dla pierwszego składnika mamy

$$r_1 = \sqrt[4]{\frac{4L_w^2 t}{a}} \sqrt[4]{1 + \frac{r_{01}^4 a}{4L_w^2 t}} \quad (6.1.2)$$

Ponieważ dla dużych czasów zachodzi relacja:

$$\frac{r_{01}^4 a}{4L_w^2 t} \ll 1 \quad (6.1.3)$$

zatem możemy dokonać rozwinięcia wg wzoru

$$\sqrt[4]{1+x} = 1 + \frac{1}{4}x \quad \text{Dla } x \ll 1 \quad (6.1.4)$$

$$r_1 = \sqrt[4]{\frac{4L_w^2 t}{a}} \left( 1 + \frac{r_{01}^4 a}{16L_w^2 t} \right) \quad (6.1.5)$$

Postępując analogicznie dla  $r_2$  otrzymujemy:

$$\Delta r = \sqrt[4]{\frac{4L_w^2 t}{a}} \frac{a}{16L_w^2 t} (r_{01}^4 - r_{02}^4) \quad (6.1.6)$$

stąd

$$\Delta r \propto t^{-3/4} \quad (6.1.7)$$

Ze wzoru 6.1.7 wynika, że odległość pomiędzy kroplami będzie z czasem dążyć do zera. Zmniejszanie się odległości pomiędzy kroplami nie musi oznaczać, że gęstość kropeł będzie rosła, ponieważ krople oddalając się od centrum zajmują coraz większą powierzchnię. Element powierzchni w układzie biegunowym ma postać:

$$dS = r d\phi dr \quad (6.1.8)$$

zaś dla symetrii obrotowej mamy:  $\Delta S = 2\pi r dr$  (6.1.9)

W związku z tym zmiana powierzchni zajmowanej przez krople wynosi:

$$\Delta S \propto 2\pi r t^{-3/4} \quad (6.1.10)$$

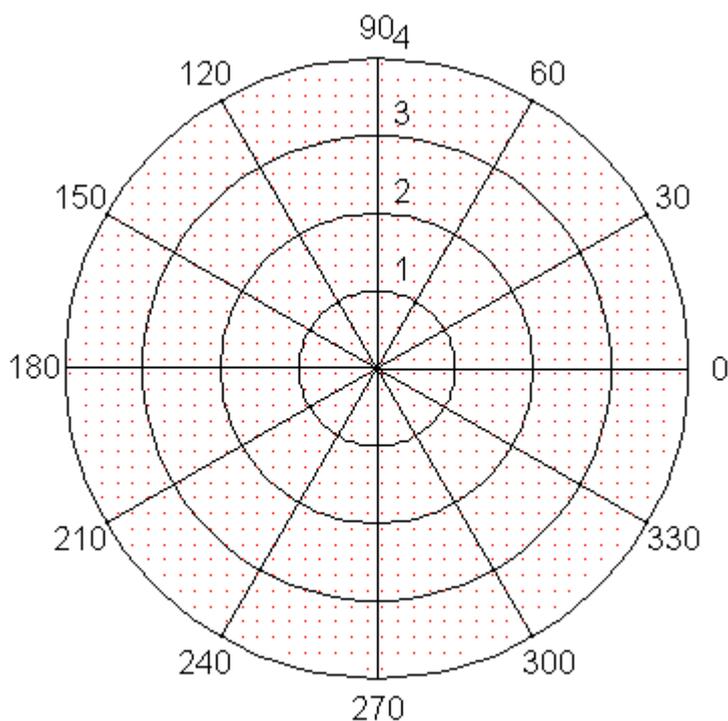
Uwzględniając, że kropla oddala się wg zależności  $r = t^{1/4}$  otrzymujemy:

$$\Delta S \propto t^{-1/2} \quad (6.1.11)$$

Prowadzi do zależność wg której zmienia się gęstość kropli  $\rho \propto \sqrt{t}$  (6.1.12)

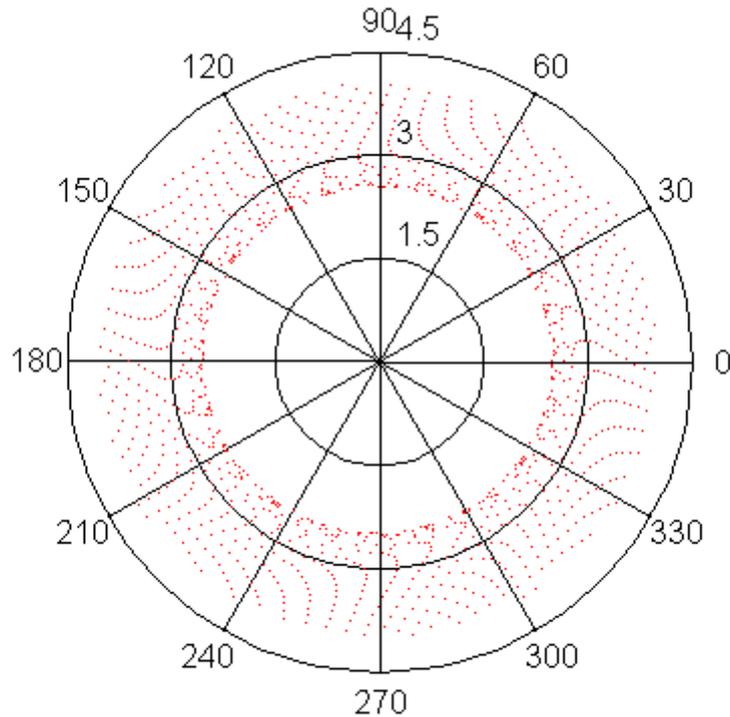
Zatem gęstość kropeł będzie rosła wolno z czasem. Jest to wynik uzyskany dla dużych czasów, dla początkowych chwil czasu zagęszczanie kropeł może nie mieć miejsca. W celu przeanalizowania tej sytuacji niezbędne są obliczenia numeryczne.

Do symulacji ruchu kropeł przyjęto jednorodny rozkład kropeł o jednakowych



**Rysunek 6.1.1** Początkowy rozkład kropeł użyty do symulacji numerycznej

masach. Krople w początkowym momencie spoczywały. Położenia początkowe pokazano na rysunku 6.1.1. Wynik obliczeń przedstawiony jest na rysunku 6.1.2 wynika z niego, że krople zostały wyrzucone z najbliższego otoczenia wiru.

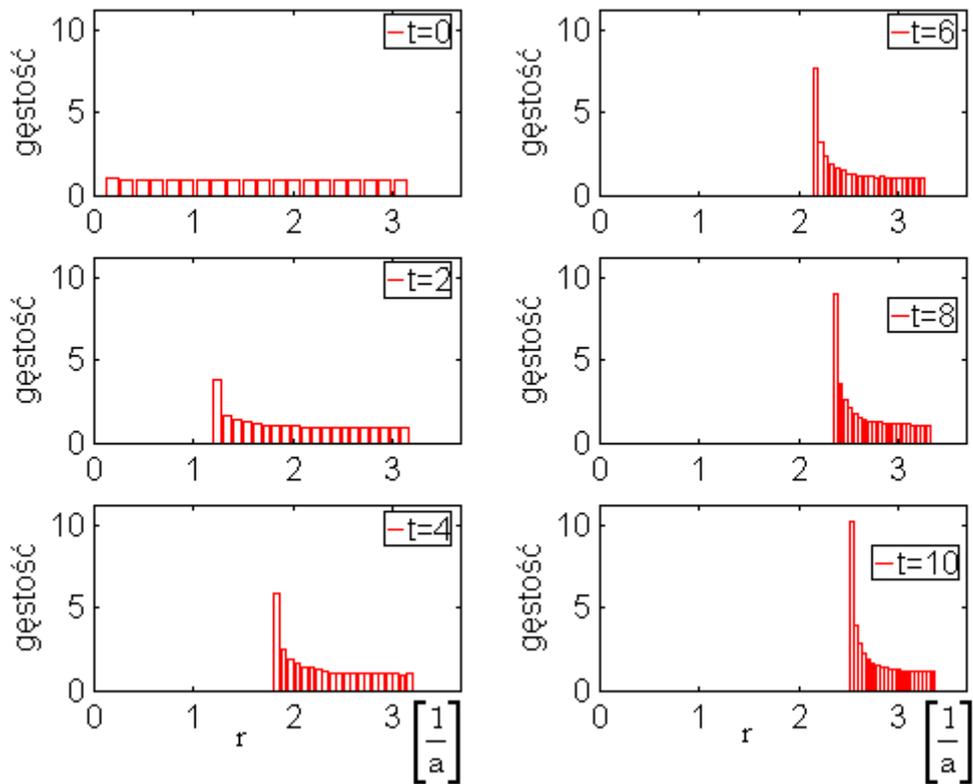


**Rysunek 6.1.2** Rozkład kropelek po czasie jednego „turnover time” (w odległości  $r=1.5$ )

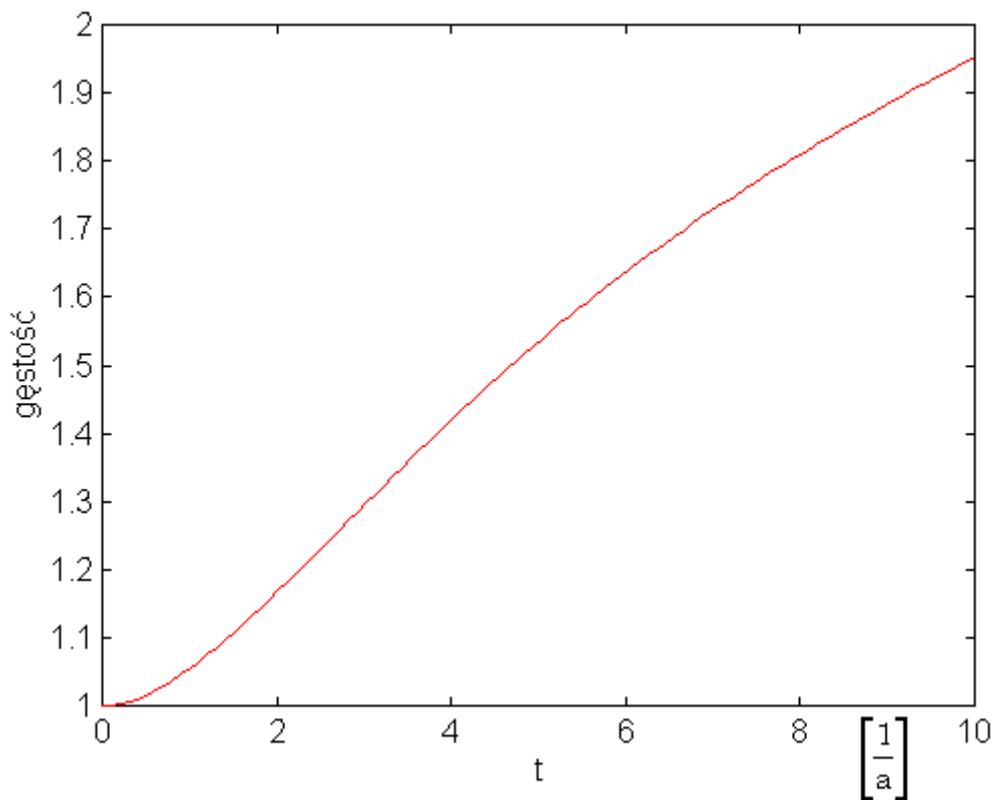
Krople, które znajdowały się z dala od centrum wiru przemieściły się nieznacznie. W skutek tego krople skupiły się w pierścieniu tak, że ich największa gęstość występuje od strony wewnętrznej pierścienia. Dokładny rozkład gęstości kropelek w zależności od odległości od środka wiru przedstawiony jest na rysunku 6.1.3. Największe zagęszczenie obserwujemy na brzegu oddalającego się pierścienia kropelek. Następnie gęstość szybko maleje z odległością od wiru. Jak wynika z rysunku 6.1.3 gęstość kropelek na końcu symulacji w obszarze maksimum jest 10-krotnie większa niż wartość początkowa. Również średnia gęstość kropelek w obszarze przez nie zajmowanym stale wzrasta (rysunek 6.1.4). Początkowo wzrost ten jest powolny, po czym staje się linowy.

Z przedstawionych wyników wynika, że krople w obszarze wiru punktowego będą miały tendencje do tworzenia struktur o symetrii obrotowej w obrębie których mamy lokalny wzrost koncentracji kropli.

Na koniec obliczeń numerycznych warto przedstawić wyniki dla kropelek o różnych promieniach. Widmo kropelek użyte do obliczeń ma postać funkcji Gaussa centrowanej na promieniu kropli  $R=10\mu\text{m}$  (rys. 6.1.5). Położenia kropelek zostały wygenerowane losowo, tak aby gęstość ich była stała w rozważanym obszarze. W przypadku kropelek o różnych rozmiarach rozkład gęstości kropelek jest skomplikowany. Mamy tu nałożenie się poszczególnych rozkładów gęstości na siebie. Prowadzi to do dużego zróżnicowania koncentracji kropelek w zależności od szerokości widma początkowego kropelek.



Rysunek 6.1.3 Rozkład gęstości powierzchniowej kropelek w zależności od odległości od osi wiru dla jednakowych kropelek



Rysunek 6.1.4 Średnia gęstość kropelek w obszarze przez nie zajmowanym.

Wyniki obliczeń dla widma kropeł przedstawione są na rysunku 6.1.6. Wynika z niego, że koncentracja kropeł jest w tym przypadku mniejsza niż w sytuacji, gdy rozważamy ruch jednakowych kropeł. Gęstość kropeł w obszarze maksimum jest przeszło dwa razy większa od wartości początkowej. Tym razem obliczenia były wykonane dla okresu czasu 5-krotnie dłuższego niż w poprzednio. Z przedstawionych danych wynika, że w przypadku kropeł o zróżnicowanych rozmiarach koncentracja kropeł jest dużo mniejsza niż w przypadku ruchu jednakowych kropeł. Poszerzenie widma prowadzi do mniejszego wzrostu gęstości. Ponadto, w wąskich widmach krople będą koncentrować się w cienkim pierścieniu, gdzie gęstość będzie kilkukrotnie większa niż w otoczeniu.

W celu przeanalizowania rozkładu przestrzennego gęstości kropełek zbadajmy ruch ośrodka ciągłego w pobliżu pionowego wiru punktowego. Rozwiązujemy równanie ciągłości w płaszczyźnie prostopadłej do osi wiru, przez gęstość będziemy rozumieli liczbę kropełek na jednostkę powierzchni. Równanie ciągłości ma postać:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (6.1.13)$$

Ze względu na symetrię obrotową gęstość powierzchniowa ośrodka nie będzie zależeć od zmiennej azymutalnej i równanie ciągłości w układzie biegunowym ma postać

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} (r \rho v_r) = 0 \quad (6.1.14)$$

gdzie  $v_r$  - jest prędkością radialną kropli.

Dalszą analizę przeprowadzimy dla dostatecznie dużych czasów, gdy daje się stosować przybliżenie asymptotyczne. Współrzędna radialna położenia kropeł w zmiennych zredukowanych ma postać:

$$r = r(r_0, t) = \sqrt[4]{r_0^4 + 8[\exp(-t) - 1] - 2[\exp(-2t) - 1] + 4t} \quad (6.1.15)$$

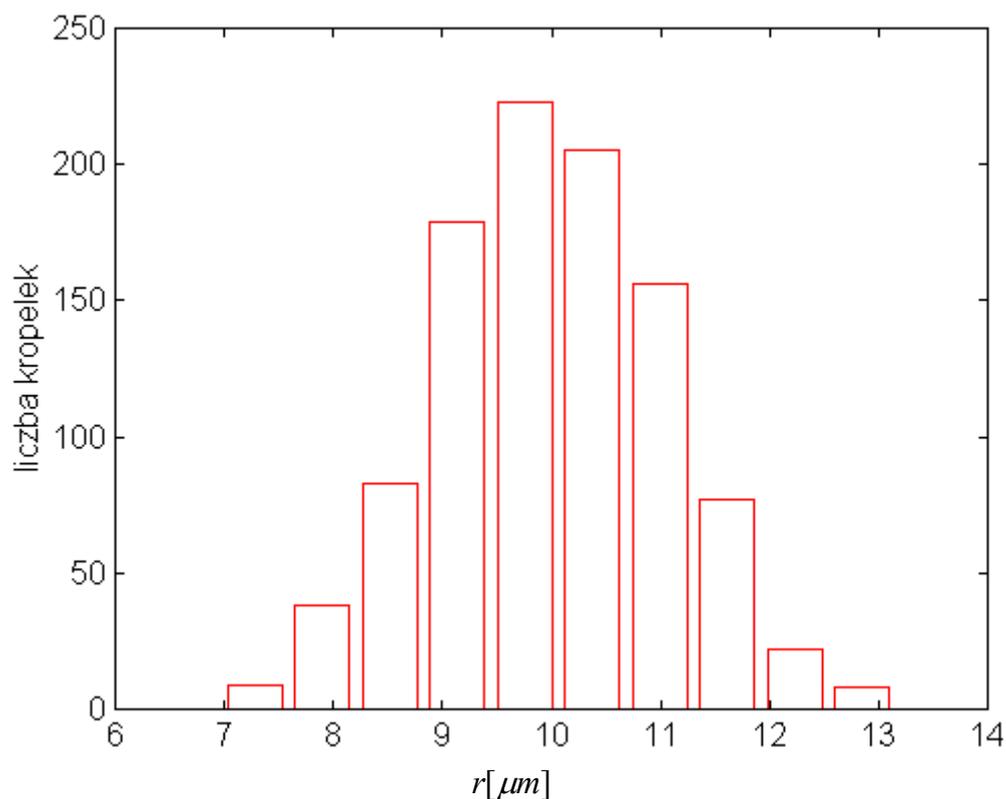
Prędkość radialną uzyskujemy po zróżniczkowaniu powyższego wyrażenia po czasie co prowadzi do wzoru:

$$v_r = \frac{-2 \exp(-t) + \exp(-2t) + 1}{\sqrt[4]{r_0^4 + 8[\exp(-t) - 1] - 2[\exp(-2t) - 1] + 4t}} \quad (6.1.16)$$

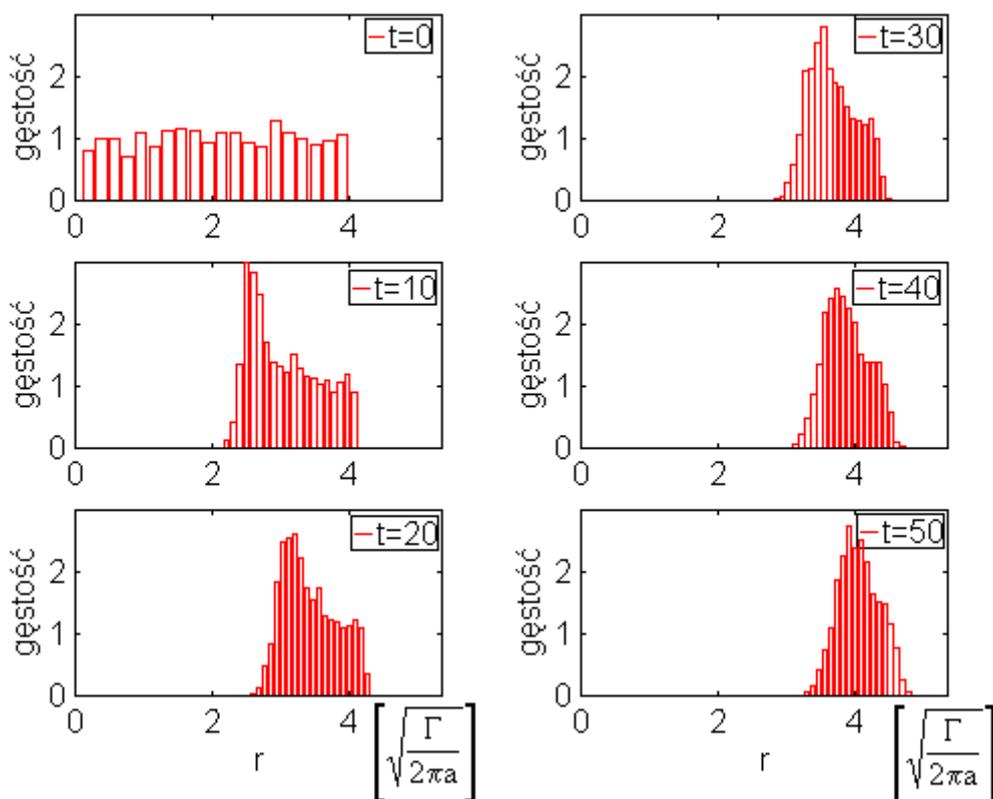
Prędkość jest więc funkcją położenia początkowego i czasu (opis Lagrange'a). Możemy łatwo przejść do opisu polowego i wówczas prędkość wyraża się wzorem:

$$v_r = \frac{-2 \exp(-t) + \exp(-2t) + 1}{r^3} \quad (6.1.17)$$

$$\text{przy czym } r \in [r(r_{0_{\min}}, t), r(r_{0_{\max}}, t)]. \quad (6.1.18)$$



**Rysunek 6.1.5** Losowo wygenerowane widmo początkowe kropelek

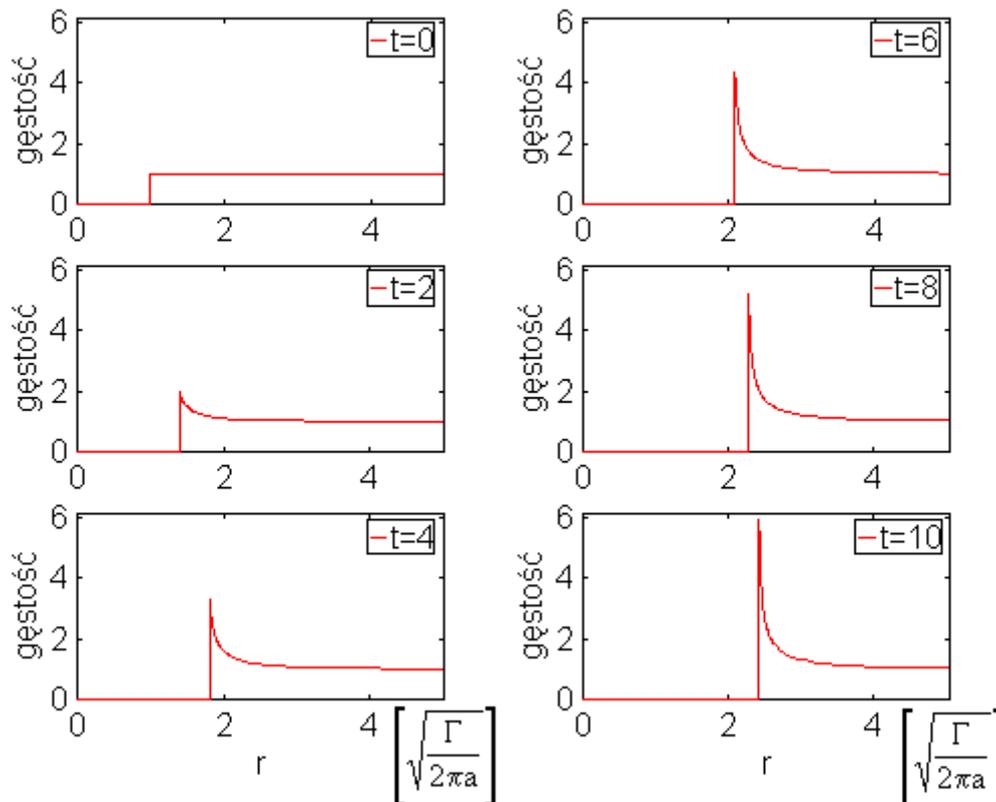


**Rysunek 6.1.6.** Ewolucja koncentracji kropelek na jednostkę powierzchni w przypadku widma kropelek.

Warunek ten uwzględnia fakt, że ośrodek ciągły nie wypełnia w chwili początkowej całej przestrzeni oraz nie wypływa z punktu  $r=0$ .

Łatwo zauważyć, że rozwiązaniem równania ciągłości z warunkiem początkowych postaci  $\rho(r, t=0) = \rho_0 = \text{const.}$  jest funkcja:

$$\rho(r, t) = \rho_0 \frac{r^2}{\sqrt{r^4 - 8[\exp(-t) - 1] + 2[\exp(-2t)] - 4t}} \quad (6.1.19)$$



**Rysunek 6.1.7** Ewolucja czasowa gęstości powierzchniowej kroplek uzyskana na podstawie przybliżonego wzoru 6.1.19. Całkowity czas ruchu kroplek wynosił  $t=10[1/a]$  co w przybliżeniu odpowiada 1.6 „turnover-time” dla ( $r=1$ )

Dla dużych czasów czynniki wykładnicze można pominąć i wzór upraszcza się do postaci:

$$\rho(r, t) = \rho_0 \frac{r^2}{\sqrt{r^4 - 4t}} = \rho_0 \sqrt{1 + \frac{4t}{r^4 - 4t}} \quad (6.1.20)$$

$$\text{lub } \rho(r_0, t) = \rho_0 \frac{\sqrt{r_0^4 + 4t + 6}}{r_0^2} \quad (6.1.21)$$

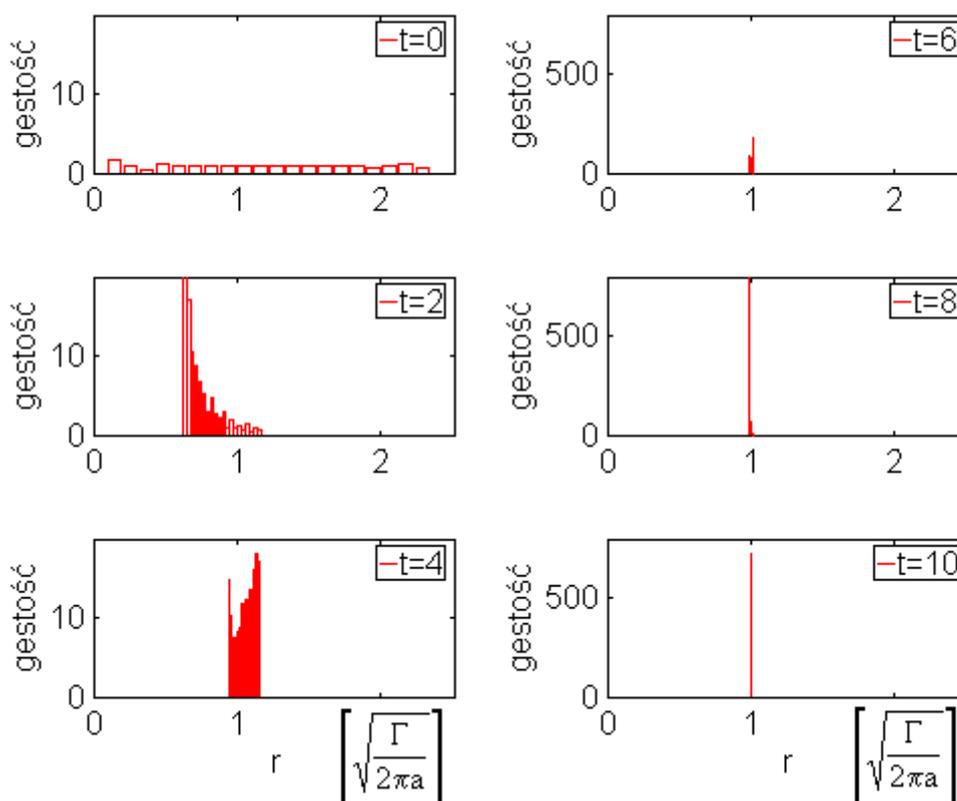
Otrzymaliśmy analogiczny wzór co przy badaniu odległości pomiędzy kroplami, wynika z niego że:  $\rho \propto \sqrt{t}$ . Ze wzoru 6.1.20 wynika, że gęstość maleje szybko wraz z odległością od osi wiru dążąc do wartości początkowej  $\rho_0$ . Wzór 6.1.20 ma osobliwość dla  $r = \sqrt[4]{4t}$ .

Oznacza to, że  $r_0 = 0$  czyli w chwili początkowej ośrodek ciągły musiał znajdować się też w punkcie  $r=0$ . Jest to zrozumiałe, ponieważ w tym punkcie prędkość wiru ma osobliwość. Gdy jednak w chwili początkowej ośrodek zaczyna się w pewnej odległości od osi wiru wówczas problem ten znika. Gęstość osiąga maksimum w punkcie, gdzie po czasie  $t$  dotarł ośrodek, który w chwili startu był najbliżej osi wiru ( $r_{o_{min}}$ ). Wartość tego maksimum jest tym większa im bliżej centrum wiru znajdował się początkowo rozważany ośrodek oraz im dłużej trwał ruch kropeł.

Na rysunku 6.1.7 przedstawiony jest rozkład gęstości krople po czasie  $t=10$  [1/a] co w przybliżeniu odpowiada  $T_{ov} = 1.5$  (dla  $r=1$ ). Wynika z niego, że na granicy ośrodka mamy silne wąskie maksimum, które widoczne było na rysunku 6.1.3. Przesuwa się ono początkowo szybko a następnie wolniej w stronę większych odległości od wiru. Przy tym gęstość kropeł rośnie, tak że na końcu tego okresu czasu przekracza 6-krotnie wartość początkową.

## 6.2 Gęstość kropelek wokół wiru punkowego rozciąganego w kierunku pionowym.

Przejdźmy do opisu przypadku z uwzględnieniem stretchingu. Interesować nas będzie zmiana koncentracji kropelek w czasie ich ruchu wokół pionowego wiru punkowego. Jeśli krople będą miały te same rozmiary wówczas na podstawie przeprowadzonej wcześniej analizy w rozdziale 5.3 wiemy, że będą one poruszały się wokół na promieniu stacjonarnym. W związku z tym kropelki będą zagęszczaly się na pierścieniu o coraz mniejszej szerokości. Symulację ruchu kropelek wykonano dla jednorodnego rozkładu początkowego kropelek w układzie biegunowych (rys. 6.1.1). Gęstość ich będzie szybko rosła co widać na wykresach średniej gęstości kropelek (rys.6.2.1). Wynika z nich, że w chwili  $t=2$  [1/a] gęstość kropelek przekracza kilkakrotnie wartość początkową. Później np. w  $t=6$  [1/a] gęstość przekracza 300-krotnie wartość wyjściową. Stwierdzamy ponadto, że gęstość podlega oscylacjom wywołanym ruchem kropelek wokół ich położenia równowagi.

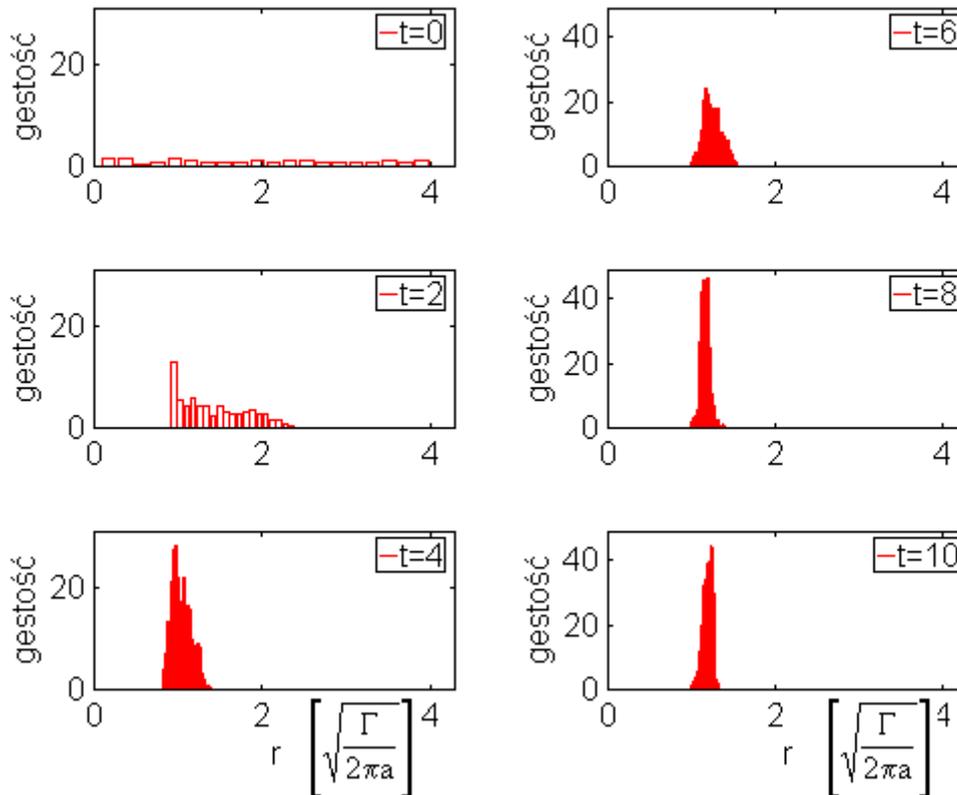


**Rysunek 6.2.1** Ewolucja gęstości powierzchniowej jednakowych kropelek o jednorodnym rozkładzie początkowym. Wykres przedstawia unormowaną (do chwili początkowej) gęstość kropelek w zależności od odległości od wiru w różnych momentach czasu. Całkowity czas symulacji wynosił  $t=10$  [1/a], co odpowiada 1.5 turnover time (dla  $r=1$ )

Przestrzenny rozkład gęstości w zależności od odległości od osi wiru pokazany jest na rysunku 6.2.1. Wynika z niego, że gęstość szybko się zmienia a obszar maksymalnego zagęszczenia kropelek przesuwa się to w jedną, to w drugą stronę. Po czasie jednego obrotu wiru gęstość krople jest kilkadziesiąt razy większa od wartości początkowej. W dalszych chwilach czasu gęstość rośnie jeszcze szybciej co uwarunkowane jest wchodzeniem kropelek na orbitę stacjonarną.

Obliczenia numeryczne wykonano również dla kropelek o różnych rozmiarach przyjmując gaussowskie widmo (rys. 6.1.5) centrowane na kroplach o promieniu  $r=10$   $\mu\text{m}$ .

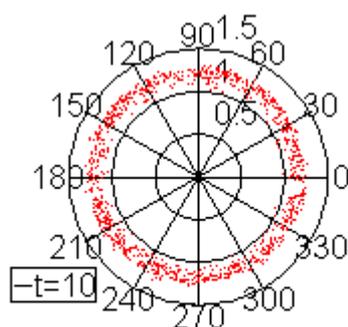
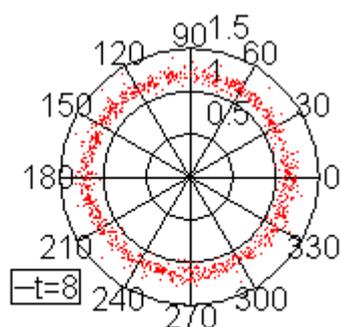
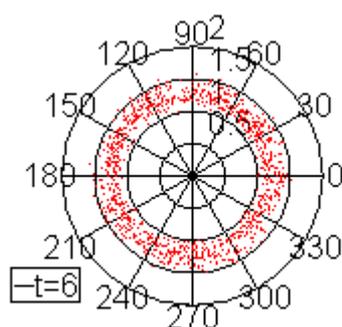
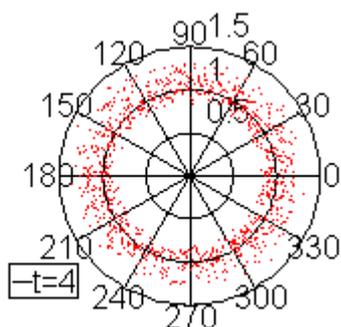
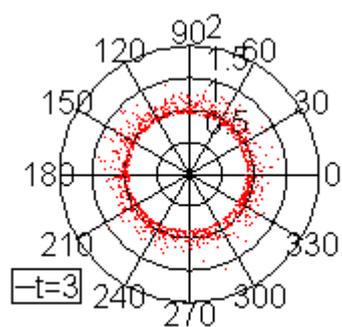
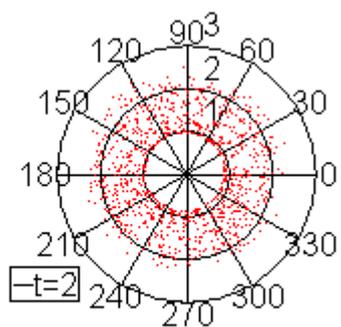
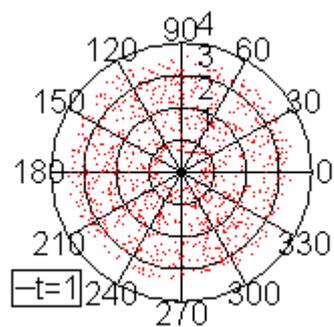
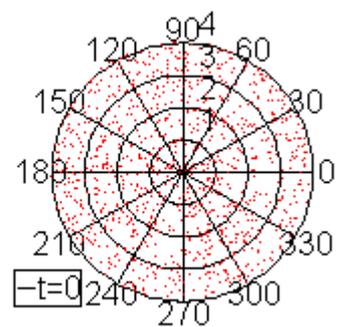
Tym razem krople będą miały różne orbity stacjonarne a zatem będą rozmyte na pewnym obszarze przestrzennym. Wyniki obliczeń dla gaussowskiego widma kropeł przedstawione są na rysunkach 6.2.2 i 6.2.3. Zauważmy, że tym razem gęstość osiąga pod koniec symulacji mniejszą wartość niż w przypadku poprzednim. Krople znajdują się w obszarze pierścienia, którego rozmiary z czasem stają się praktycznie stałe. Na początku ruchu wzrost gęstości jest podobny jak w przypadku gdy mamy tylko krople o tym samym rozmiarze. Z centralnej części wiru krople są wyrzucane, zaś z zewnętrznych krańców zapadają się do środka wiru.



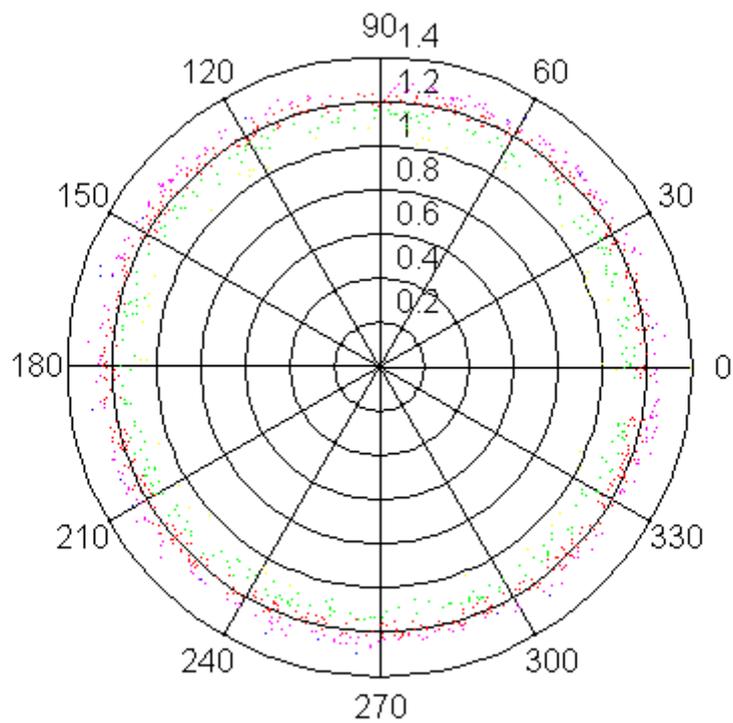
**Rysunek 6.2.2** Ewolucja gęstości widma kropeł (rysunek 6.1.5) o jednorodnym rozkładzie początkowym. Wykres przedstawia unormowaną (do chwili początkowej) gęstość kropeł w zależności od odległości od wiru w różnych momentach czasu. Całkowity czas symulacji wynosił  $t=10$  [1/a], co odpowiada 1.5 „turnover time” (dla  $r=1$ )

Na podstawie przedstawionych wyników stwierdzamy, że ruch kropeł w obszarze pionowego wiru ze stretchingiem prowadzi do intensywnego wzrostu powierzchniowej koncentracji kropeł. Istnienie promienia stacjonarnego sprawia, że krople są rozsortowane wg rozmiarów. Proces ten odbywa się szybko, bo po zaledwie kilku obrotach wiru mamy stan, który mało zmienia się w czasie. Sortowanie kropełek widoczne jest dobrze na rysunku 6.2.4, gdzie krople największe (kolor niebieski i fioletowy) znajdują się na zewnętrznej stronie pierścienia. Małe krople (kolor żółty i zielony) znajdują się od strony wewnętrznej wiru.

Rozciąganie wiru punktowego prowadzi zatem do rozdziału kropeł pod względem ich wielkości. W płaszczyźnie prostopadłej do wiru zwiększa się koncentracja kropełek. Kropełki poruszają się również wzdłuż osi wiru co określa wzór 5.3.11. Oddalają się one od płaszczyzny  $z=0$  wykładniczo z czasem. Wynika stąd, że odległość pomiędzy kropełkami nawet o tych samych rozmiarach będzie rosła z czasem, przy czym początkowo wzrost ten będzie dość powolny. Wnioskujemy z tego, że na początku ruchu kropeł oprócz wzrostu gęstości w płaszczyźnie prostopadłej do wiru, nastąpi wzrost koncentracji przestrzennej kropeł.



Rysunek 6.2.3 Rozkład kropeł na płaszczyźnie w różnych chwilach czasu dla kropeł o rozkładzie gaussowskim



**Rysunek 6.2.4** Końcowe położenie kropelek w płaszczyźnie prostopadłej do wiru po czasie odpowiadającym 1.5 obrotom wiru w odległości  $r=1$ . Kolorem żółtym i zielonym przedstawione są najmniejsze krople, czerwonym krople średnie, zaś niebieskim i fioletowym krople największe.

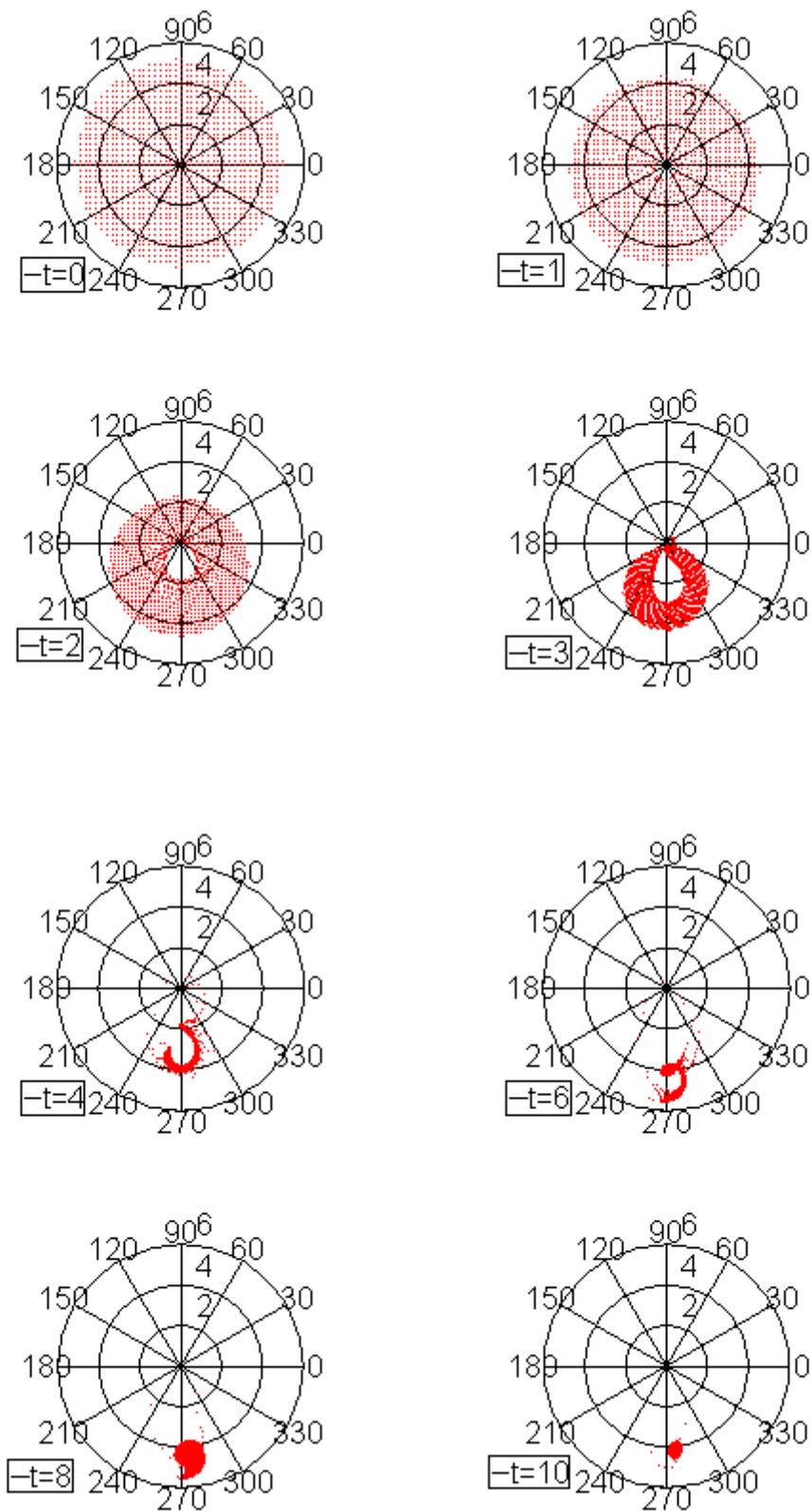
### **6.3 Gęstość kropeł wokół wiru punktowego rozciąganego w kierunku poziomym.**

Przedstawiamy tutaj symulacje kropeł o jednakowych promieniach i jednorodnym rozkładzie w płaszczyźnie pionowej. Symulacje przeprowadzono dla 1000 kropli spoczywających w chwili startu. Wyniki przedstawiono w postaci położenia kropeł w układzie biegunowym w kolejnych chwilach czasu (rysunek 6.3.1). Początkowo symetria osiowa jest zachowana, zauważamy jedynie że krople uległy zagęszczeniu do środka wiru z niewielkim przemieszczeniem w dół. W kolejnych momentach utrzymuje się tendencja kropeł do ruchu w kierunku do środka wiru przy jednoczesnym opadaniu. Kropelki z centralnego obszaru zostają wyrzucone. Następnie symetria obszaru zajmowanego przez krople zostaje zaburzona i pierścień zajmowany przez krople zostaje przerwany. Jednocześnie obszar ulega szybkiemu zmniejszaniu. Pod koniec ruchu krople przestają opadać i tworzą charakterystyczne struktury. Przedstawiony powyżej opis ruchu kropeł obowiązuje dla mas kropeł większych od wartości krytycznej. Dla mniejszych kropeł lub dla silniejszego rozciągania wiru, jak to było wcześniej wspomniane, kropelki nie będą posiadały położenia równowagi. W związku z tym będą one skupiały się na powierzchniach zamkniętych zlokalizowanych wokół centrum wiru.

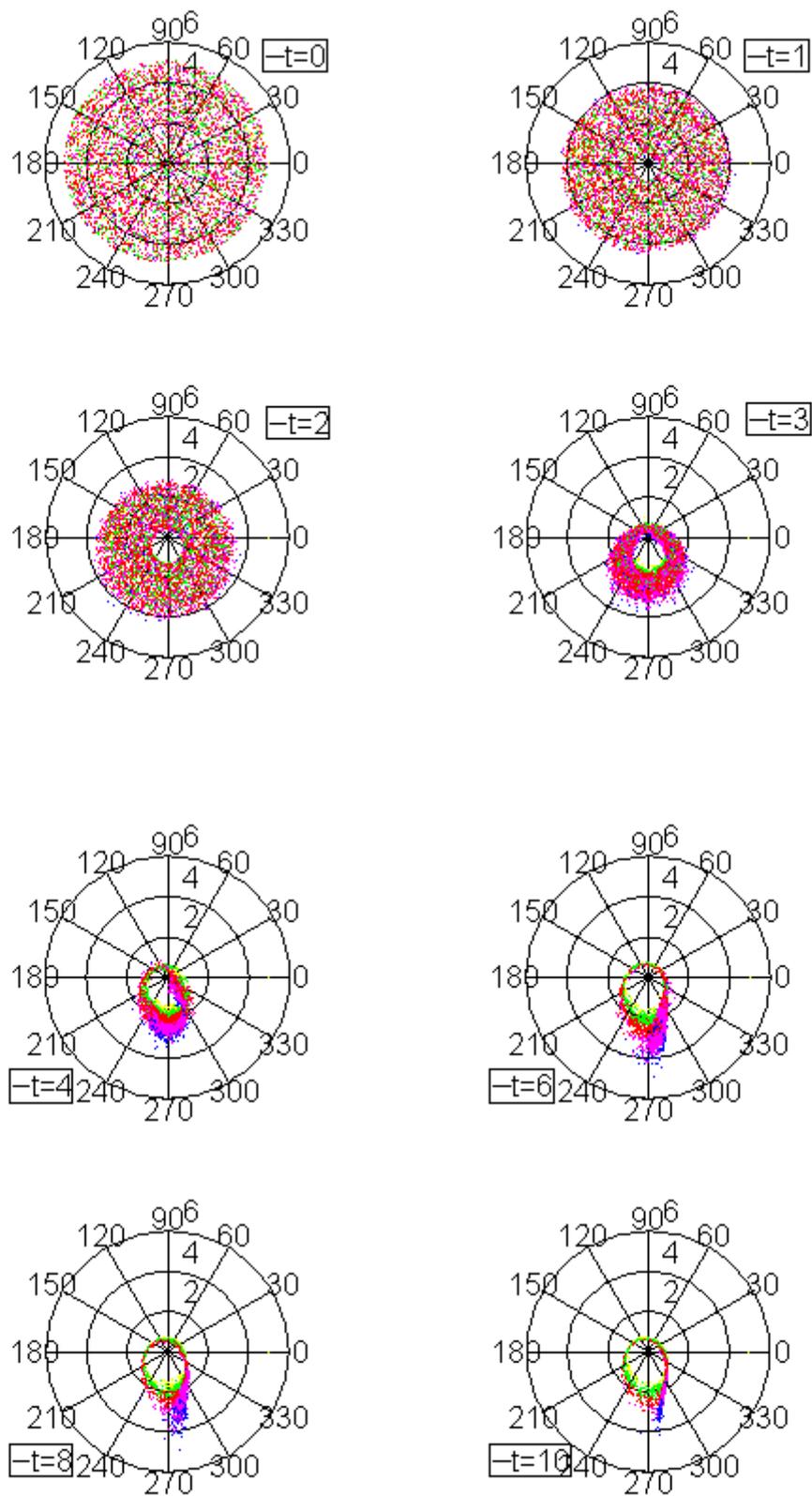
Na podstawie przedstawionych danych dochodzimy do wniosku, że gęstość kropeł rośnie lokalnie w pewnych miejscach zaś w innych istotnie się zmniejsza. Wynika stąd, że sedymentacja istotnie modyfikuje rozkład przestrzenny kropeł w obszarach znajdujących się w pobliżu wirów powietrza.

Przeanalizujmy teraz przypadek ruchu kropeł o różnych rozmiarach przyjmując do obliczeń numerycznych rozkład gaussowski kropełek przedstawiony na rysunku 6.1.5. W tym przypadku część kropeł posiada położenie równowagi stałej, zaś poruszają się po orbicie stanowiącej cykl graniczny. Wyniki obliczeń przedstawione są na rysunku 6.3.1 Tym razem symulowano krople o rozkładzie losowym, przy czym rozkład ten był jednorodny. Podobnie jak w przypadku kropeł o jednakowych rozmiarach początkowo obszar zajmowany przez nie ulega zapadaniu do środka wiru przy jednoczesnym wyrzucaniu kropeł z obszaru bliskiego osi wiru. Kropelki systematycznie opadają i po czasie  $t=3$ , obszar zajmowany przez nie straci symetrię. Widzimy przy tym, że krople największe są wyrzucane poza zewnętrzny brzeg obszaru zajmowanego przez nie. W dalszym ciągu symulacji zauważamy, że zdecydowana większość kropeł znajduje się w IV-tej ćwiartce układu współrzędnych, wynika to z faktu, że w tym obszarze krople mają najmniejszą prędkość zatem ich czas przebywania w tym obszarze jest najdłuższy.

Łatwo zauważyć, że kropelki segregują się wg rozmiarów, tzn. krople najcięższe (kolor niebieski i fioletowy) dla których istnieje położenie równowagi, opadają najniżej zbliżając się do pionowej osi symetrii wiru. Ich prędkość względem siebie dąży do zera, ale względem powietrza jest największa spośród wszystkich kropeł. Mniejsze krople znajdują się ponad kroplami dużymi i są rozmyte na nieco większym obszarze. Najmniejsze krople są skupione na pierścieniu wokół wiru i wykonują cykl graniczny. Rysunek 6.3.3 przedstawia końcowe położenie kropeł, obraz ten nie ulega już dalszym zmianom. Krople największe, dla których występuje położenie równowagi ułożone są na jednej linii, przecinającej się z osią pionową układu. Powyższe wykresy pokazują dobitnie, że w wirze w którym oprócz stretchingu występuje sedymentacja kropeł dochodzi do separacji kropeł według ich rozmiarów. Sytuacja wygląda w ten sposób, że krople, które początkowo zajmują obszar trójwymiarowy po krótkim czasie, rzędu kilku obrotów wiru, znajdują się na prostej (jednowymiarowej) równoległej do osi wiru. Kroplą o różnych rozmiarach odpowiadają różne proste. Jak wynika z obliczeń, ruch w kierunku osi wiru odbywa się z przyspieszeniem zależnym od wielkości kropelki. Zatem może okazać się, że pomimo dużego wzrostu gęstości

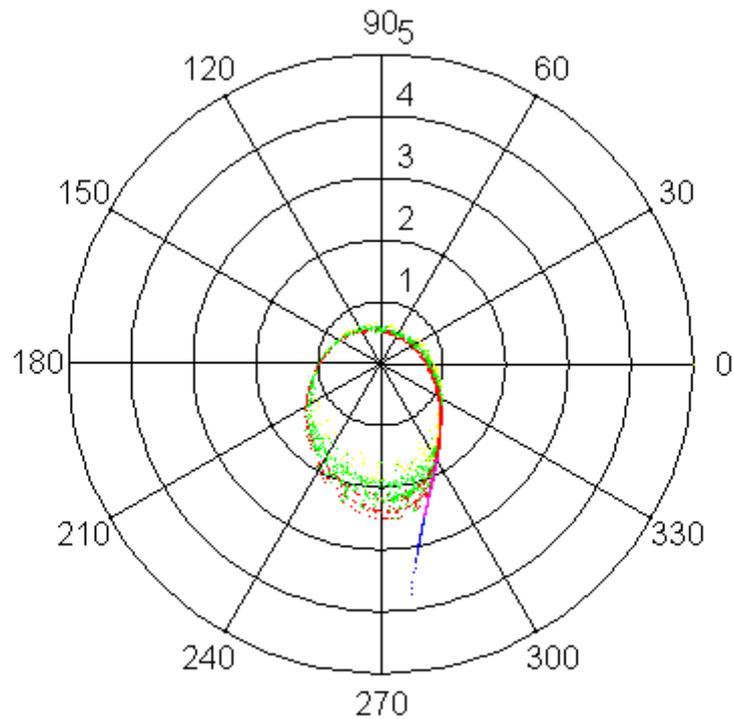


**Rysunek 6.3.1** Rozkład jednakowych kropek w płaszczyźnie pionowej w różnych momentach czasu



**Rysunek 6.3.2** Położenie w płaszczyźnie pionowej kropelek o gaussowskim rozkładzie widmowym w różnych chwilach czasu. Kolorem żółtym i zielonym zaznaczono krople mniejsze, czerwonym średnie, zaś niebieskim i fioletowym krople największe.

**Rysunek 6.3.3** Końcówce w płaszczyźnie pionowej położenie kropeł o gaussowskim rozkładzie widmowym.



Kolorem żółtym i zielonym zaznaczono krople mniejsze, czerwonym średnie, zaś niebieskim i fioletowym krople największe. Całkowity czas ruchu wynosi  $t=50$  co odpowiada 2.5 obrotom wiru w odległości  $r=2$  od osi wiru.

w płaszczyźnie prostopadłej do osi wiru może on nie wystąpić w przestrzeni trójwymiarowej. W celu uzyskania odpowiedzi na to pytanie konieczne są dalsze obliczenia, których w tej pracy nie przeprowadzono.

## 7. Ruch kropli w wirze Burgersa.

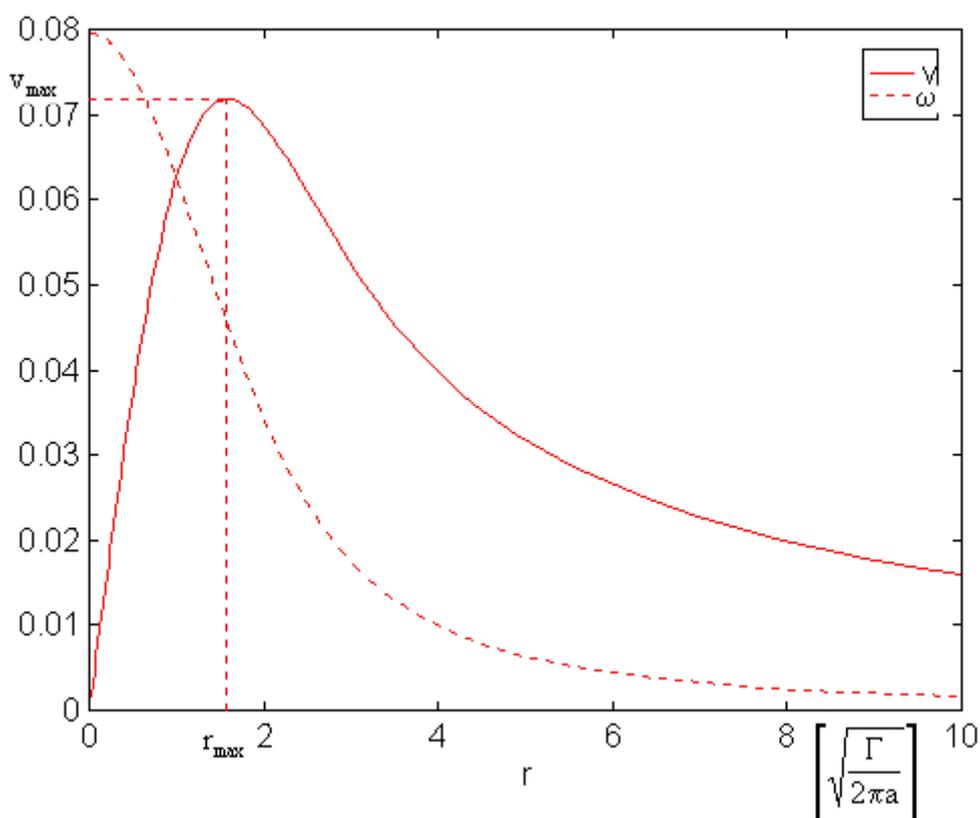
Przechodzimy obecnie do analizy ruchu kropli w wirze o ciągłym rozkładzie wirowości będącym uogólnieniem wiru o stałej wirowości różnej od zera wewnątrz wiru i równej zero poza wirem. Rozpatrzmy podobne przypadki wirów jak dla wirów Rankine'a, uwzględniając rozciąganie w kierunku pionowym i poziomym.

### 7.1 Ruch kropli w obszarze pionowego wiru Burgersa.

Wirem Burgersa nazywamy ciągły rozkład wirowości w postaci funkcji Gaussa:

$$\zeta(r) = \frac{\Gamma}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \quad (7.1.1)$$

gdzie  $\Gamma$  jest całkowitą cyrkulacją wiru



Rysunek 7.1.1 Profil prędkości azymutalnej i kątovej wiru Burgersa.

Profil prędkości wiru uzyskujemy poprzez scałkowanie wirowości wg wzoru:

$$v_\phi = \frac{1}{r} \int_0^r r' \zeta(r') dr' \quad (7.1.2)$$

czyli:

$$v_{\varphi} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \right] \quad (7.1.3)$$

Dla małych wartości  $r$  wyrażenie w nawiasie można rozwinąć w szereg, w wyniku czego otrzymujemy:

$$v_{\varphi} = \frac{\Gamma}{4\pi\sigma^2} r \quad (7.1.4)$$

Profil prędkości wiru dla małych odległości od centrum wiru jest więc profilem Rankine'a. Dla dużych  $r$  drugi wyraz w nawiasie wzoru 7.1.3 można pominąć zatem:

$$v_{\varphi} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (7.1.5)$$

Oznacza to, że prędkość daleko od maksimum funkcji Gaussa jest taka jak od wiru punktowego. Zależność prędkości wiru od odległości jest przedstawiona na rysunku 7.1.1. Jak widać funkcja ta osiąga maksimum, którego położenie zależy od szerokości rozmycia wirowości. Położenie tego maksimum można wyznaczyć numerycznie i wynosi ono  $r_{\max} = 1.5852\sigma$ , a odpowiadająca mu wartość maksymalna prędkości wynosi:

$$v_{\max} = \frac{0.4513\Gamma}{2\pi\sigma} \quad (7.1.6)$$

Prędkość kątowna wiru podobnie jak wirowość, osiąga maksimum dla  $r=0$  i wartość jej wynosi:

$$\omega_{\max} = \frac{\Gamma}{4\pi} \quad (7.1.7)$$

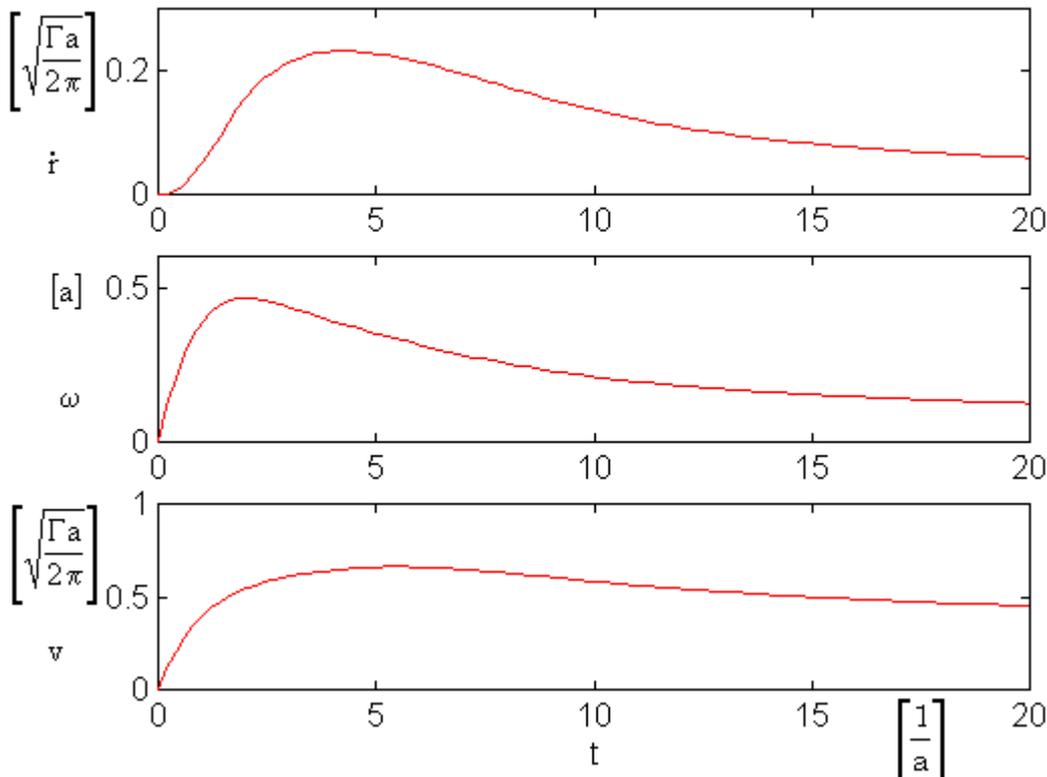
Wielkość ta zmniejsza się szybciej z odległością od centrum wiru niż prędkość liniowa. W związku z tym prędkość kątowna kropli szybko zbliża się do prędkości kątowej wiru. Równania ruchu kropli w wirze Burgersa w płaszczyźnie poziomej przyjmują postać:

$$\begin{cases} \ddot{r} + a\dot{r} = r\dot{\varphi}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = \frac{\Gamma a}{2\pi r} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \right] - a r \dot{\varphi} \end{cases} \quad (7.1.8)$$

Geometria wiru narzuca nam skalę przestrzenną, jest nią szerokość wiru  $S = \sigma$ . Za skalę czasową podobnie jak we wcześniejszych rozważaniach przyjęto czas relaksacji kropli do otoczenia  $T = 1/a_0$ . W zmiennych bezwymiarowych równania ruchu są następujące:

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = -\dot{r} \\ 2t\dot{\phi} + r\ddot{\phi} = L_3 \frac{1}{r} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) \right] - r\dot{\phi} \end{cases} \quad (7.1.9)$$

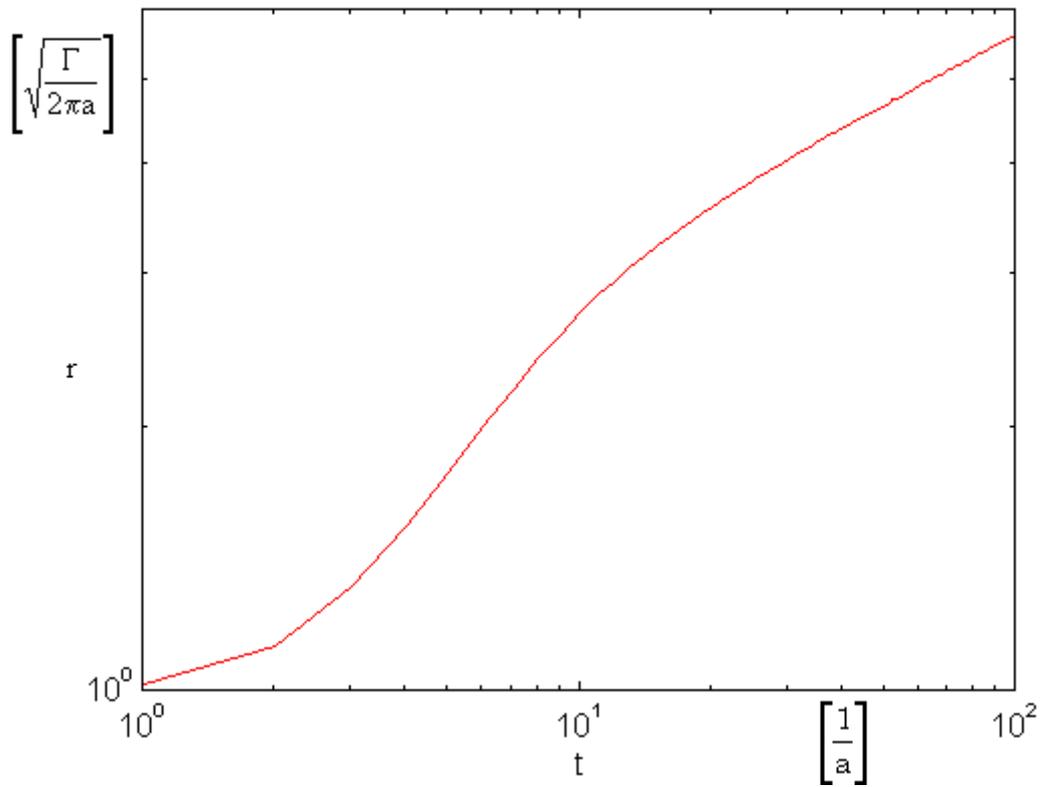
gdzie:  $L_3 = \frac{\Gamma}{2\pi\sigma^2 a}$



**Rysunek 7.1.2** Prędkość radialna (górnny wykres), kątowna (środkowy wykres) oraz prędkość całkowita kropki w czasie ruchu w wirze Burgersa.

Równia ruchu zależą od jednej bezwymiarowej liczby ( $L_3$ ), która wyrażona jest przez kwadrat ilorazu drogi, na której następuje relaksacja do szerokości wiru  $\sigma$ . Rozwiązanie równań dla dużych czasów jest identyczne jak w przypadku wiru punktowego oznacza to, że położenie radialne kropki opisywane jest zależnością potęgową  $r(t) \propto t^{1/4}$

We wcześniejszych chwilach czasu kropka będzie znajdować się bliżej centrum wiru i podlegać będzie większemu przyspieszeniu. Zgodnie z wcześniejszymi obliczeniami wirowość blisko osi wiru jest w przybliżeniu stała a zatem oddalanie kropki jest w początkowej fazie wykładnicze z czasem (podobnie jak w przypadku wiru Rankine'a). Dokładne informacje o ruchu można uzyskać na podstawie obliczeń numerycznych. Z przedstawionych wykresów wynika, że kropelka bardzo szybko nabiera prędkości kątownej, która już po niespełna  $t=2$  [ $1/a$ ] osiąga wartość maksymalną, a następnie wolno zmniejsza się z czasem. Prędkość radialna rośnie wolniej, bo maksimum osiąga po  $t=5$  [ $1/a$ ]. Podobnie całkowita prędkość kropki, która po starcie szybko narasta, osiąga maksimum i kolejno wolno zanika. Odległość kropelki od osi wiru początkowo zwiększa się w przybliżeniu liniowo, a następnie szybkość oddalania znacznie zmniejsza się. nieustannym ruchu.



**Rysunek 7.1.3** Odległość kropli od osi wiru w funkcji czasu.

## 7.2 Ruch kropli w obszarze wiru Burgersa rozciąganego w kierunku pionowym.

Przechodzimy teraz do badania ruchu kropli w wirze Burgersa z uwzględnieniem rozciągania. Początkowo rozpatrzmy problem wiry zorientowanego pionowo. Równania ruchu w płaszczyźnie poziomej mają postać:

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = a\left(-\frac{\gamma}{2}r - \dot{r}\right) \\ 2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} = a\frac{\Gamma}{2\pi r}\left(1 - \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)\right) - ar\dot{\phi} \end{cases} \quad (7.2.1)$$

zaś w zmiennych bezwymiarowych

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = -L_1\frac{r}{2} - \dot{r} \\ 2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} = L_3\frac{1}{r}\left(1 - \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)\right) - r\dot{\phi} \end{cases} \quad (7.2.2)$$

gdzie:

$$L_1 = \frac{\gamma}{a}, \quad (7.2.3)$$

$$L_3 = \frac{\Gamma}{2\pi\sigma^2 a} \quad (7.2.4)$$

Równania ruchu w postaci bezwymiarowej zależą od dwóch liczb ( $L_1$ ,  $L_3$ ), które są określone poprzez rozmiar kropli, cyrkulacje, szerokość wiru oraz parametr określający rozciąganie wiru. Podobnie jak przy rozważaniu wiru punktowego oczekujemy, że krople będą skupiały się na okręgu o ściśle określonym promieniu. Następuje to wskutek równoważenia siły odśrodkowej kropli oraz siły aerodynamicznego oporu skierowanej radialnie do osi wiru. Warunek równowagi ma postać:

$$\begin{cases} r\dot{\phi}^2 = L_1\frac{r}{2} \\ L_3\frac{1}{r}\left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)\right] = r\dot{\phi} \end{cases} \quad (7.2.5)$$

Rozwiązanie tego układu równań prowadzi do przestępnego równania na promień orbity:

$$\frac{r^2}{L_3}\sqrt{\frac{L_1}{2}} = 1 - \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) \quad (7.2.6)$$

Ze względu na to, że prędkość wiru w jego środku maleje do zera a poza nim jest wielkością skończoną, dla pewnych parametrów kropeł i wiru może okazać się, że promień orbity stacjonarnej nie istnieje. Krople w tym przypadku będą zapadać się w kierunku osi wiru. Równanie (7.2.6) można rozwiązać tylko numerycznie, jednak daje się wyznaczyć warunek na istnienie orbity stacjonarnej. Wprowadzamy nową zmienną:

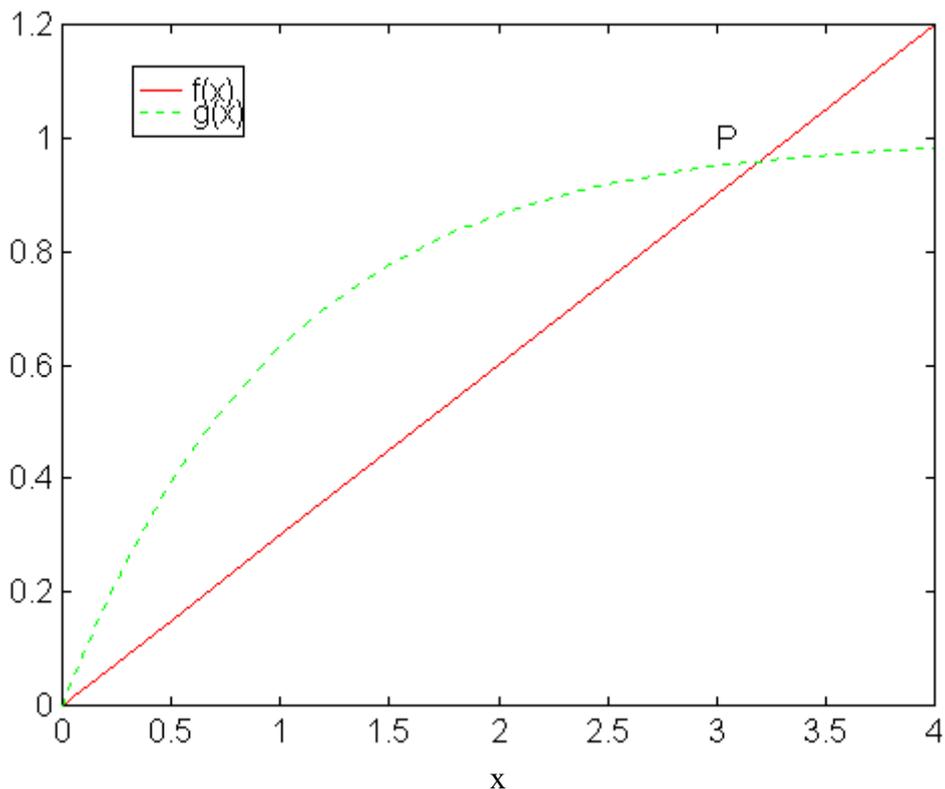
$x = r^2 / 2$  wówczas równanie 7.2.6 przyjmuje postać:

$$x \frac{1}{L_3} \sqrt{\frac{L_1}{2}} = 1 - \exp(-x) \quad (7.2.7)$$

Definiujemy funkcje  $f(x)$  oraz  $g(x)$ :

$$f(x) = \frac{1}{L_3} \sqrt{\frac{L_1}{2}} x \quad (7.2.8)$$

$$g(x) = 1 - \exp(-x) \quad (7.2.9)$$



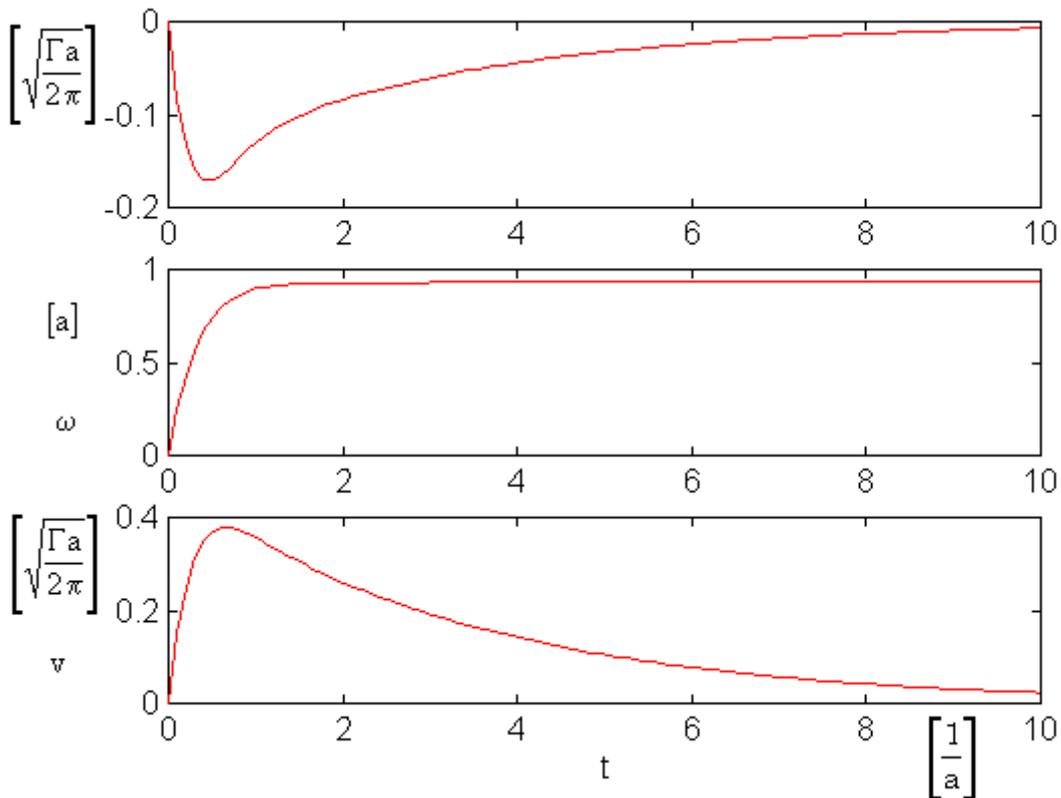
**Rysunek 7.2.1** Przebieg zmienności funkcji  $f(x)$  i  $g(x)$

Funkcje  $f(x)$  i  $g(x)$  przecinają się w punkcie  $x=0$  oraz w punkcie P pod warunkiem, że pochodna funkcji  $f(x) < 1$ . Wynika to z faktu, że maksymalna pochodna funkcji  $g(x)$  dla  $x > 0$  jest osiągalna w  $x=0$  i wynosi dokładnie 1. Zatem warunek na przecięcie się obu funkcji a więc istnienie promienia stacjonarnego ma postać:

$$\frac{\sqrt{2L_1}}{L_3} < 1 \quad (7.2.10)$$

Po podstawieniu ze wzoru 7.2.3 i 7.2.4 za odpowiednie liczby bezwymiarowe otrzymujemy:

$$\frac{2\pi\sigma^2}{\Gamma} \sqrt{2a\gamma} < 1 \quad (7.2.11)$$



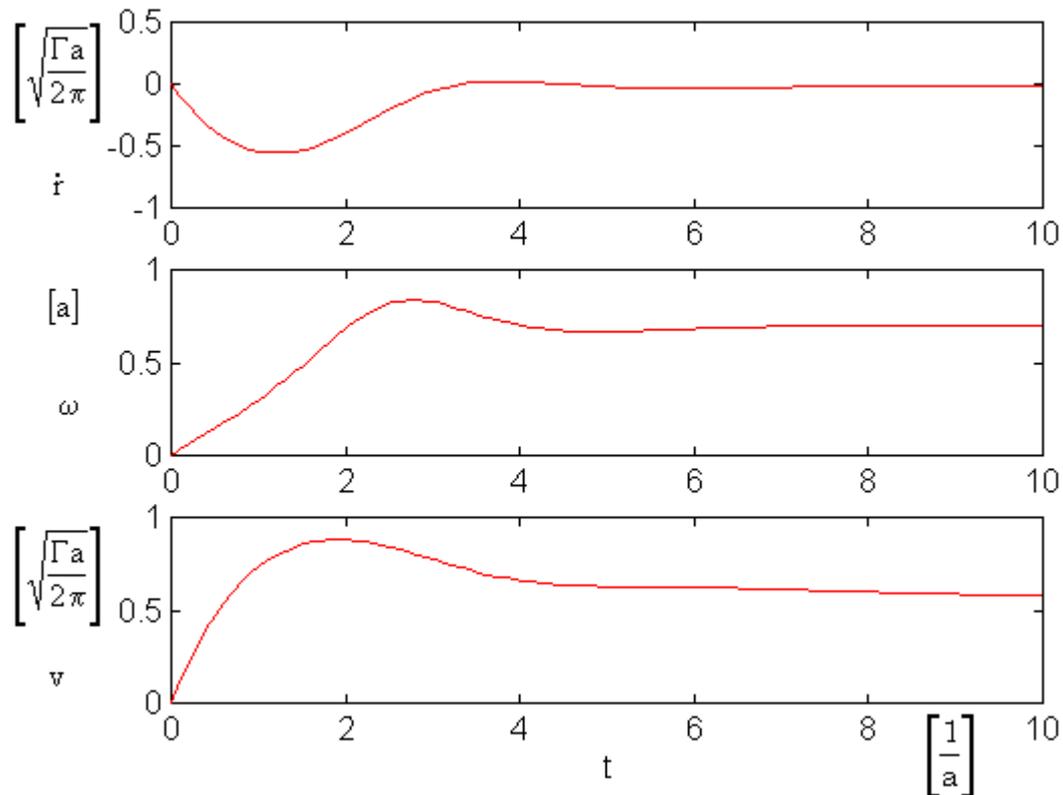
**Rysunek 7.2.2** Prędkość radialna (górny wykres), kątowna (środkowy wykres) oraz prędkość całkowita kropki w czasie ruchu w wirze Burgersa w przypadku gdy kropla zapada się do środka wiru.

Dla ustalonych parametrów wiru tylko krople spełniające nierówność:

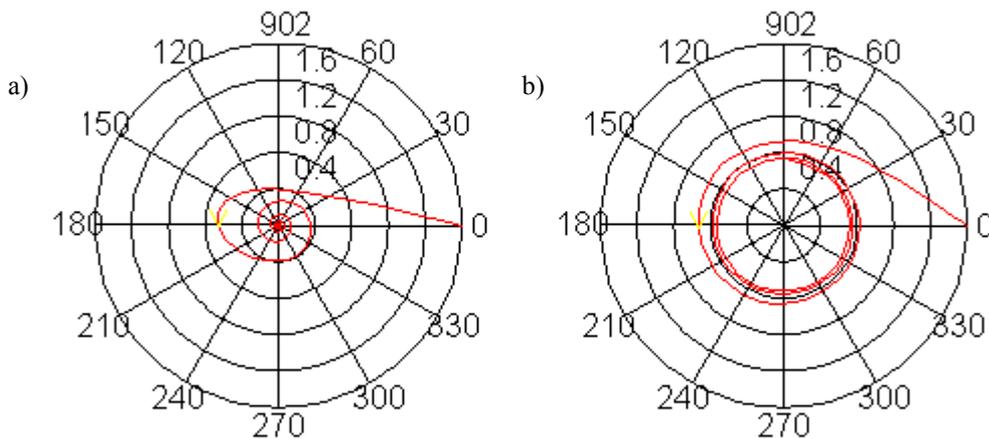
$$R > \frac{6\pi\sigma^2}{\Gamma} \sqrt{\frac{\mu\gamma}{\rho_w}} \quad (7.2.12)$$

będą miały stacjonarną orbitę. Będą podobnie jak w przypadku wiru punktowego wykonywały cykl graniczny. Na rysunku 7.2.2 przedstawione są prędkości kropki w przypadku gdy warunek 7.2.12 nie jest spełniony (promień kropki jest mniejszy od wartości krytycznej). Kropla w tym przypadku zapada się do centrum wiru o czym świadczy ujemna prędkość radialna kropki. Prędkość kątowna dąży szybko do wartości stałej wynika to z faktu, że wirowość wiru blisko jego osi w przybliżeniu jest stała. Całkowita prędkość kropki po osiągnięciu maksimum w wyniku procesu relaksacji dąży do wartości zerowej. Rysunek 7.2.3 przedstawia prędkość w przypadku, gdy posiada ona stacjonarną orbitę (warunek 7.2.12 jest spełniony). W tym przypadku prędkość radialna wykazuje silnie tłumione drgania wokół wartości zerowej. Prędkość kątowna osiąga maksimum dla  $t=3$  [1/a] a później dąży do wartości

stałej. Podobnie całkowita prędkość kropli posiada maksimum a dla dużych czasów dąży do wartości stałej.



**Rysunek 7.2.3** Prędkość radialna (górny wykres), kątowna (środkowy wykres) oraz prędkość całkowita kropli w czasie ruchu w wirze Burgersa w przypadku gdy kropla posiada stacjonarną orbitę.



**Rysunek 7.2.4** Trajektorie kropli w przypadku zapadania się jej do środka wiru (rys. a,  $L_1=2$ ,  $L_3=1.2$ ) oraz gdy kropla posiada stacjonarną orbitę (rys. b,  $L_1=1.5$ ,  $L_3=2$ )

### 7.3 Ruch kropli w obszarze wiru Burgersa rozciąganego w kierunku poziomym.

Rozpatrujemy ruch kropli w obszarze rozciąganego wiru Burgersa, którego oś jest prostopadła do siły grawitacji. W dalszej części będziemy opisywać ruch w płaszczyźnie pionowej. Symetria układu jest w tym przypadku zakłócona przez siłę grawitacji. Bez uwzględniania sedymentacji mieliśmy dwa zasadniczo różne przypadki ruchu, pierwszy kiedy krople po dostatecznie długim czasie znajdowały się na kołowej orbicie, drugi kiedy zapadały się do środka wiru. Przypadek z sedymentacją jest analogiczny do omawianego przy okazji wiru punktowego. Wówczas mieliśmy dwa rodzaje ruchów, pierwszy to cykl graniczny zaś drugi to położenie równowagi trwałej do której zdążają krople. Pierwsza możliwość jest realizowana dla dostatecznie dużego stretchingu. W przypadku wiru Burgersa sytuacja taka może nie mieć miejsca, ponieważ prędkość powietrza maleje od  $r_{\max}$  (punkt maksymalnej prędkości powietrza) do zera a siła grawitacji może okazać się na tyle duża aby obrót kropli wokół wiru był niemożliwy.

Równania ruchu mają w rozważanym przypadku postać:

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = a\left(-\frac{\gamma}{2}r - \dot{r}\right) - g \sin \varphi \\ 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = a\left[\frac{\Gamma}{2\pi r}\left(1 - \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)\right) - r\dot{\varphi}\right] - g \cos \varphi \end{cases} \quad (7.3.1)$$

W zmiennych bezwymiarowych zdefiniowanych w paragrafie 7.1 równanie ruchu przyjmuje postać:

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{L_1}{2}r - \dot{r} - L_2 \sin \varphi \\ 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = L_3 \frac{1}{r}\left(1 - \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)\right) - r\dot{\varphi} - L_2 \cos \varphi \end{cases} \quad (7.3.2)$$

$$\text{gdzie: } L_1 = \frac{\gamma}{a}, \quad L_2 = \frac{g}{a^2} \sqrt{\frac{2\pi a}{\Gamma}}, \quad L_3 = \frac{\Gamma}{2\pi\sigma^2 a} \quad (7.3.3)$$

Powyższy układ równań różniczkowych zależy do trzech bezwymiarowych liczb ( $L_1, L_2, L_3$ ) uwzględniających parametry wiru i kropli. Rozpatrzmy równowagę sił działających na kroplę w płaszczyźnie prostopadłej do osi wiru, które podobnie jak w przypadku wiru punktowego może wystąpić tylko w IV ćwiartce układu współrzędnych (rys. 5.4.1). W tym przypadku układ równań ruchu opisujących równowagę sił działających na kroplę jest następujący:

$$\begin{cases} -\frac{L_1}{2}r = L_2 \sin \varphi \\ \frac{L_3}{r}\left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)\right] = L_2 \cos \varphi \end{cases} \quad (7.3.4)$$

Rozwiązujemy ten układ ze względu na zmienną  $r$ . Po podniesieniu do kwadratu i dodaniu stronami otrzymujemy:

$$L_3^2 = \frac{L_1^2}{4} r^2 + \frac{L_2^2}{r^2} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) \right]^2 \quad (7.3.5)$$

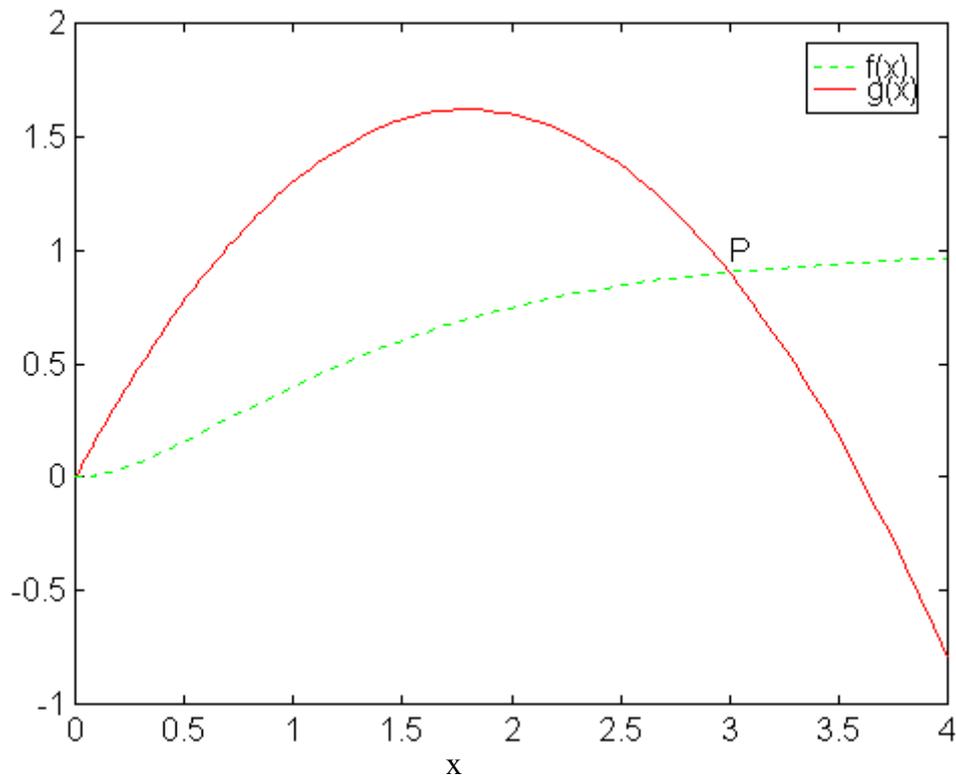
Jest to równanie przestępne i wartość zmiennej  $r$  obliczać musimy numerycznie. Jednak można przeprowadzić dyskusję rozwiązań. Wprowadzając nową zmienną,  $x = r^2 / 2$  i wykonując kilka przekształceń dostajemy równanie:

$$[1 - \exp(-x)]^2 = 2 \left( \frac{L_2}{L_3} \right)^2 x - \left( \frac{L_1}{L_3} \right)^2 x^2 \quad (7.3.6)$$

Oznaczmy funkcje:

$$f(x) = [1 - \exp(-x)]^2 \quad (7.3.7)$$

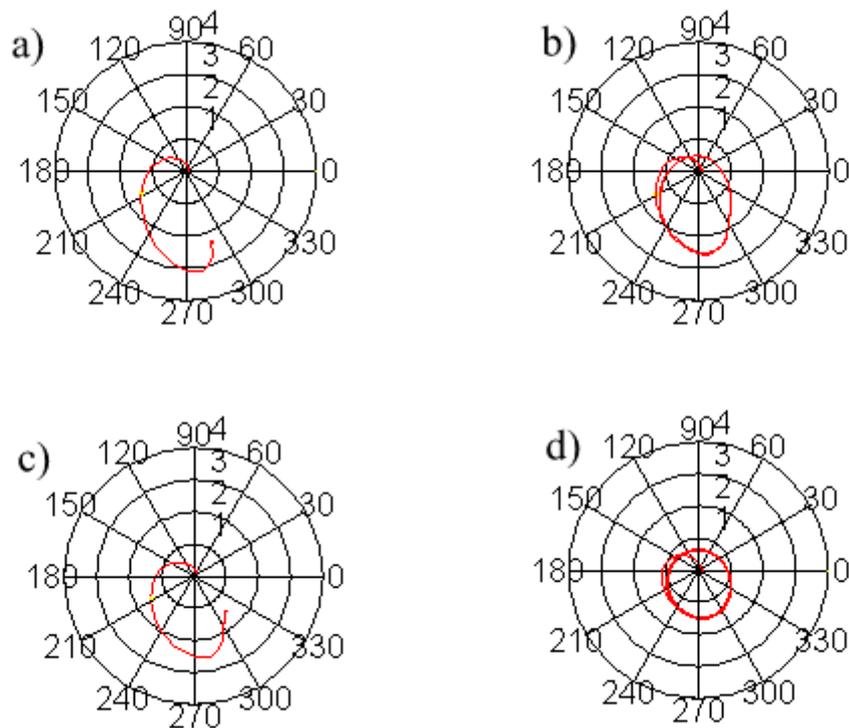
$$g(x) = 2 \left( \frac{L_2}{L_3} \right)^2 x - \left( \frac{L_1}{L_3} \right)^2 x^2 \quad (7.3.8)$$



**Rysunek 7.3.1** Przebieg zmienności funkcji  $f(x)$  i  $g(x)$

Funkcje  $f(x)$  i  $g(x)$  przecinają się w punkcie  $x=0$  oraz w punkcie  $P$  niezależnie od parametrów funkcji  $g(x)$ . Wynika to z faktu, że pochodna funkcji  $f'(x=0)=0$ , zaś dla funkcji kwadratowej ( $g(x)$ ) jest ona większa od zera. Oznacza to, że dla każdego parametru wiru oraz dla każdej

kropki istnieje promień dla którego spełnione jest równanie wyjściowe. Odległość od wiru dla której mamy położenie stacjonarne jak łatwo odczytać z postaci funkcji  $g(x)$  zależy od parametrów wiru i kropki. Zmniejszanie stretchingu i zwiększanie cyrkulacji  $\Gamma$  powoduje, że odległość ta rośnie. Podobnie większe krople będą miały położenie równowagi dalej od osi wiru niż mniejsze. Ruch kropki w tym przypadku obrazuje rysunek 7.3.2 a. Kropla początkowo porusza się radialnie od środka wiru, następnie uzyskuje prędkość kątową i w końcu jej położenie osiąga punkt stacjonarny. Na podstawie obliczeń numerycznych okazuje się, że dla pewnych parametrów wiru położenie stacjonarne kropki obliczone powyżej nie jest przez nią osiągnięte (jest to punkt o równowadze chwiejnej) Ruch w tym przypadku jest przedstawiony na rysunku 7.3.2 b. Wynika z niego, że kropla zmierza do eliptycznej trajektorii. Parametry elipsy zależą od wielu czynników. Kiedy mniejsza jest siła grawitacji (np. dla wirów nachylonych pod różnym kątem do poziomu) oraz wielkość kropek, elipsa staje się bardziej zbliżona do okręgu. Istnienie położenia równowagi chwiejnej wynika z profilu prędkości liniowej wiru, która osiąga maksimum dla  $r \approx 1.6$ . Jeśli położenie równowagi znajduje się blisko środka wiru wówczas kropla wychylona z położenia równowagi uzyskuje prędkość. Siły odśrodkowa przewyższa siłę dośrodkową oporu i kropla oddala się od wiru. Jednak siła dośrodkowa rośnie z odległością a prędkość liniowa po przekroczeniu maksimum szybko maleje. Wskutek czego ruch kropki jest ograniczony i jak pokazują obliczenia numeryczne odbywa się po krzywych eliptycznych. Warunek dla którego mamy przejście punktu o stabilności trwałej w równowagę chwiejną jest trudny do oszacowania, jedynie numerycznie można stwierdzić czy dla danych wielkości kropli i parametrów wirów mamy realizowany jeden czy drugi przypadek.



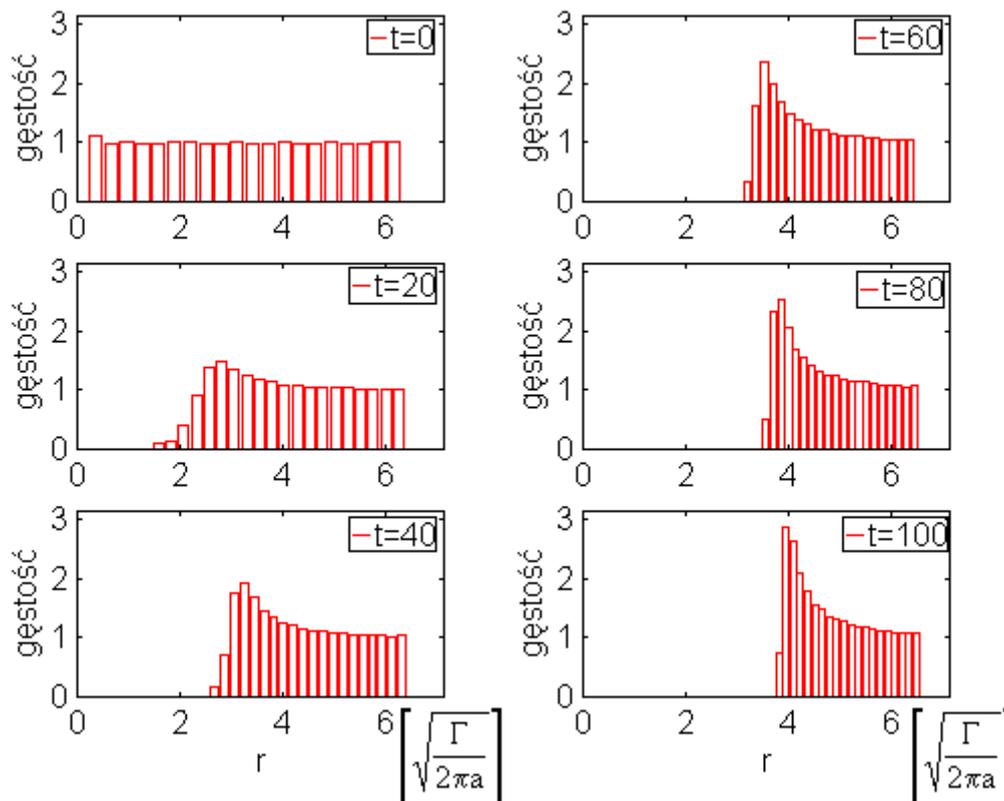
**Rysunek 7.3.2** Trajektorie kropki w płaszczyźnie prostopadłej do osi wiru przy różnych parametrach wiru i wielkości kropli. a)  $L_1=2, L_2=2, L_3=3$ , b)  $L_1=1, L_2=1.3, L_3=3$ , c)  $L_1=1, L_2=1, L_3=20$ , d)  $L_1=2.5, L_2=5, L_3=15$

## 8. Ewolucja pola gęstości kropeł w obszarze wiru Burgersa.

Poniższy rozdział poświęcony jest analizie ewolucji pola gęstości kropeł chmurowych pod wpływem wiru Burgersa. Podobnie jak w przypadku wiru Rankine'a przedstawione będą wyniki symulacji numerycznych początkowo jednorodnego pola kropeł. Rozważymy dwa przypadki: ruch jednakowych kropeł oraz ewolucję wąskiego widma kropeł.

### 8.1 Gęstość kropeł w pionowym wirze Burgersa.

Przejdźmy do analizy zmian pola gęstości kropeł w obecności pionowego wiru Burgersa bez stretchingu. Przedstawione poniżej wyniki obliczeń numerycznych gęstości kropeł pokazują gęstość kropeł na jednostkę powierzchni prostopadłej do osi wiru. W przypadku jednakowych kropeł, które opadają z tą samą prędkością graniczną (terminal velocity, wzór 5.1.11) gęstość ta jest również gęstością kropeł w trzech wymiarach. Ze względu na profil prędkości wiru należy oczekiwać, że krople które w chwili początkowej znajdowały się daleko od centrum wiru przemieszczą się w kierunku radialnym na mniejszą odległość niż krople, które były bliżej wiru. Wobec tego odległość pomiędzy kroplami będzie zmniejszać się a zatem, podobnie jak dla wiru punktowego, oczekiwać możemy wzrostu gęstości kropeł w obszarze poza wirem. Sytuacja taka wystąpi pod warunkiem, liczba  $L_1$

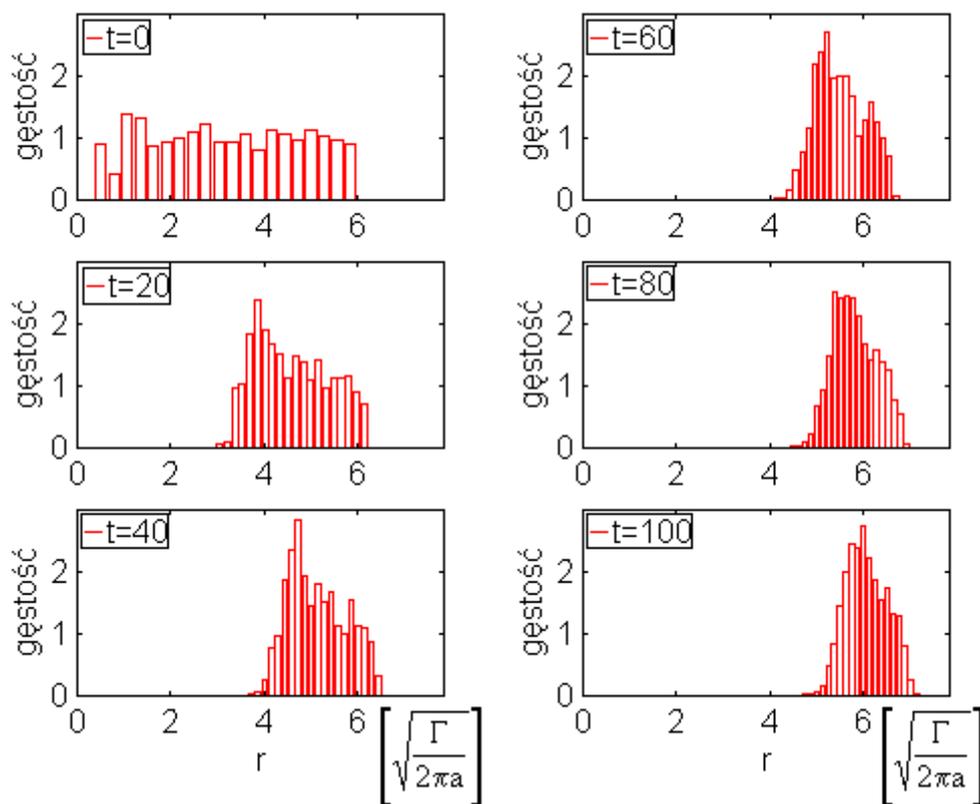


będzie dostatecznie duża co ma miejsce dla wiru o małej szerokości i dużej cyrkulacji.

Rysunek 8.1.1 Ewolucja rozkładu gęstości kropeł wewnątrz wiru Burgersa ( $L_3 = 1$ ).

Na rysunku 8.1.1 widoczna jest zmiana gęstości kropeł wewnątrz wiru. Początkowy rozkład kropeł był taki sam jak w przypadku wiru punktowego (rysunek 6.4.1). Krople zostają szybko wyrzucone z centralnej części wiru, co sprawia, że koncentracja kropeł lokalnie rośnie. Maksimum gęstości kropeł, analogicznie jak w wirze punktowym występuje po wewnętrznej stronie obszaru zajmowanego przez krople. Obszar podwyższonej koncentracji odsuwa się od osi wiru, przy jednoczesnym powolnym wzroście gęstości. Pod koniec okresu symulacji,  $t=100$  [1/a], gęstość kropeł w tym obszarze jest równa trzykrotnej wartości początkowej. W przypadku wiru o wyższej cyrkulacji lokalny wzrost koncentracji kropeł jest większy i maksimum to odsuwa się szybciej od osi wiru.

Rysunek 8.1.2 przedstawia ewolucje gęstości powierzchniowej kropli o różnych średnicach. Tym razem rozkład kropeł był losowy ze stałą gęstością początkową. Widmo kropeł miało rozkład Gaussa centrowane na  $r = 10 \mu\text{m}$  (rysunek 6.1.5).

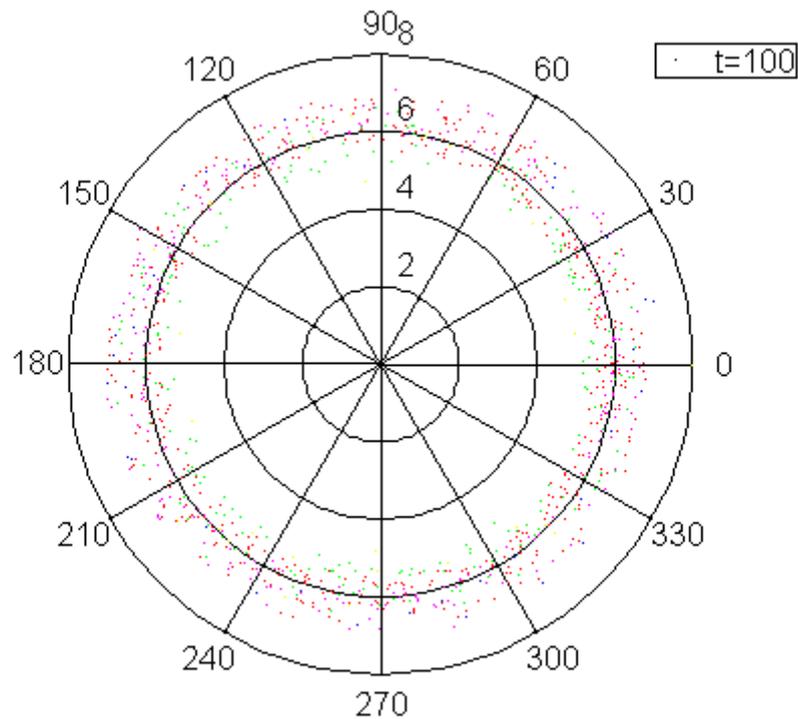


**Rysunek 8.1.2** Ewolucja gęstości kropeł o rozkładzie widmowym wewnątrz wiru Burgersa ( $L_3 = 10$ ).

Rozkład przestrzenny charakteryzuje się lokalnym wzrostem koncentracji kropeł w centralnej części obszaru przez nie zajmowanego. Koncentracja nie przekracza trzykrotnej wartości początkowej. Ze względu na różne wielkości kropeł rozkład krople jest w tym przypadku mniej regularny. Przejście z obszaru zajmowanego przez krople do obszaru ich pozbawionego następuje stopniowo nie zaś gwałtownie jak dla kropeł o jednakowych rozmiarach. Stwierdzamy na podstawie przedstawionych wyników, że krople poruszające się w obszarze wiru o gaussowskim rozkładzie wirowości mają tendencję do tworzenia struktur klastrowych o podwyższonej gęstości. Wartość gęstości w klastrach jest tym większa im większa jest cyrkulacja wiru.

Podczas ruchu kropli występuje dodatkowo efekt sortowania kropeł, tym razem jest on słabszy niż w przypadku, gdy wir jest poddany rozciąganiu. Krople największe występują generalnie na zewnątrz oddalającego się pierścienia kropeł, najmniejsze zaś po jego stronie

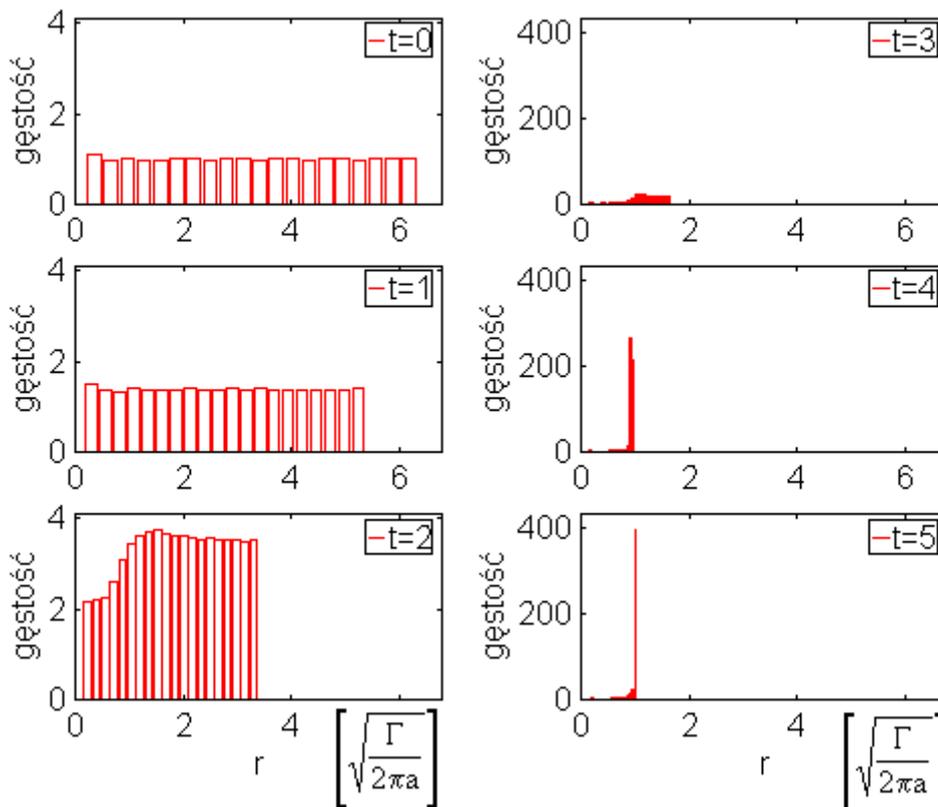
wewnętrznej. Rysunek 8.1.3 przedstawia położenie różnych kropeł w wokół wiru po czasie  $t=100$  [1/a]. Łatwo zauważyć na nim pewne rozseparowanie kropeł jest jednak ono stosunkowo niewielkie. Wynika ono z różnicy pomiędzy ruchem mniejszych i większych kropeł. Mniejsze krople znacznie szybciej dostosowują się do ruchu wiru ale podlegają mniejszej sile odśrodkowej niż duże krople i dlatego wolniej oddalają się od osi wiru.



**Rysunek 8.1.3** Położenie kropeł w wirze po czasie  $t=100$  [1/a]. Kolor żółty i zielony odpowiada najmniejszym kroplom, czerwony średnim, zaś niebieski i fioletowy kroplom o największej średnicy

## 8.2 Gęstość kropeł w wirze Burgersa rozciągającym w kierunku pionowym.

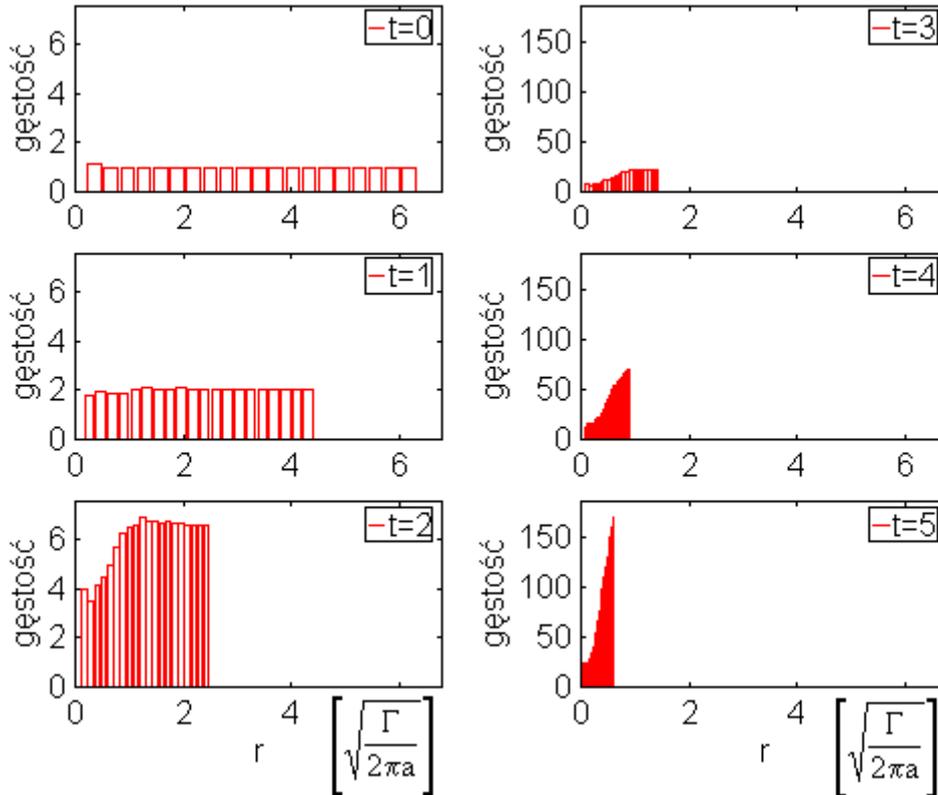
Rozważmy dwa przypadki ruchu kropeł o jednakowych średnicach. Pierwszy, kiedy krople posiadają orbitę stacjonarną i drugi, w którym krople zapadają się do środka wiru. Zarówno w przypadku zapadających się kropeł do centrum wiru jak i tych, które wykonują cykl graniczny obszar zajmowany przez nie będzie szybko malał. Prowadzi to do intensywnego wzrostu gęstości kropeł. Wyniki obliczeń numerycznych dla obu przypadków przedstawione są na rysunkach 8.2.1 oraz 8.2.2. Na pierwszym z nich widoczna jest ewolucja kropeł o promieniu większym od krytycznego. W początkowej fazie ruchu gęstość kropeł jest mało zróżnicowana jednak rośnie wyraźnie, krople zapadają się do kierunku osi wiru. Następnie krople zostają wyrzucone z centrum wiru i skupiają się wokół promienia stacjonarnego. W tym czasie koncentracja kropeł na jednostkę powierzchni silnie rośnie i pod koniec okresu obliczeniowego (po  $t=5$  [1/a]) jest w około 400-razy większa od wartości początkowej. Wyniki te są bardzo podobne do uzyskanych dla wiru punktowego, w obu przypadkach po bardzo krótkim czasie następuje skupienie kropeł na wąskim pierścieniu.



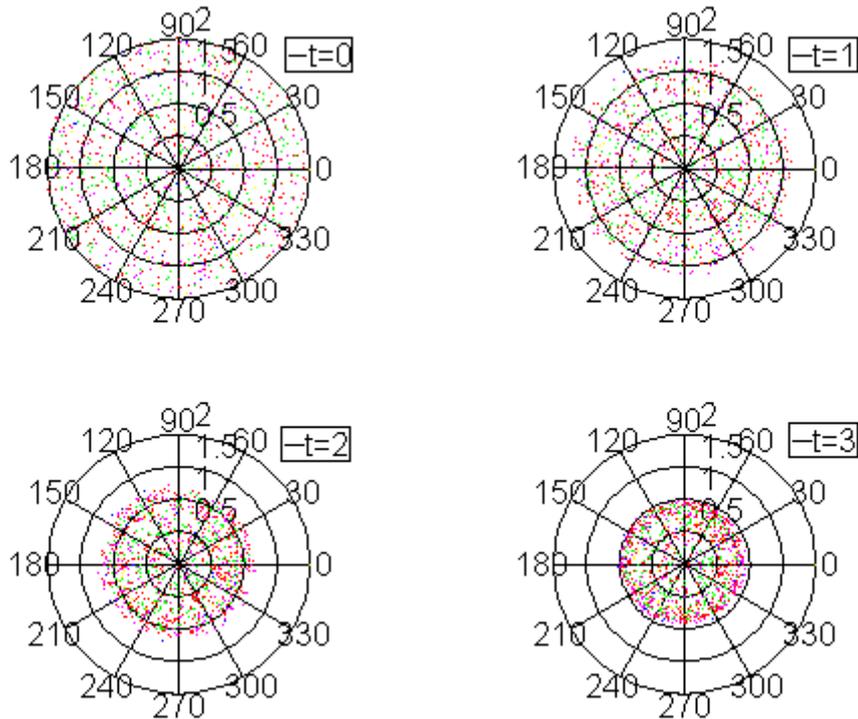
Rysunek 8.2.1 Ewolucja gęstości powierzchniowej kropeł o jednakowych promieniach, które posiadają stacjonarną orbitę.

Na rysunku 8.2.2 przedstawione są zmiany koncentracji kropeł o promieniu mniejszym od krytycznego dla którego nie jest spełniony warunek 7.2.9 i krople zapadają się do osi wiru. Początek symulacji jest bardzo podobny do pierwszego przypadku, jednak tym razem maksimum gęstości kropeł występuje po zewnętrznej stronie obszaru przez nie zajmowanego. W dalszych chwilach czasu obszar ten ulega stopniowemu zmniejszaniu i przesuwa się w kierunku osi wiru. Towarzyszy temu duży wzrost gęstość kropeł, która po czasie  $t=5$  [1/a] w obszarze maksimum przekracza 150 razy wartość początkową.

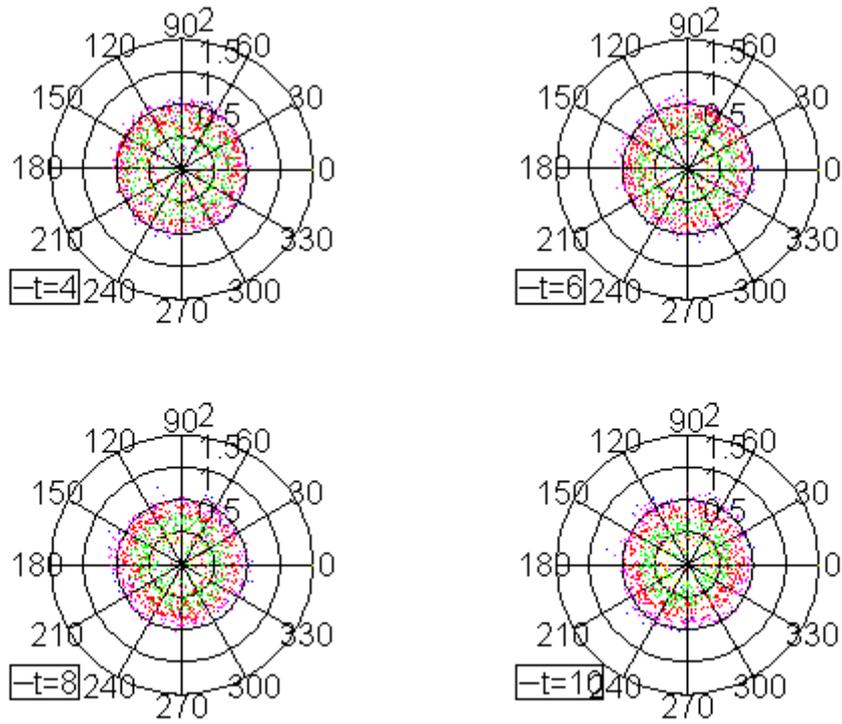
Przejdźmy do omówienia wyników obliczeń dla kropelek o różnych masach, o widmie takim jak w poprzednim paragrafie.



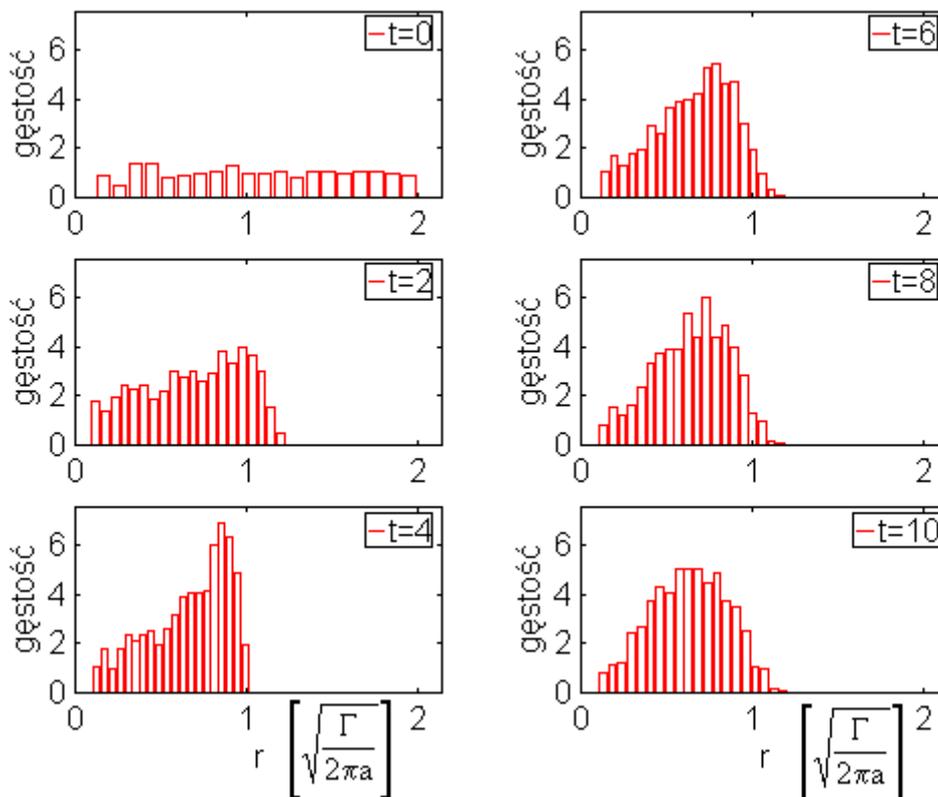
**Rysunek 8.2.2** Ewolucja gęstości powierzchniowej kropelek o jednakowych promieniach, które zapadają się do centrum wiru.



**Rysunek 8.2.3** Ewolucja pola kropelek o gaussowskim rozkładzie widmowym.



**Rysunek 8.2.4** Ewolucja pola kropek o rozkładzie widmowym (cd)



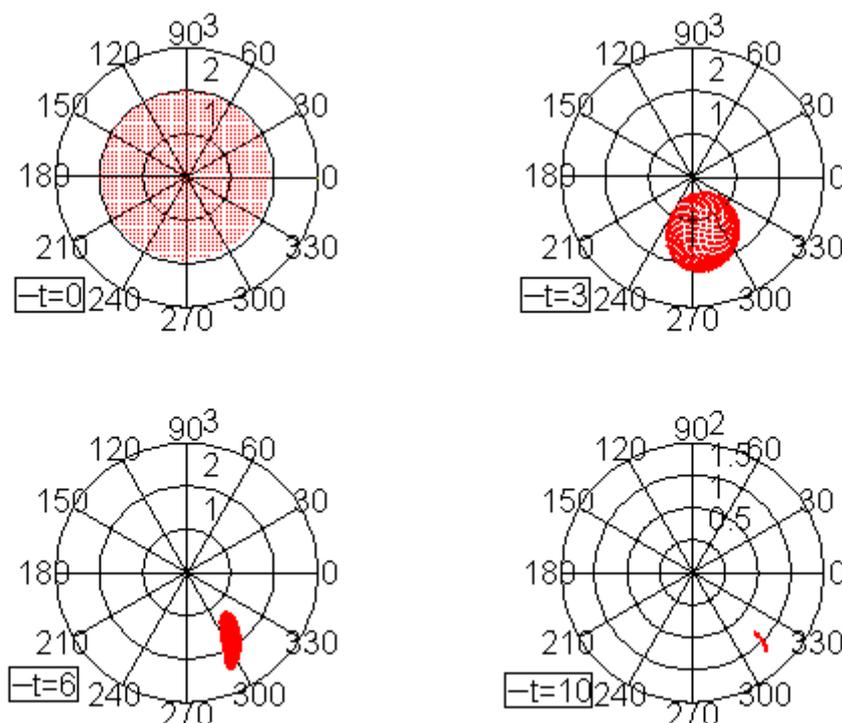
**Rysunek 8.2.5** Ewolucja gęstości powierzchniowej kropek o gaussowskim rozkładzie widmowym

Krople o różnych wielkościach mają różne orbity stacjonarne lub zapadają się ich do centrum wiru. Rysunki 8.2.3 oraz 8.2.4 przedstawiają przestrzenny rozkład kropeł z uwzględnieniem ich rozmiaru. Widoczne jest sortowanie kropeł, punkty ciemne odpowiadające cięższym kroplom znajdują się na zewnątrz obszaru zaś punkty jasne (lżejsze krople) zlokalizowane są najbliżej osi wiru. Rysunek 8.2.5 przedstawia zmiany gęstości powierzchniowej kropeł. Rozkład gęstości posiada maksimum, które wolno rośnie z czasem i waha się wokół wartości 6.

Powyższe wyniki obliczeń pokazują, że gdy wir jest rozciągany w kierunku pionowym gęstość powierzchniowa szybko rośnie. Ponadto istnieje charakterystyczny przestrzenny rozkład kropeł związany z ich różnymi wielkościami. Krople sortują się i skupiają się w klastry w obrębie, których mamy krople o podobnej wielkości. Nie oznacza to, że gęstość przestrzenna również rośnie, wymagane do tego są dodatkowe obliczenia, które w tej pracy nie są prezentowane. Jednak na podstawie równania ruchu wzdłuż osi wiru, które daje rozwiązania wykładnicze można przypuszczać, iż początkowo gęstość przestrzenna będzie rosła, później jednak zacznie spadać.

### 8.3 Gęstość kropeł w wirze Burgersa rozciągany w kierunku poziomym.

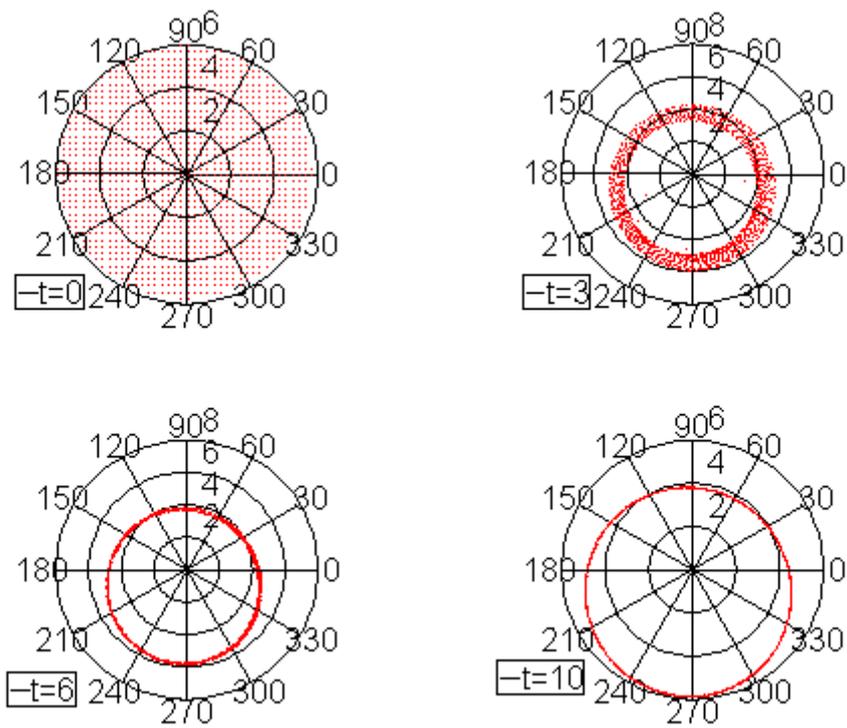
Przejdźmy do analizy zmian pola kropeł znajdujących się w obszarze wiru rozciąganego w kierunku poziomym. Tym razem rozpatrujemy ruch w płaszczyźnie pionowej prostopadłej do osi wiru. W tym przypadku istotny wpływ na ruch kropeł, jak było to pokazane w paragrafie 7.3, ma siła grawitacji. Rozważmy najpierw przypadek pierwszy dla którego krople mają położenie równowagi trwałe. Wyniki obliczeń w tym przypadku są przedstawione na rysunku 8.3.1. Wynika z nich, że w początkowej fazie ruchu rozkład kropeł nie traci symetrii obrotowej jednak po pewnym czasie obszar zajmowany przez nie wydłuża się w kierunku pionowym. Obszar ten szybko zmniejsza się co prowadzi do dużego wzrostu



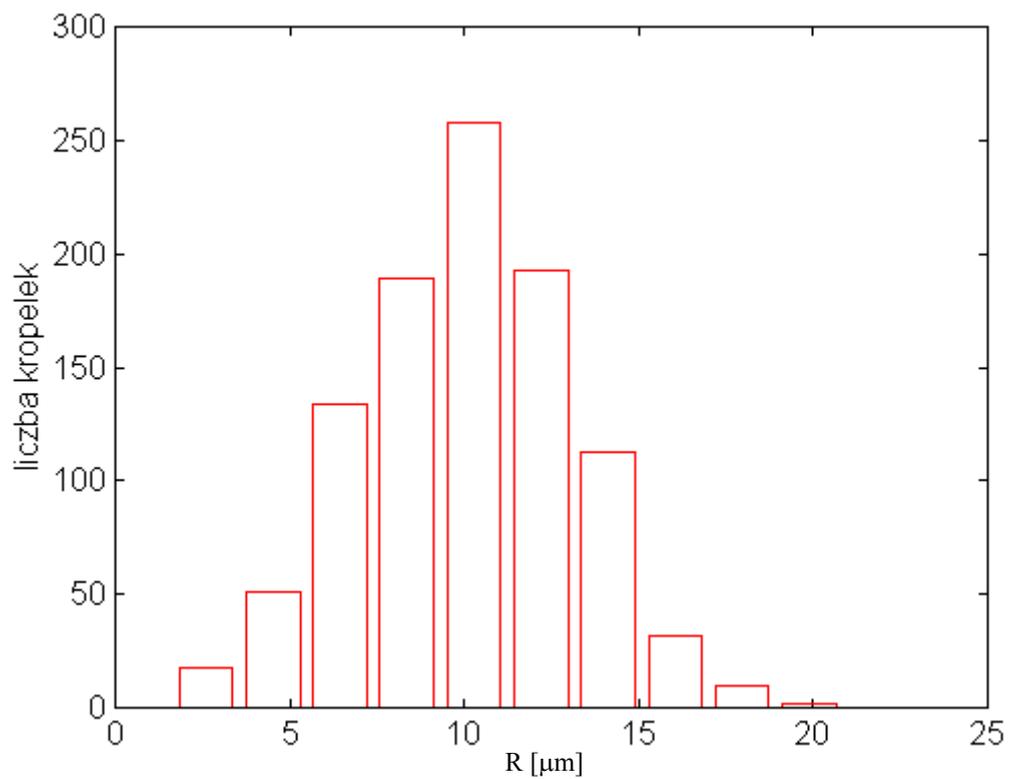
Rysunek 8.3.1 Ewolucja kropeł posiadających położenie równowagi.

gęstości w okolicach punktu stabilnej równowagi. Podobnie duży wzrost koncentracji obserwujemy dla kropeł, które dążą do cyklu granicznego (rys. 8.3.2). W tym przypadku krople zapadają się do pierścienia, którego szerokość zmniejsza się z czasem. Dzieje się tak z kroplami mniejszymi niż te, dla których istnieje położenie równowagi. Siła grawitacji powoduje w tym przypadku, że krople poruszają się po krzywej zamkniętej wydłużonej w kierunku pionowym.

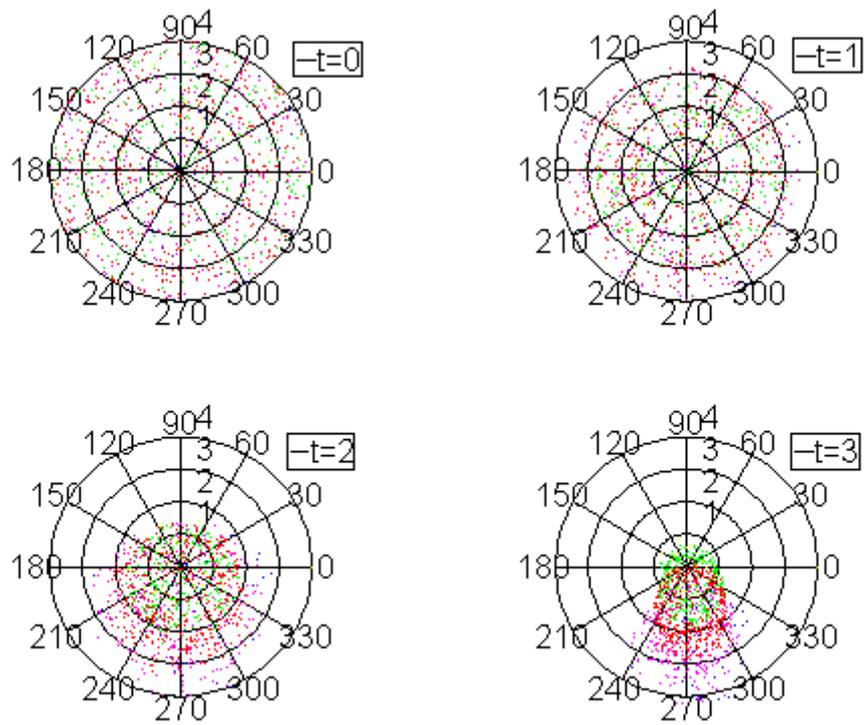
Rozpatrzmy na koniec ruch kropeł o różnych wielkościach. Widmo kropeł, dla którego wykonano obliczenia zawiera zarówno krople, które posiadają równowagi w płaszczyźnie prostopadłej do osi wiru jak i te które dążą do cyklu granicznego. Widmo kropeł (rys. 8.3.3) wzięliśmy nieco szersze niż w poprzednich paragrafach tak aby znalazły się w nim krople odpowiadające wszystkim możliwym reżimom ruchu. Wyniki obliczeń pokazano na rysunkach 8.3.4 oraz 8.3.5. Śledząc kolejne etapy ruchu kropeł zauważamy, że krople początkowo opadają pod wpływem siły ciężkości i jednocześnie zapadają się do ku osi wiru. Na początku symetria obszaru zajmowanego przez krople



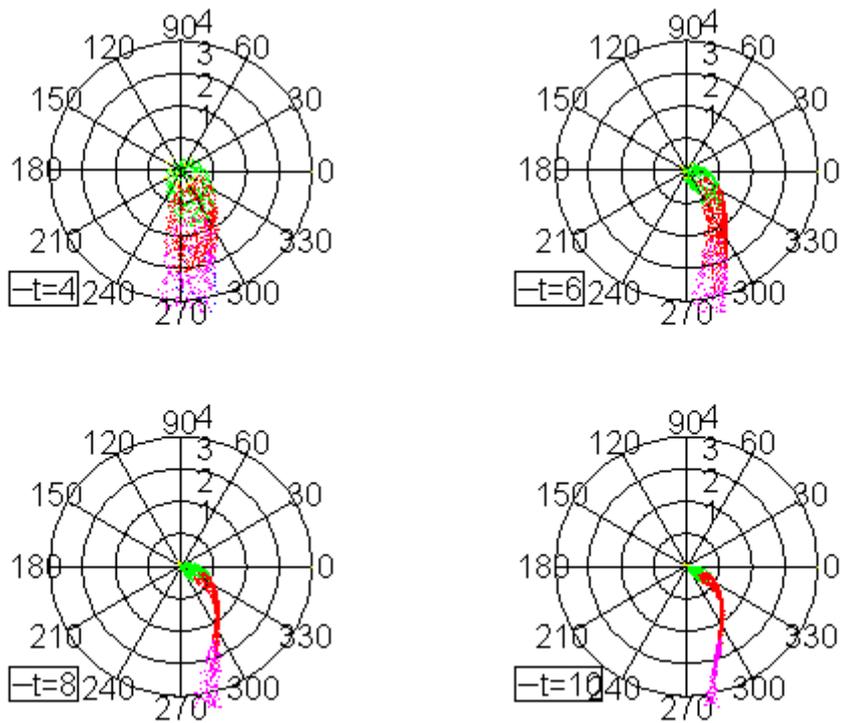
**Rysunek 8.3.2** Ewolucja kropelek, które zbiegają do w cyklu granicznego



**Rysunek 8.3.3** Widmo kropelek przyjęte w obliczeniach.

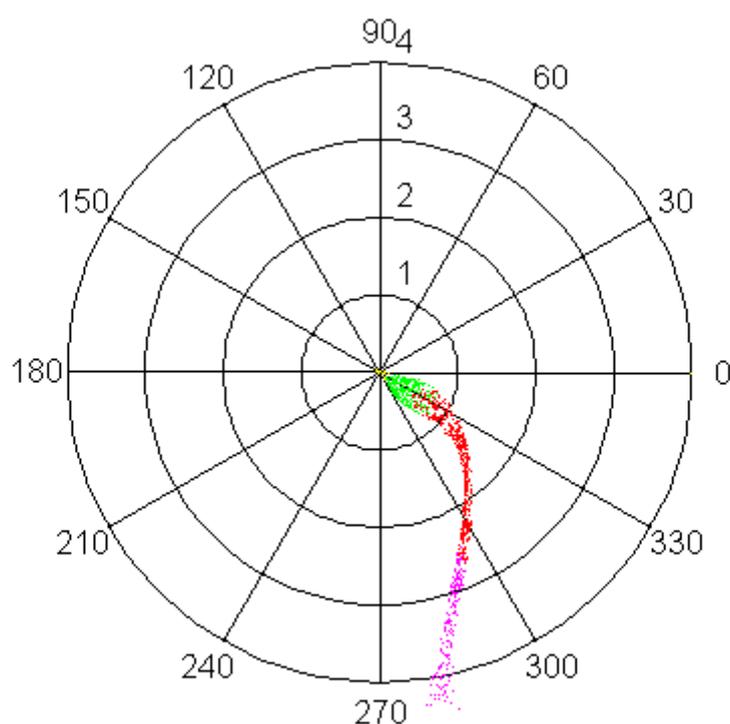


**Rysunek 8.3.4** Położenia krople o rozkładzie widmowym pokazanym na rys. 8.3.3



**Rysunek 8.3.5** Położenia krople o rozkładzie widmowym pokazanym na rys. 8.3.3

jest zachowana. Po czasie  $t=3$  [1/a] obszar objęty przez krople wydłuża się i widoczne już jest sortowanie kropel. Krople największe opadają najniżej, zaś najmniejsze skupione są wokół osi wiru. W późniejszych chwilach czasu zauważamy, że krople przemieszczają się na prawo od osi  $y$  co jest wywołane ruchem obrotowym powietrza. Ponadto obszar zajmowany przez kropelki zawęża się i po czasie  $t=10$  [1/a] jest już bardzo wąski. Rysunek 8.3.6 pokazuje końcowe położenie kropel, które jak widać zaczynają się od środka wiru (krople najmniejsze) i dalej układają się radialnie. W odległości  $r=1.5$  obszar objęty przez krople wygina się i krople najcięższe układają się coraz bliżej osi  $y$ . Wygięcie tego obszaru wynika z faktu, że maksimum prędkości wiru jest osiągane dla  $r \approx 1.5$  i w tym regionie położenie równowagi kropel jest najbardziej oddalone od pionowej osi  $y$ . Z przedstawionych wykresów wynika, że krople już po czasie  $t=10$  [1/a] są dobrze posortowane i skupione w stosunkowo wąskim obszarze. Nie należy zapominać, że krople poruszają się również w płaszczyźnie prostopadłej do rysunku (wzdłuż osi wiru) i obserwowany wzrost gęstości powierzchniowej nie musi świadczyć o wzroście gęstości w trzech wymiarach.



**Rysunek 8.3.6** Końcowe położenie kropel ( $t=10$  [1/a]) o rozkładzie widmowym pokazanym na rys. 8.3.3

## 9. Podsumowanie.

W ramach niniejszej pracy przedstawiono szczegółową analizę ruchu pojedynczej kropli oraz pola koncentracji kropeł w pobliżu wiru powietrza. Przebadano różne przypadki wirów zaczynając od najprostszego modelu wiru Rankine'a a skończywszy na wirze Burgersa będącym uogólnieniem tego pierwszego. Rozważano przypadki różnie zorientowanych przestrzenie wirów z uwzględnieniem rozciągania wiru oraz efektów sedymentacji. Istnienie mechanizmów rozciągających prowadzących do powstania nici wirowych jest potwierdzone w symulacjach numerycznych oraz w laboratoryjnych wizualizacjach ruchów turbulentnych.

Na podstawie przedstawionych wyników zauważamy, że generalnie pojawienie się ruchów wirowych w chmurach silnie modyfikuje rozkład przestrzenny kropeł. Obszary o dużej wirowości (blisko centrum wirów) charakteryzują się niską koncentracją kropeł, które są z tych obszarów wyrzucane. Przeciwnie, w obszarach o niskiej wirowości, krople poddawane są niewielkim przyspieszeniom i skupiają się tworząc charakterystyczne pierścienie. Pojawienie się rozciągania wiru znacznie modyfikuje dynamikę ruchu kropli. Napływ powietrza w płaszczyźnie prostopadłej do osi wiru powoduje, że krople przestają ciągle oddalać się od centrum wiru. Możliwe w tym przypadku są ruchy kropli po zamkniętych orbitach stacjonarnych lub też ruch kropli w kierunku osi wiru. Istnienie stacjonarnych orbit powoduje, że krople podlegają sortowaniu. Największe krople znajdują się na najbardziej zewnętrznych orbitach, zaś najmniejsze najbliżej osi wiru. Sytuacja taka sprawia, że gęstość powierzchniowa kropli szybko rośnie. Po czasie  $t=0.01$ s. odpowiadającym kilku „turnover time”, przekracza ona 100-200 razy wartość początkową. W przypadku wiru, w którym brak jest rozciągania wzrost gęstości jest dużo wolniejszy. W tym samym czasie gęstość może wzrosnąć kilka razy w zależności od cyrkulacji wiru. Jednak w tym przypadku jest to nie tylko wzrost gęstości na jednostkę powierzchni ale i w przestrzeni trójwymiarowej.

Nachylenie wiru w stosunku do kierunku pionowego sprawia, że w płaszczyźnie prostopadłej do wiru na ruch kropli wpływa również siła grawitacji. Powoduje to znaczne modyfikacje w ruchu kropeł, które w tym przypadku mogą mieć położenie równowagi. Ponadto istnieją jeszcze inne scenariusze ruchu, krople mogą poruszać w cyklu granicznym wokół wiru przy czym krzywa graniczna ma w ogólności skomplikowane kształty. Dodatkowo dla wiru Burgersa możliwe jest zapadanie się najmniejszych kropeł do środka wiru. To bogactwo możliwych ruchów kropeł sprawia, że krople w tym razem ulegają one jeszcze wyraźniejszemu sortowaniu. Z istnienie położenia równowagi w płaszczyźnie prostopadłej do wiru wynika, że krople które początkowo znajdowały się w obszarze trójwymiarowym zostają skupione na prostej równoległej do osi wiru tworząc coś w rodzaju wydłużonych nici. Można przypuszczać, że efekt ten tłumaczy struktury obserwowane w chmurach, które z bliska składają się z podobnych rozciągniętych włókien. Prawdopodobnie są to skupiska kropeł powstające w otoczeniu rozciągniętych wirów.

Istotną cechą powstawania struktur klastrowych jest ich krótki czas tworzenia się. Dla kropeł o promieniu  $10\ \mu\text{m}$  nie przekracza on kilku milisekund. Wystarczają zatem milisekundowe skale czasowe aby nastąpiła wyraźna modyfikacja pola kropełek w chmurach więc istotną rolę odgrywają nawet wiry o bardzo krótkim czasie życia.

W przedstawionej pracy nie został wykonany obliczenia gęstości kropeł w przestrzeni trójwymiarowej ograniczono się jedynie do gęstości powierzchniowej. Równania ruchu wzdłuż osi wiru prowadzi do rozwiązań wykładniczych w czasie. Krople są zatem przyspieszane w tym kierunku co prowadzi prawdopodobnie do zmniejszania się koncentracji kropeł. Jednak w początkowych chwilach czasu ze względu na silny wzrost gęstości powierzchniowej kropeł może wystąpić wzrost gęstości trójwymiarowej w obszarze wiru. Problem ten wymaga wykonania jeszcze dodatkowej analizy i obliczeń numerycznych.

## 10. Bibliografia

1. A Almeida, F.C R. 1976 The collisional problem of cloud droplets moving in a turbulent environment. Part I: A method of solution. *J. Atmos. Sci.*, 33, 1571-1578.
2. A Almeida, F.C 1979 The collisional problem of cloud droplets moving in turbulent environment. Part II: Turbulent collision efficiencies. *J. Atmos. Sci.*, 36, 1564-1576.
3. Balcer, R. 1981 The influence of non-gravitational velocity on the collision efficiency of small cloud drops. *Acta Geophysica Polonica*, 29, 93-102.
4. Douady, S. Couder, Y., Bracher, M. E. 1991 Direct observation of the intermittency of intense vorticity filaments in turbulence. *Phys. Rev. Lett.* 67, 983-986.
5. Ivanovsky, A. I, Mazin, I. P. 1960 Turbulent coagulation and its role in the process of growth of cloud drops. P.21 in *Trudi Central Aerological Observatory. Moscow, No. 35.*
6. Khain, A. P., Pinsky, M. B. 1995 Drops' inertia and its contribution to turbulent coalescence in convective cloud. Part I Drops' fall in the flow with random horizontal velocity. *J. Atmos. Sci.*, 52, 196-206.
7. Kozikowska, A., Haman, K., Supromnowicz, J. 1984 Preliminary results of an investigation of the spatial distribution of fog droplets by a holographic method. *Quart. J. R. Met. Soc.*, 110:65-73.
8. Maxey, M. B. 1987 The gravitational settling of aerosol particles in homogeneous turbulence and random flow field. *J. Fluid Mech.*, 174:441-465.
9. Pinsky, M. B., Khain, A. P. 1997 Turbulence effect on the collision kernel. 1: Formation of velocity deviations of drops falling within a turbulent three dimensional flow. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 123 1517-1542.
10. Pinsky, M. B., Khain, A. P. 1997 Turbulence effect on the collision kernel. 2: Increase of the swept volume of colliding drops *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 123 1543-1560.
11. Pruppacher, H. R., Klett, J. D. 1978 *Microphysics of clouds and precipitation.* Reidel, Dordrecht, Holland.
12. Shaw, R. A., Reade, W. C., Collins, L. R., Varlinde, J. 1997 Preferential concentration of clouds droplets by turbulence: effects on early evolution of cumulus cloud droplet spectra. *Journal of the Atmospheric Sciences.*
13. Smirnoff, V. I. 1969 The rate of coagulation and condensational growth of aerosol particle. *Trudi Central Aerological Observatory, no. 92*
14. Wang, L. P. Maxey, M. R. 1993 Settling velocity and concentration distribution of heavy particles in homogeneous isotropic turbulence. *J. Fluid Mech.*, 256:27-68.

15. Woods, J. D., J. C. Drake, P. Goldsmith 1972 Coalescence in turbulent cloud. *Quart. J. Roy. Meteo. Soc.*, 98, 135-149.