

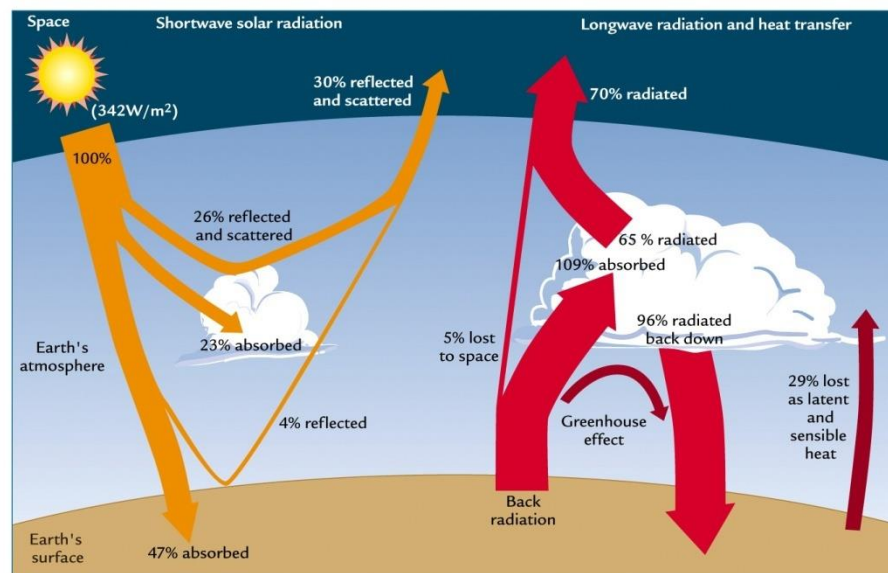


# Wprowadzenie do równania transferu promieniowania

Krzysztof Markowicz

Instytut Geofizyki, Wydział Fizyki  
Uniwersytet Warszawski

# Transfer promieniowania w atmosferze



- Rozwiązanie problemu transferu promieniowania pozwala przejść od wielkości mikroskopowych charakteryzujących pojedynczą cząstkę do wielkości makroskopowych charakteryzujących warstwę lub całą kolumnę powietrza
- Będziemy zakładać, że atmosfera składa się z cząstek, które są losowo rozłożone w przestrzeni

# Podstawowe wielkości związane z promieniowaniem

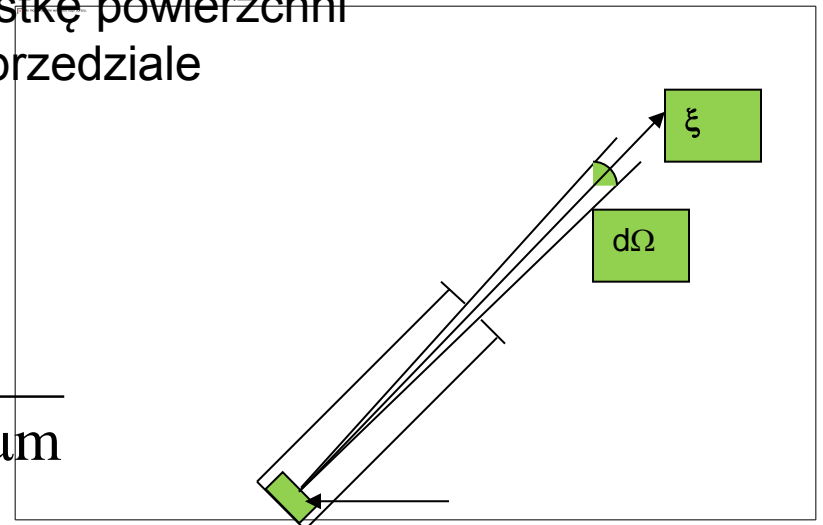
Wektor Poyntinga

$$\vec{S} = c^2 \varepsilon_0 \vec{E} \times \vec{H}$$

**Radiancja** – ilość energii mierzona w określonym kierunku w jednostce czasu  $dt$  na jednostkę powierzchni  $dA$ , kąta bryłowego  $d\Omega$  oraz w wąskim przedziale spektralnym  $d\lambda$ .

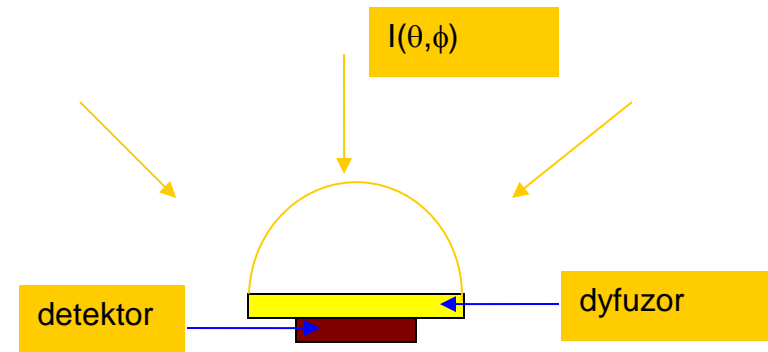
$$I_\lambda = \frac{dE_\lambda}{\cos \theta d\Omega dA dt d\lambda}$$

$$\frac{W}{m^2 sr \mu m}$$



**Strumień, natężenie promieniowania** - ilość energii na jednostkę czasu przechodzącej przez jednostkową powierzchnię  $dA$  dla wąskiego przedziału spektralnego  $d\lambda$  promieniowania elektromagnetycznego.

$$F_\lambda = \frac{dE_\lambda}{dA dt d\lambda}$$



Związek radiancji ze strumieniem

$$F_\lambda = \int_{\Omega} d\Omega I_\lambda \cos \theta$$

# Promieniowanie ciała doskonale czarnego

- **Ciało doskonale czarne** - to ciało fizyczne, które pochłania całkowicie padające na niego promieniowanie oraz emituje energię zgodnie z równowadze prawem Plancka:

$$B_{\lambda}(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5 \left( e^{hc/k\lambda T} - 1 \right)}$$

$$h=6.626 \times 10^{-34} \text{ Js,}$$
$$k=1.3806 \times 10^{-23} \text{ J/K}$$

Prawo Stefana-Boltzmannna

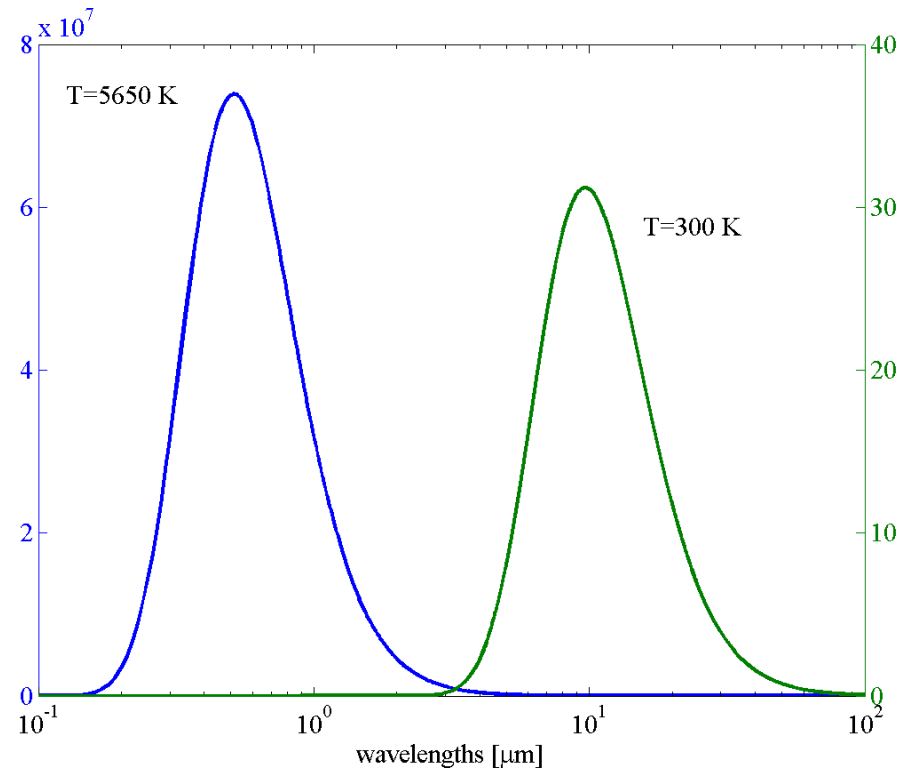
$$F = \pi B(T) = \sigma T^4$$

$$\sigma=5.67 \times 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$$

# Prawo Wien'a

$$\lambda_{\max} = a / T$$

$$a = 2.897 \times 10^{-3} \text{ mK.}$$



**zdolność emisyjna  $\varepsilon_\lambda$**  - stosunek emitowanej przez ciało radiancji do radiancji emitowanej przez ciało doskonale czarne (wzór Planck'a).

**zdolność absorpcyjna  $A_\lambda$**  – stosunek promieniowania absorbowanego przez ciało do funkcji Planck'a.

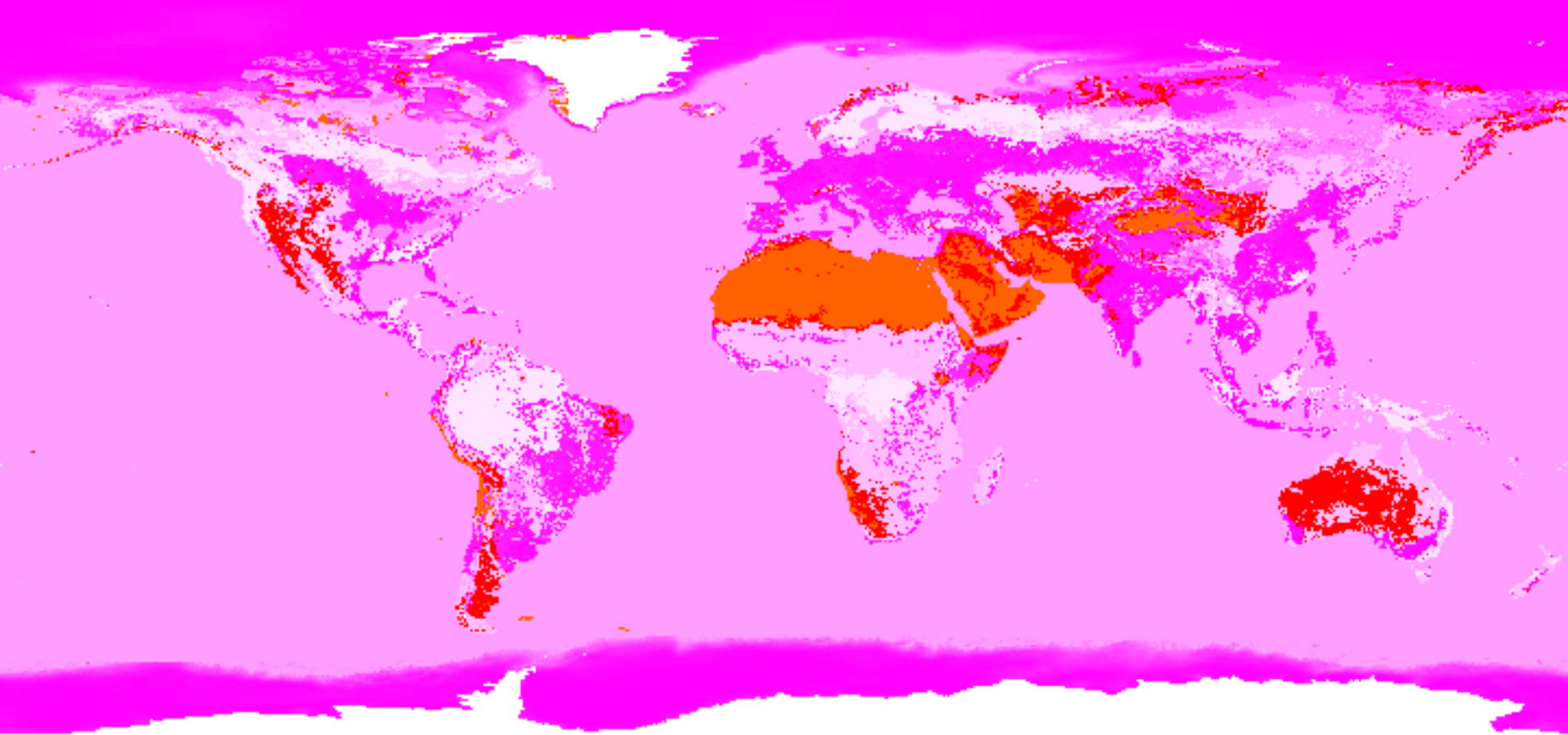
# Prawo Kirchhoff'a

W równowadze termodynamicznej mamy:

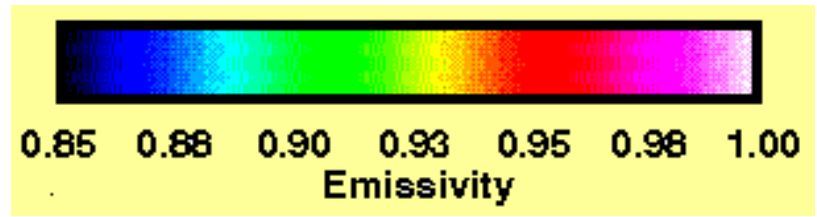
$$\varepsilon_{\lambda} = A_{\lambda}.$$

Przyrodzie ciała doskonale czarne nie występują, dlatego często definiuje się pojęcie **ciała doskonale szarego**, przez które rozumie się ciało, dla którego zdolność absorpcyjna  $A$  jest stałą mniejszą od jedności ( $A < 1$ ) i niezależny od długości fali. W tym przypadku całkowita energia emitowana przez ciało może być wyznaczana ze wzoru

$$F = \varepsilon \sigma T^4$$



Surface	Emissivity
Water	0.993-0.998
Ice	0.98
Green grass	0.975-0.986
Sand	0.949-0.962
Snow	0.969-0.997
Granite	0.898





# Prawo Lamberta-Beera

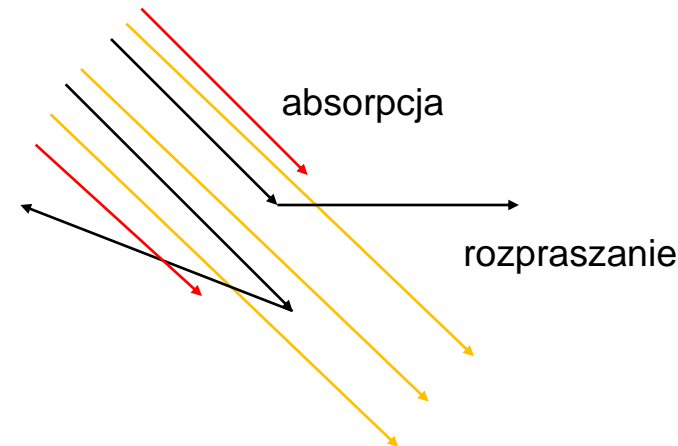
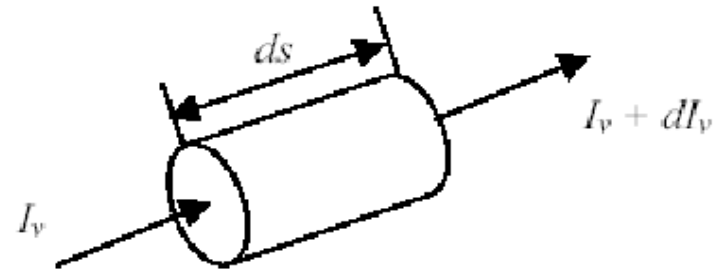
Transfer monochromatycznego promieniowania bezpośredniego

$$dI_v = -\sigma_e I_v ds$$

$$I_v = I_{v_0} \exp\left(-\int_0^s \sigma(s') ds'\right) = \exp(-\tau_v)$$

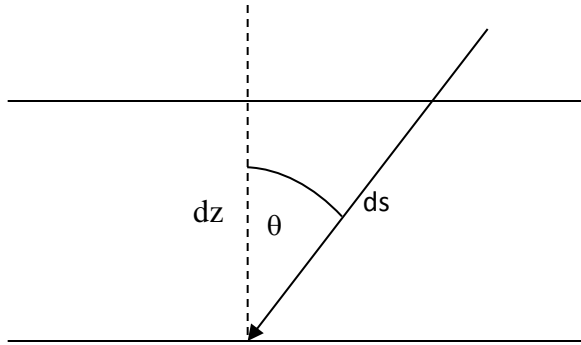
$$\tau_v = \int_0^s \sigma_e(s') ds' \quad \text{Grubość optyczna}$$

$$T_v = \exp(-\tau_v) \quad \text{Transmisja}$$



Znając transmisję warstwy powietrza możemy policzyć natężenie promieniowania bezpośredniego po jej przejściu.

# Przybliżenie płasko-równoległe – jednorodność horyzontalna własności optycznych powietrza

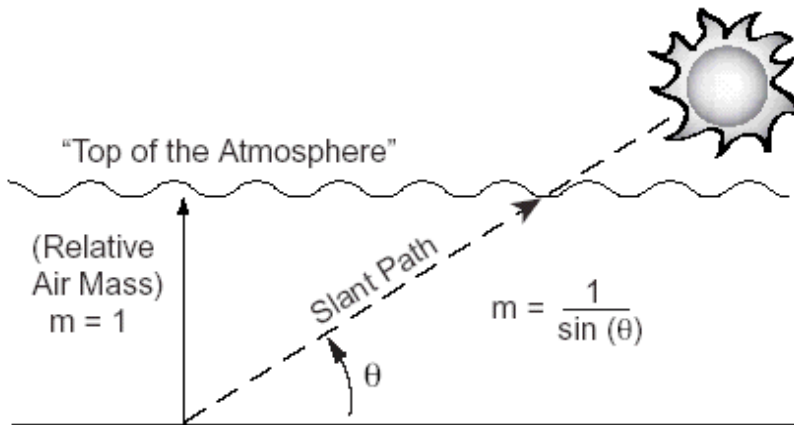


$$ds = \frac{dz}{\cos \theta} = \frac{dz}{\mu} = m dz$$

$m$ - masa optyczna atmosfery

$$\mu = \cos \theta$$

$$I_v = I_{v_0} \exp(-\tau_v m)$$



W przypadku dużych kątów zenitalnych ( $\theta > 60$ ) należy brać pod uwagę zakrzywienie powierzchni ziemi i wówczas Masa optyczna atmosfery dana jest wzorem

$$m = \frac{Mg}{RT} \int_0^{\text{TOA}} \exp\left(-\frac{gM}{RT} \left[-\sqrt{R^2 + 2Rx\mu + x^2} - R\right]\right) dx$$

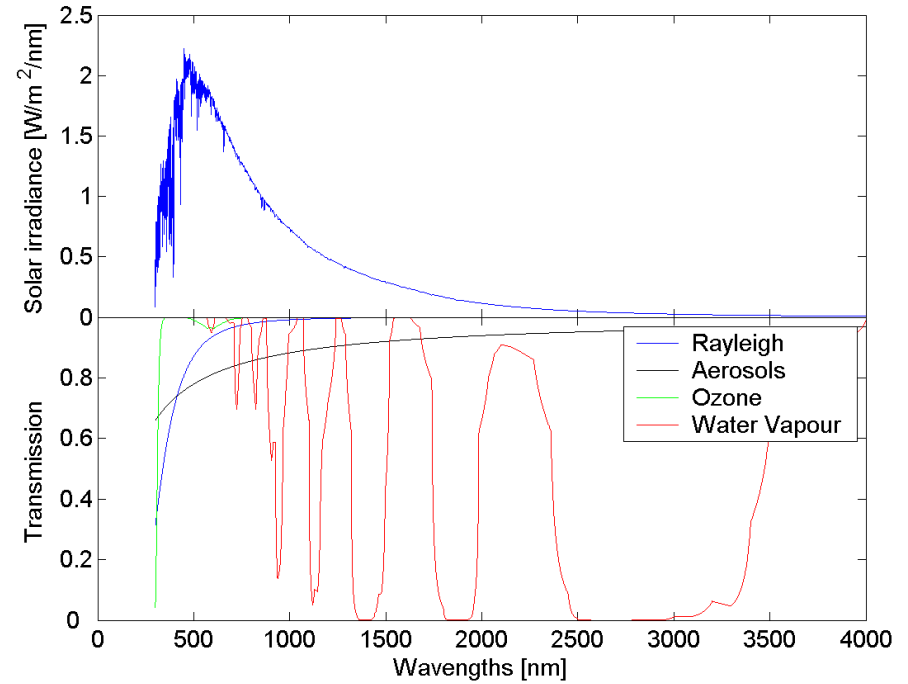
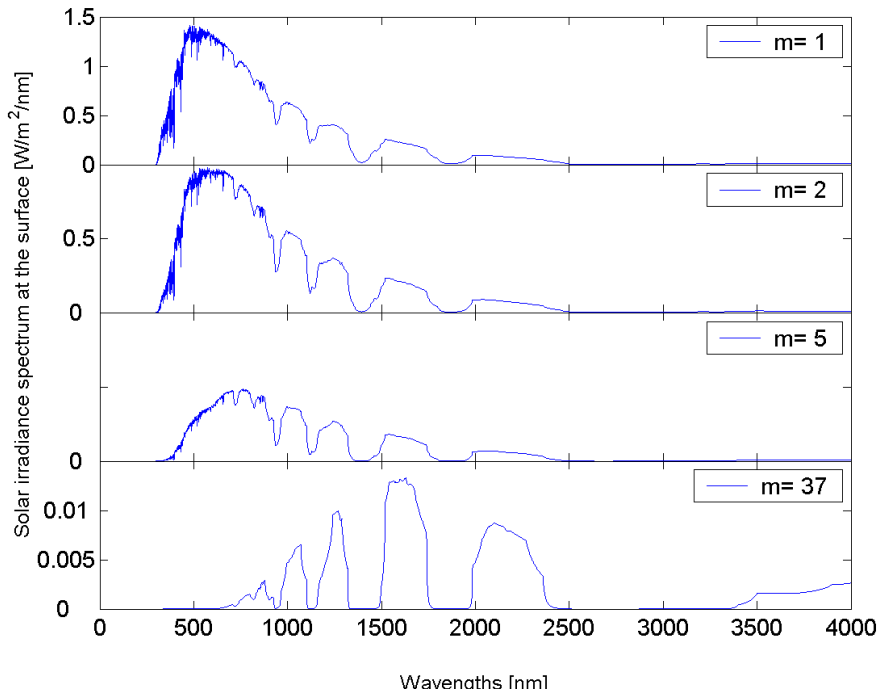
# Prawo Beera dla promieniowania skończonego zakresu spektralnego

- Pomimo, że prawo Beera obowiązuje dla promieniowania monochromatycznego to w atmosferze w zakresie widzialnym i w bliskiej podczerwieni (poza obszarami silnej absorpcji przez parę wodną i tlen) może być stosowane na promieniowania mierzone w zakresie kilku, kilkudziesięciu nm.
- W przypadku pasm o silnej absorpcji promieniowanie o szerokości kilku nm nie podlega prawu Beera.
- Podobnie jest z promieniowania szerokopasmowym mierzonym np. przy użyciu pyrhelimetrów (0.3-2.8  $\mu\text{m}$ )
- W tym przypadku tzw. szerokopasmowa transmisja wykazuje zależność od kąta zenitalnego słońca - efekt Forbesa

$$T_m = \left( \frac{I_{\text{dir}}}{I_0} \right)^{1/m}$$

$I_{\text{dir}}$  – natężenie promieniowania bezpośredniego docierającego do powierzchni ziemi,  $I_0$  natężenie promieniowania słonecznego na górnej granicy atmosfery (stała słoneczna)

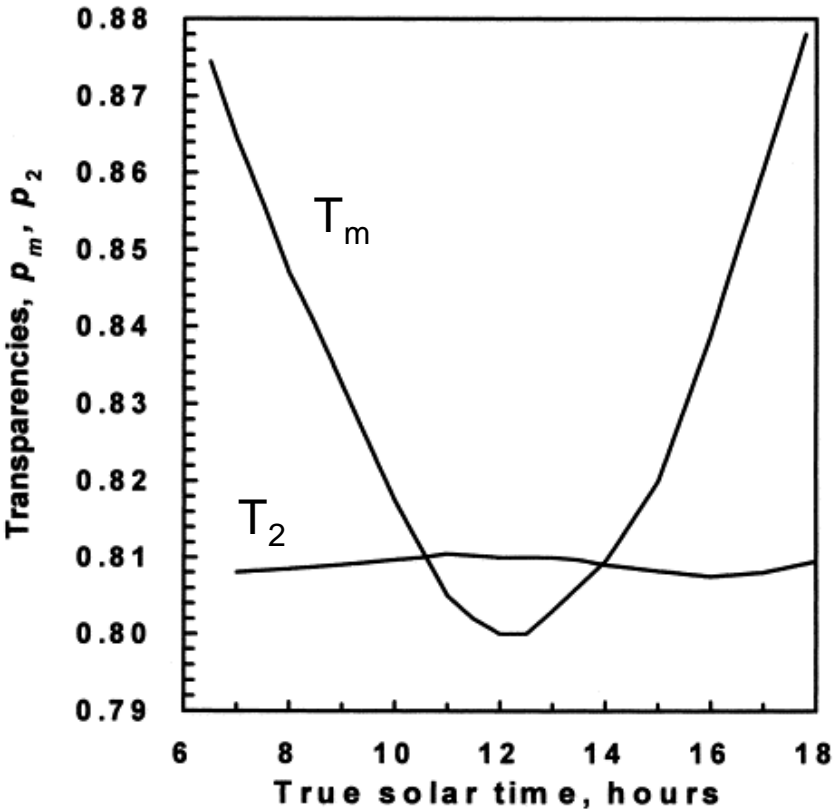
# Zmiana widma bezpośredniego promieniowania słonecznego z masą optyczną



# Normalizacja danych – efektu Forbesa

Istnieje wiele formuł empirycznych, dość często stosowanym jest wzór Ohvriła i inn., 1999

$$T_2 = T_m \left( \frac{2}{m} \right)^{\frac{\log p_m + 0.009}{\log m - 1.848}}$$



W normalizacja T<sub>m</sub> do T<sub>2</sub> zależy w głównej mierze od:

- (AE) wykładnika Angstroma (AE)
- (PW) zawartości pary wodnej w pionowej kolumnie atmosfery
- (m) masy optycznej atmosfery

Dlatego formuły empiryczne nie są uniwersalne.

$$T_m^m = \frac{\int_0^{\infty} I_0(\lambda) \exp(-m\tau(\lambda)) d\lambda}{\int_0^{\infty} I_0(\lambda) d\lambda}$$

# Pełne równanie transferu

- Prawo Lamberta-Beera opisuje promieniowanie bezpośrednie przychodzące z obszaru tarczy słonecznej.
- Nie może być stosowane do opisu promieniowania rozproszonego dochodzące do powierzchni Ziemi lub detektorów satelitarnych.
- Pełne równanie transferu promieniowania jest bardziej skomplikowane gdyż musimy uwzględnić rozpraszanie, które prowadzi nie tylko do osłabienia ale i wzrostu promieniowania.
- Ponadto musi uwzględniać procesy spontanicznej emisji promieniowania podczerwonego

# Równanie transferu

Zmiana radiancji związana jest z dwoma procesami: emisja (zgodnie z prawem Kirchhoffa) oraz rozpraszaniem promieniowanie, które pierwotnie poruszało się w innym kierunku.

$$dI_{\nu} = dI_{\nu}(\text{emisja}) + dI_{\nu}(\text{ekstynkcja})$$

W pierwszym przypadku wzrost radiancji wzdłuż drogi  $ds$ , wynosi

$$dI_{\nu} = \sigma_a B_{\nu} ds$$

gdzie  $B_{\nu}$  funkcja Plancka,  $\sigma_a$  – współczynnik absorpcji.

- Wzrost radiancji wzdłuż drogi ds wskutek rozpraszania promieniowania w kierunku obserwacji wynosi:

$$dI_v = \sigma_{sca} J_v^s$$

gdzie  $J_v^s$  funkcja źródłowa dla rozpraszania ma postaci

$$J_v^s = \frac{1}{4\pi} \int I(\xi') P(\xi, \xi') d\Omega'$$

gdzie  $P(\xi\xi')$  oznacza funkcję fazową na rozpraszanie pomiędzy kierunkiem  $\xi'$  a  $\xi$ ,  $I(\xi')$  opisuje rozkład radiancji przed rozproszeniem. Funkcja źródłowa opisuje proces wielokrotnego rozpraszania.



# Pełne równanie transferu

$$\mu \frac{dI_v}{d\tau} = -I_v + J_v \quad \mu = \cos \theta$$

$$J_v = (1 - \omega)B_v + \frac{\omega}{4\pi} \int I(\xi') P(\xi, \xi') d\Omega' \quad \text{Funkcja źródłowa}$$

$$\mu \frac{dI_v}{d\tau} = -I_v + (1 - \omega)B_v + \frac{\omega}{4\pi} \int I(\theta', \phi') P(\theta, \phi; \theta', \phi') \sin \theta' d\theta' d\phi'$$

$$\omega = \frac{\sigma_s}{\sigma_e} = \frac{\sigma_e - \sigma_a}{\sigma_e} = 1 - \frac{\sigma_a}{\sigma_e}$$

Albedo pojedynczego rozpraszania

# Warunki brzegowe

- Na górnej granicy atmosfery

$$I^\downarrow(0, \mu, \phi) = F_o^s \delta(\mu - \mu_o) \delta(\phi - \phi_o)$$

- Na powierzchni ziemi poprzez zdefiniowanie współczynnika odbicia BRDF

$$\rho(\vec{\xi}', \vec{\xi}) \equiv \frac{dI_v^\uparrow(\vec{\xi})}{I_v^\downarrow(\vec{\xi}') \cos \theta' d\Omega'}$$

$dI_v^\uparrow(\vec{\xi})$       radiancja promieniowania odbitego od powierzchni ziemi w kąt bryłowy  $d\Omega$  wokół kierunku  $\vec{\xi}$

# Uwagi ogólne

- Różniczkowo-całkowego równania transferu promieniowania nie można rozwiązać analitycznie
- Można to jedynie zrobić w pewnych szczególnych przypadkach:
  - przybliżenie pojedynczego rozpraszania (przypadek cienkiej optycznie atmosfery)
  - przybliżenie dwu strumieniowe (przypadek grubej optycznie atmosfery)

# Rozwiązanie równania transferu w zakresie podczerwieni termalnej

- Ze względu na fakt, iż widmo promieniowania słonecznego jest niemal rozłączne z widmem promieniowaniem ziemskiego uzasadnionym staje się rozpatrywanie tych przypadków osobno.
- Rozważmy promieniowanie termalne (ziemskie) i założmy, że procesy rozpraszania w tym przypadku mogą być pominięte.
- Założenie to jednak może być niespełnione, gdyż duże cząstki, które nie absorbują całkowicie promieniowania (np. krople chmurowe, kryształy lodu czy cząstki piasku) mogą efektywnie rozpraszać promieniowanie w oknie atmosferycznym. Pomijając tą sytuację równanie transferu promieniowania długofalowego ma postać

$$\frac{dI_v}{d\tau} = -I_v + B_v(T) \quad \text{równania Schwarzschilda}$$

$$d\tau = k_\lambda \rho ds$$

gdzie  $k_\lambda$  jest masowym współczynnikiem absorpcji [ $\text{m}^2 \text{kg}^{-1}$ ], który zależy od temperatury i ciśnienia atmosferycznego (ze względu na poszerzenie linii widmowych).

# Oznaczenia

Rozwiązując równanie transferu wydziela się część promieniowania idącego w górę (promieniowanie oddolne) oraz idące w dół (odgórne)

$$I_v^{\uparrow}(\tau, \theta, \phi) \equiv I_v(\tau, \theta < \pi/2, \phi)$$

$$I_v^{\downarrow}(\tau, \theta, \phi) \equiv I_v(\tau, \theta > \pi/2, \phi)$$

# Rozwiązanie równania Schwarzschilda

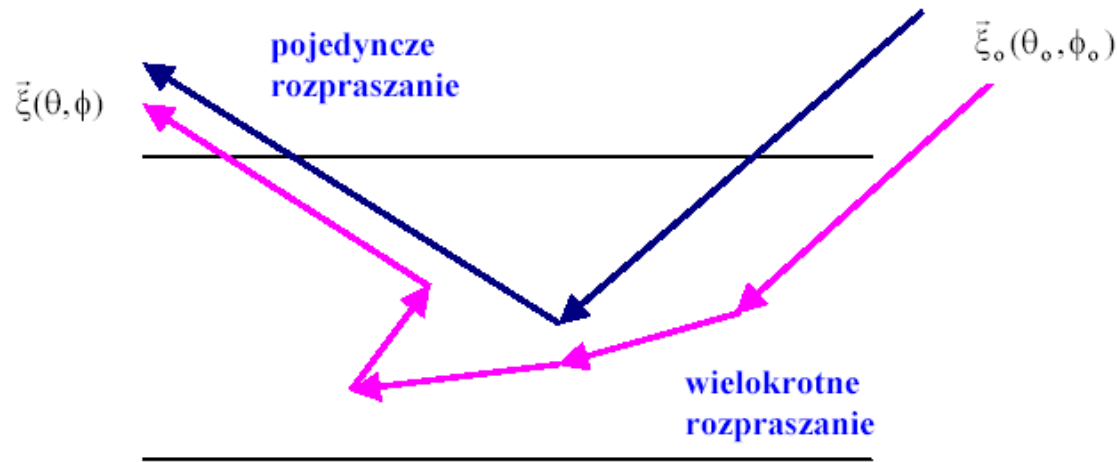
Rozwiązanie dla promieniowania propagujące się w dół (promieniowanie odgórne) oraz w górę (promieniowania oddolne) dane jest wzorami

$$I_{\nu}^{\downarrow}(\tau_*, \mu, \phi) = \int_0^{\tau_*} \frac{d\tau'}{\mu} e^{-(\tau_* - \tau')/\mu} B_{\nu}(\tau')$$

$$I_{\nu}^{\uparrow}(\tau, \mu, \phi) = I_{\nu}^{\uparrow}(\tau_*, \mu, \phi) e^{-(\tau_* - \tau)/\mu} + \int_{\tau}^{\tau_*} \frac{d\tau'}{\mu} e^{-(\tau' - \tau)/\mu} B_{\nu}(\tau')$$

- Pierwszy wyraz dla promieniowania oddolnego jest czynnikiem powierzchniowym oznaczającym emisję promieniowania przez powierzchnię ziemi a następnie jego osłabienie w atmosferze
- Drugi wyraz jest członem źródłowym gdyż opisuje emisję promieniowania w atmosferze.
- Wyznaczenie profili pionowych radiancji i wymaga informacji o profilu temperatury powietrza, ciśnienia, współczynników absorpcji i stosunków mieszania gazów atmosferycznych

# Przybliżenie pojedynczego rozpraszania



Rys. 4.2 Pojedyncze i wielokrotne rozpraszanie w warstwie powietrza.

Założmy, że fotony w czasie swojej wędrówki w atmosferze ulegają rozproszeniu co najwyżej jeden raz. Radiancja na górnej granicy atmosfery ma postać delty Diraca

$$I_{\lambda}^{\downarrow} = F_{o\lambda} \delta(\cos \theta_o - \cos \theta) \delta(\phi_o - \phi)$$

Promieniowanie wchodząc w atmosferę ulega osłabieniu zgodnie z prawem **Lamberta-Beera** stad:

$$I_{\lambda}^{\downarrow} = F_{o\lambda} e^{-\tau/\mu} \delta(\cos \theta_o - \cos \theta) \delta(\phi_o - \phi)$$

# Przybliżenie pojedynczego rozpraszania c.d.

Podstawiając do wzoru na funkcję źródłową otrzymujemy

$$J = \frac{\omega}{4\pi} F_o^s P(\theta, \phi; \theta_o, \phi_o) e^{-\tau/\mu_o}$$

W ogólnym przypadku w funkcji źródłowej możemy wydzielić część związaną a pojedynczym i wielokrotnym rozpraszaniem

$$J = \frac{\omega}{4\pi} F_o^s P(\theta, \phi; \theta_o, \phi_o) e^{-\tau/\mu_o} + \frac{\omega}{4\pi} \int I(\theta', \phi') P(\theta, \phi; \theta', \phi') \sin \theta' d\theta' d\phi'$$



# Przybliżenie pojedynczego rozpraszania c.d.

Zaniedbując rozproszenia wyższego rzędu funkcja źródłowa dla promieniowania krótkofalowego redukuje się do postaci:

$$J = \frac{\omega}{4\pi} F_o^s P(\theta, \phi; \theta_o \phi_o) e^{-\tau/\mu_o}$$

$$\mu \frac{dI_v^\uparrow(\tau, \mu, \phi)}{d\tau} = I_v^\uparrow(\tau, \mu, \phi) - J_v \quad d\left[ I_v^\uparrow(\tau, \mu, \phi) e^{-\tau/\mu} \right] = -\frac{1}{\mu} e^{-\tau/\mu} J_v d\tau$$

$$I_v^\uparrow(\tau, \mu, \phi) e^{-\tau/\mu} - I_v^\uparrow(\tau_*, \mu, \phi) e^{-\tau_*/\mu} = -\int_{\tau_*}^{\tau} \frac{1}{\mu} e^{-\tau'/\mu} J_v d\tau'$$

Założmy dla uproszczenia że powierzchnia ziemi nie odbija promieniowania

$$I_v^\uparrow(\tau, \mu, \phi) e^{-\tau/\mu} = -\int_{\tau_*}^{\tau} \frac{1}{\mu} e^{-\tau'/\mu} J_v d\tau'$$

Całkując otrzymujemy:

$$I^{\uparrow}(\tau, \mu, \phi) = \frac{\mu_o}{\mu + \mu_o} \frac{\omega}{4\pi} F_o^s P(\theta, \phi; \theta_o \phi_o) \left[ e^{\tau/\mu_o} - e^{-[(\tau_* - \tau)/\mu + \tau_*/\mu_o]} \right]$$

Radiancja na górnej granicy atmosfery ( $\tau=0$ ) ma postać:

$$I^{\uparrow}(\tau, \mu, \phi) = \frac{\mu_o}{\mu + \mu_o} \frac{\omega}{4\pi} F_o^s P(\theta, \phi; \theta_o \phi_o) \left[ 1 - e^{-\tau_* [1/\mu + 1/\mu_o]} \right]$$

W przybliżeniu pojedynczego rozpraszania zakładamy małą grubość optyczną atmosfery ( $\tau \ll 1$ )

$$I^{\uparrow}(\tau, \mu, \phi) = \frac{\mu_o}{\mu + \mu_o} \frac{\omega}{4\pi} F_o^s P(\theta, \phi; \theta_o \phi_o) \tau_* [1/\mu + 1/\mu_o]$$

Ostatecznie

$$I^{\uparrow}(\tau, \mu, \phi) = \frac{\tau_*}{\mu} \frac{\omega}{4\pi} F_o^s P(\theta, \phi; \theta_o, \phi_o)$$

- Promieniowanie dochodzące do satelity jest więc w pierwszym przybliżeniu iloczynem: grubości optycznej atmosfery, albedo pojedynczego rozpraszania oraz funkcji fazowej na rozpraszanie.
- Ponadto zależy od wielkości geometrycznych określających położenie satelity i Słońca (poprzez funkcję fazową).
- Przypadku promieniowania biegnącego w dół mamy podobnie rozwiązanie

$$I^{\downarrow}(\tau, \mu, \phi) = F_o^s e^{-\tau/\mu_o} \delta(\mu - \mu_o) \delta(\phi - \phi_o) + \frac{\mu_o}{\mu_o - \mu} \frac{\omega}{4\pi} F_o^s P(\theta, \phi; \theta_o, \phi_o) [e^{-\tau/\mu_o} - e^{-\tau/\mu}]$$

promieniowanie  
bezpośrednie

promieniowanie  
rozproszone

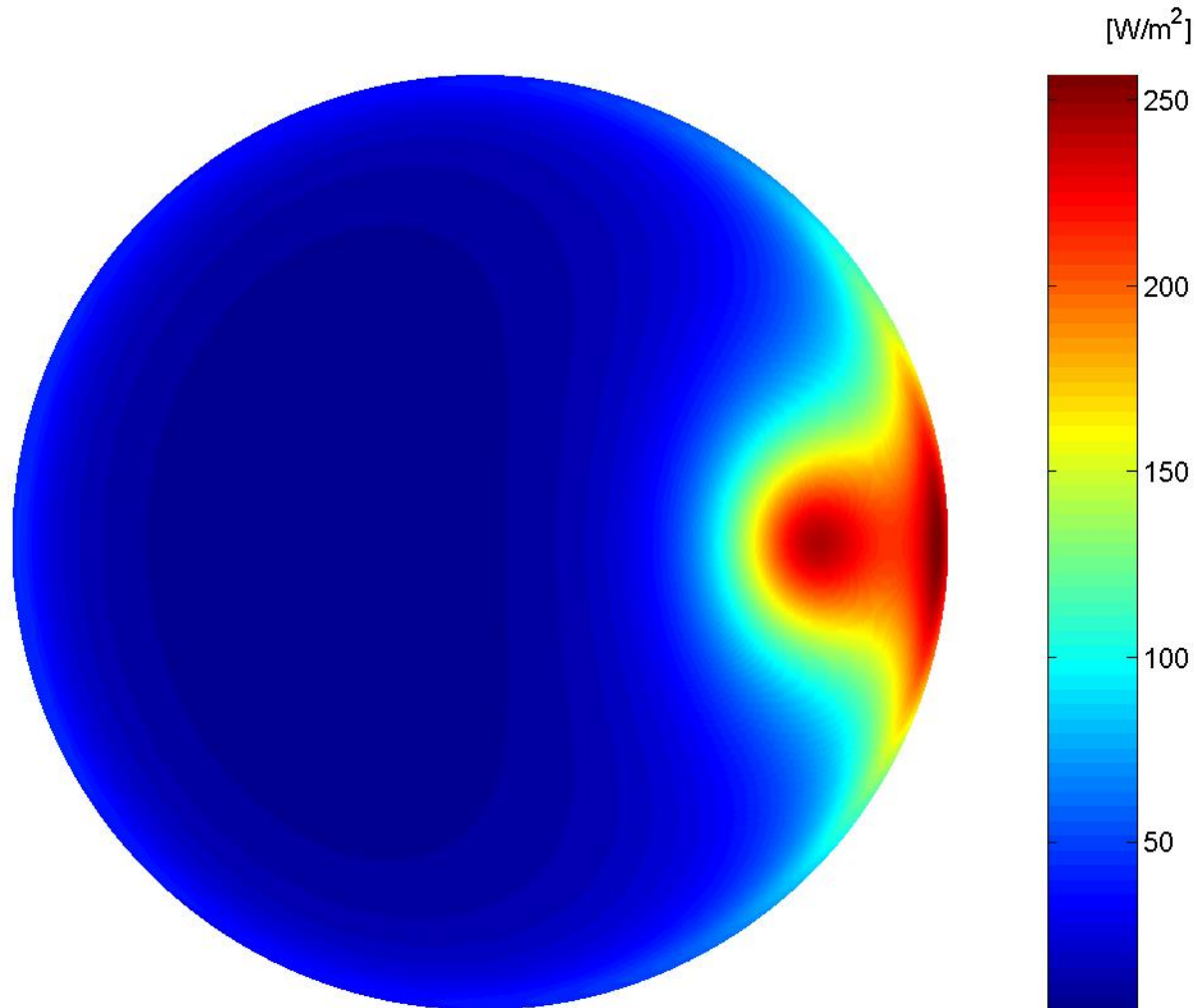
$$I^{\uparrow}(\tau, \mu, \phi) = \frac{\mu_o}{\mu + \mu_o} \frac{\omega}{4\pi} F_o^s P(\theta, \phi; \theta_o, \phi_o) [e^{\tau/\mu_o} - e^{-[(\tau_* - \tau)/\mu + \tau_*/\mu_o]}]$$

# Własności przybliżenia pojedynczego rozpraszania

- stosuje się do warstw cienkich optycznie (grubość optyczna rzędu 0.1)
- poprawne dla dowolnej funkcji fazowej
- łatwo daje się uogólnić uwzględniając polaryzację promieniowania
- może być zastosowane do dowolnej geometrii w szczególności geometrii sferycznej
- stosuję się go jako początkowe rozwiązanie do bardziej złożonych metod
- strumień promieniowania docierający do powierzchni Ziemi wyznaczany jest ze wzoru:

$$F_v^\downarrow = \int I_v^\downarrow \cos(\theta) d\Omega$$

**Przykładowy rozkład radiancji nieboskłonu  
uzyskany przy użyciu przybliżenia pojedynczego  
rozpraszania. Kąt zenitalny Słońca wynosi  $60^\circ$ .**

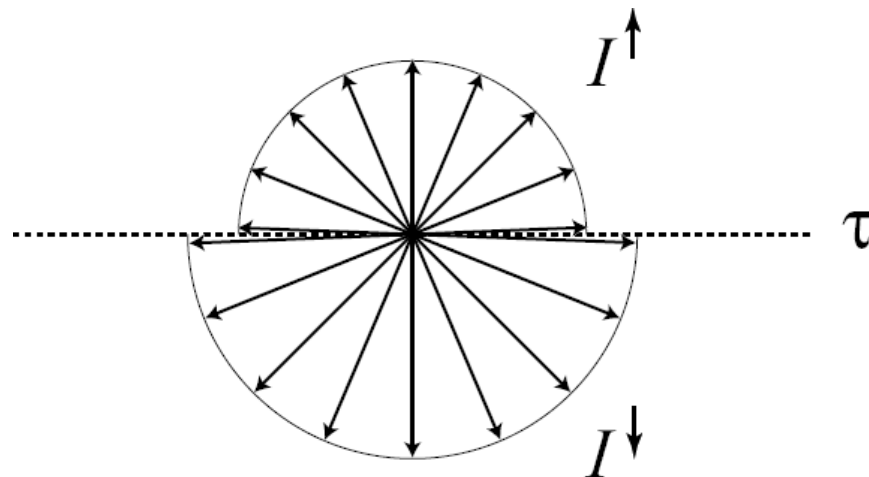


# Przybliżenie dwustrumieniowe

- przybliżenie w którym zakłada się że, radiancja nie zależy od kąta azymutalnego i zenitalnego. Jednak radiancja w górę i w dół ma ogólną wartość.
- Przybliżenie opisuje efekty wielokrotnego rozpraszania w atmosferze i jest używane w wielu zastosowaniach, m.in. w modelach ogólnej cyrkulacji atmosfery oraz w modelach prognozy pogody. Przybliżenie dwustrumieniowe jest najprostszym przybliżeniem opisującym efekty rozproszenia wielokrotnego w atmosferze, których nie da się opisać za pomocą przybliżenia rozpraszania jednokrotnego.

$$I(\mu) = \begin{cases} I^\downarrow & \mu < 0 \\ I^\uparrow & \mu > 0 \end{cases}$$

$$\mu = \cos \theta$$



# Równanie transferu w przypadku azymutalnej izotropii.

$$I(\mu) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I(\mu, \phi) d\phi$$

radiancja uśredniona po kącie azymutalnym

$$P(\mu, \mu') \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\mu, \mu', \Delta\phi) d(\Delta\phi)$$

funkcja fazowa uśredniona po kącie azymutalnym

odpowiadające im uśrednione po zenicie równanie transferu

$$\mu \frac{dI(\mu)}{d\tau} = I(\mu) - \frac{\omega}{2} \int I(\mu') P(\mu, \mu') d\mu'$$

Rozpisując radiancję na część związaną z propagacją w górę i dół:

$$\mu \frac{dI^\uparrow}{d\tau} = I^\uparrow - \frac{\omega}{2} \int_0^1 P(\mu, \mu') I^\uparrow d\mu' - \frac{\omega}{2} \int_{-1}^0 P(\mu, \mu') I^\downarrow d\mu'$$

$I^\downarrow$  oraz  $I^\uparrow$  są stałe więc można je wyciągnąć przed całki

$$\mu \frac{dI^\uparrow}{d\tau} = I^\uparrow - \frac{\omega}{2} I^\uparrow \int_0^1 P(\mu, \mu') d\mu' - \frac{\omega}{2} I^\downarrow \int_{-1}^0 P(\mu, \mu') d\mu'$$

Definiujemy współczynnik rozpraszania wstecznego  $b$

$$b(\mu) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{-1}^0 P(\mu, \mu') d\mu' = 1 - \frac{1}{2} \int_0^1 P(\mu, \mu') d\mu' & \mu > 0 \\ \frac{1}{2} \int_0^1 P(\mu, \mu') d\mu' = 1 - \frac{1}{2} \int_{-1}^0 P(\mu, \mu') d\mu' & \mu < 0 \end{cases}$$

który opisuje jaka jest część promieniowania rozpraszanego wstecznie w stosunku do pierwotnego kierunku propagacji.

$b$  zmienia się w zakresie od 0 do 1.



Równanie transferu przyjmuje postać:

$$\mu \frac{dI^\uparrow}{d\tau} = I^\uparrow - \omega I^\uparrow [1 - b(\mu)] - \omega I^\downarrow b(\mu)$$

Równanie to zależy od zmiennej kątowej  $\mu = \cos\theta$  pomimo, że radiancja  $I^\downarrow$  oraz  $I^\uparrow$  nie zależy od niej. Uśrednimy więc równanie względem  $\mu$

$$\int_0^1 \left[ \mu \frac{dI^\uparrow}{d\tau} = I^\uparrow - \omega I^\uparrow [1 - b(\mu)] - \omega I^\downarrow b(\mu) \right] d\mu$$

co prowadzi do równania:

$$\frac{1}{2} \frac{dI^\uparrow}{d\tau} = I^\uparrow - \omega I^\uparrow [1 - \bar{b}] - \omega I^\downarrow \bar{b}$$

$$\bar{b} = \int_0^1 b(\mu) d\mu$$

lub

$$\frac{1}{2} \frac{dI^\uparrow}{d\tau} = (1 - \omega) I^\uparrow + \omega \bar{b} (I^\uparrow - I^\downarrow)$$

$$\bar{b} = \frac{1 - g}{2} \quad g - \text{parametr asymetrii}$$

## Analogicznie dla promieniowania odgórnego

$$-\frac{1}{2} \frac{dI^\downarrow}{d\tau} = (1-\omega)I^\downarrow - \omega\bar{b}(I^\uparrow - I^\downarrow)$$

wyrażając parametr  $b$  przez parametr asymetrii

$$\frac{1}{2} \frac{dI^\uparrow}{d\tau} = (1-\omega)I^\uparrow + \frac{\omega(1-g)}{2}(I^\uparrow - I^\downarrow)$$

$$-\frac{1}{2} \frac{dI^\downarrow}{d\tau} = (1-\omega)I^\downarrow - \frac{\omega(1-g)}{2}(I^\uparrow - I^\downarrow)$$

dodając i odejmując równania stronami

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau}(I^\uparrow - I^\downarrow) = (1-\omega)(I^\uparrow + I^\downarrow)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau}(I^\uparrow + I^\downarrow) = (1-\omega g)(I^\uparrow - I^\downarrow)$$

- Różniczkując jedno z równań a następnie wykorzystując drugie możemy rozdzielić zmienne

$$\frac{d^2}{d\tau^2} (I^\uparrow + I^\downarrow) = 4(1 - \omega g)(1 - \omega)(I^\uparrow + I^\downarrow)$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} (I^\uparrow - I^\downarrow) = 4(1 - \omega g)(1 - \omega)(I^\uparrow - I^\downarrow)$$

Oba równania mają taką samą postać i można je łatwo rozwiązać:

$$y \equiv (I^\uparrow + I^\downarrow) \text{ lub } y \equiv (I^\uparrow - I^\downarrow)$$

$$\Gamma \equiv 2\sqrt{1 - \omega}\sqrt{1 - \omega g}$$

$$y = \alpha e^{\Gamma\tau} + \beta e^{-\Gamma\tau}$$

# Ogólne rozwiązanie w przybliżeniu 2-strumieniowym

$$I^{\uparrow}(\tau) = Ae^{\Gamma\tau} + Be^{-\Gamma\tau} \quad I^{\downarrow}(\tau) = Ce^{\Gamma\tau} + De^{-\Gamma\tau}$$

Okazuje się, że współczynniki A-D nie są niezależne i relacje pomiędzy nimi mogą być wyznaczone po podstawieniu do równań transferu promieniowania.

Można pokazać, że spełniona jest relacja:

$$\frac{C}{D} = \frac{B}{D} = \frac{2 - \omega - \omega g - \Gamma}{\omega(1 - g)} = \frac{\sqrt{1 - \omega g} - \sqrt{1 - \omega}}{\sqrt{1 - \omega g} + \sqrt{1 - \omega}} \equiv r_{\infty}$$

co prowadzi do równań:

$$I^{\uparrow}(\tau) = Ae^{\Gamma\tau} + r_{\infty}De^{-\Gamma\tau} \quad I^{\downarrow}(\tau) = r_{\infty}Ae^{\Gamma\tau} + De^{-\Gamma\tau}$$

# Warunki brzegowe

- Stałe A i D wyznaczone są na podstawie warunków brzegowych na powierzchni ziemi i na górnej granicy atmosfery. Załóżmy, że albedo ziemi jest zerowe:

$$I^{\uparrow}(\tau = \tau_*) = 0$$

$$I^{\downarrow}(\tau = 0) = I_o$$

co prowadzi do dwóch równań

$$0 = Ae^{\Gamma\tau_*} + r_{\infty}De^{-\Gamma\tau_*}$$

$$I_o = r_{\infty}A + D$$

$$I^{\uparrow}(\tau) = \frac{r_{\infty}I_o}{e^{\Gamma\tau_*} - r_{\infty}^2e^{-\Gamma\tau_*}} \left[ e^{\Gamma(\tau_*-\tau)} - e^{-\Gamma(\tau_*-\tau)} \right]$$

ostatecznie:

$$I^{\downarrow}(\tau) = \frac{I_o}{e^{\Gamma\tau_*} - r_{\infty}^2e^{-\Gamma\tau_*}} \left[ e^{\Gamma(\tau_*-\tau)} - r_{\infty}^2e^{-\Gamma(\tau_*-\tau)} \right]$$

# Przypadek grubej optycznie chmury $\tau_* \rightarrow \infty$

$$I^\uparrow(\tau) = I_0 r_\infty e^{-\Gamma\tau}$$

$$I^\downarrow(\tau) = I_0 e^{-\Gamma\tau}$$

Albedo takiej chmury wynosi:

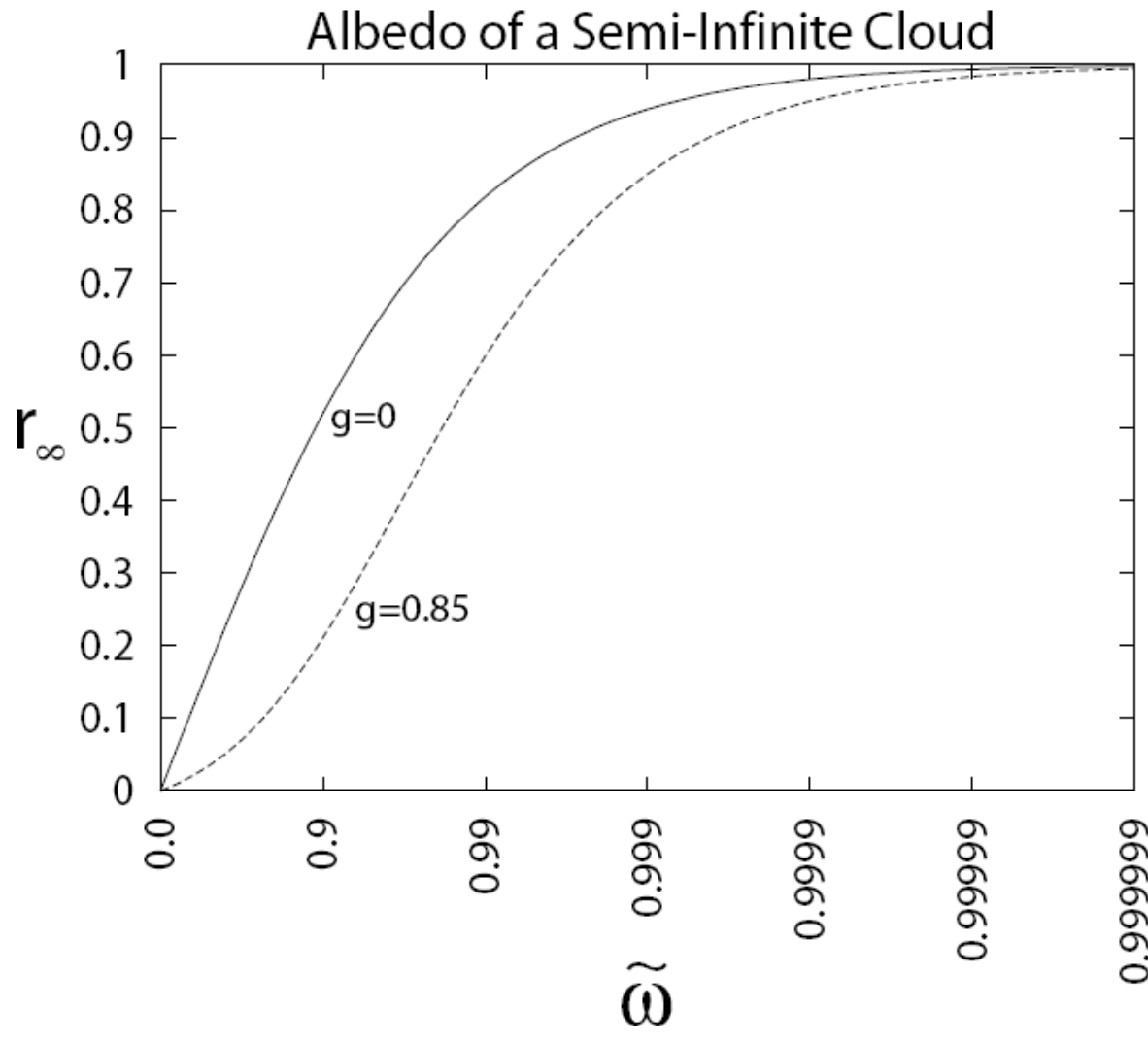
$$A = \frac{F^\uparrow}{F^\downarrow} = \frac{\pi I^\uparrow(0)}{\pi I^\downarrow(0)} = r_\infty$$

$$r_\infty = \frac{\sqrt{1-\omega g} - \sqrt{1-\omega}}{\sqrt{1-\omega g} + \sqrt{1-\omega}}$$

Przypadki:

- 1)  $\omega=1$  wówczas albedo chmury niezależnie od parametru asymetrii  $g$  wynosi 1 (100%),  $r_\infty=1$ .
- 2)  $g=1$  wówczas albedo jest zerowe  $r_\infty=0$  (niezależnie od wartości albedo pojedynczego rozpraszania  $\omega$ ).
- 3)  $\omega=0.999$ ,  $g=0.85$ , wówczas  $r_\infty=0.85$  co oznacza, że 15% promieniowania jest absorbowane przez chmurę! Wynika to z wielokrotnego rozpraszania fotonów w chmurze.

# Albedo chmury w zależności od albedo pojedynczego rozpraszania

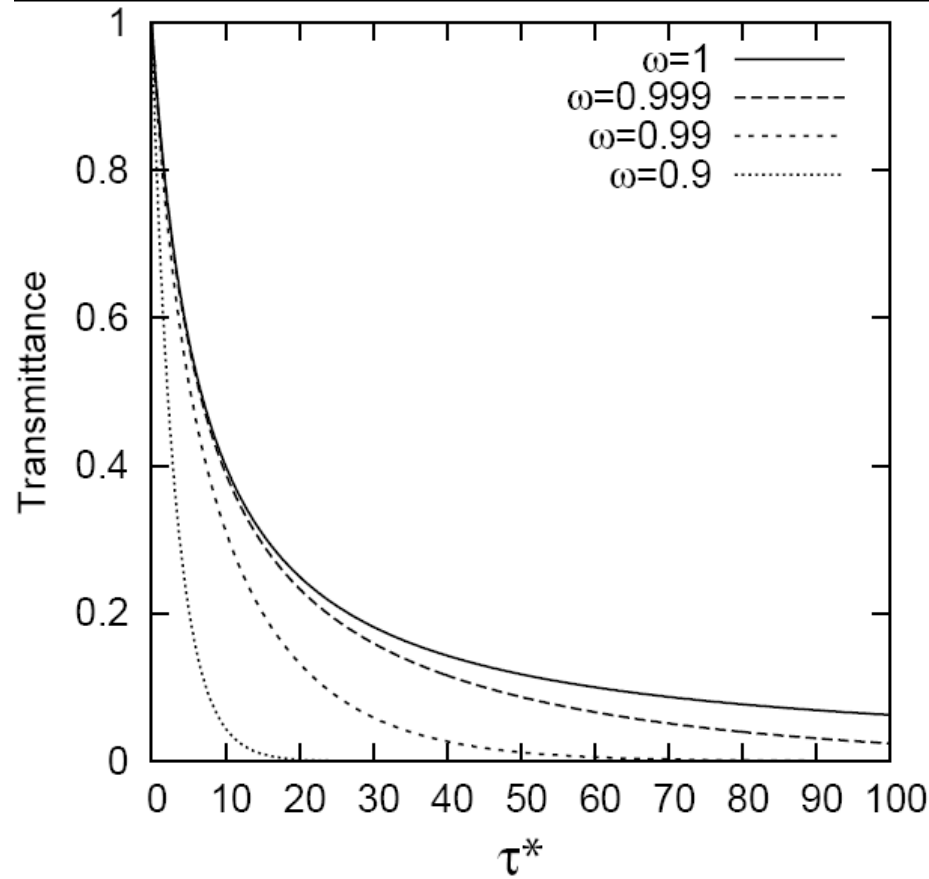
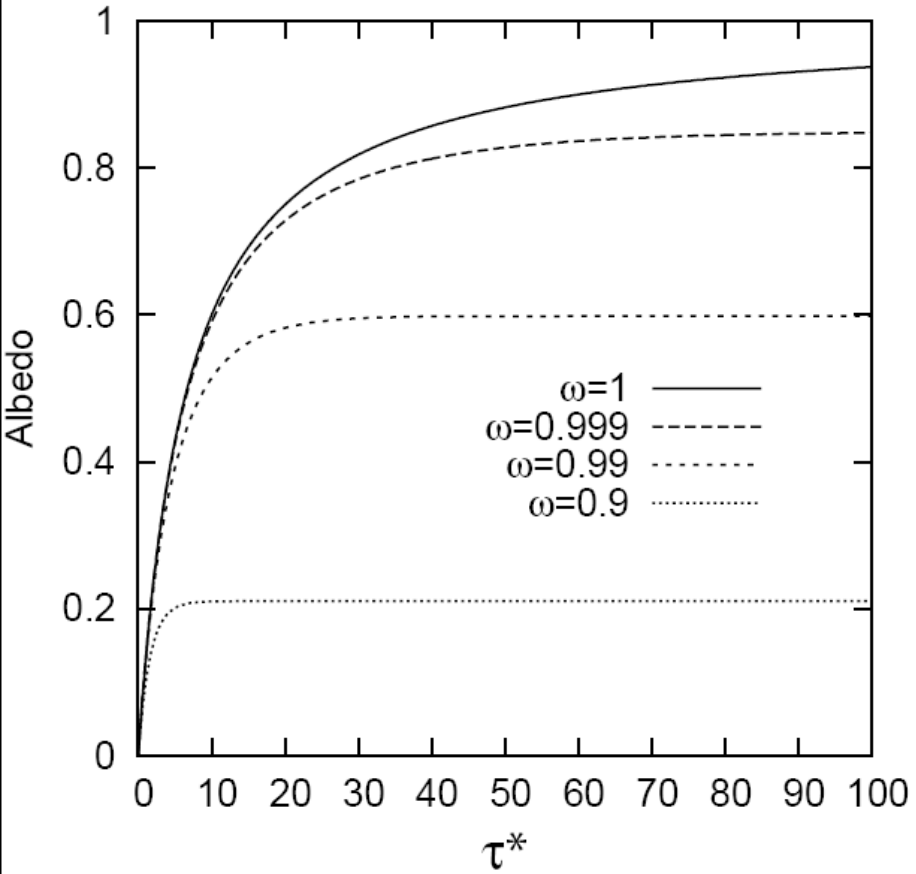


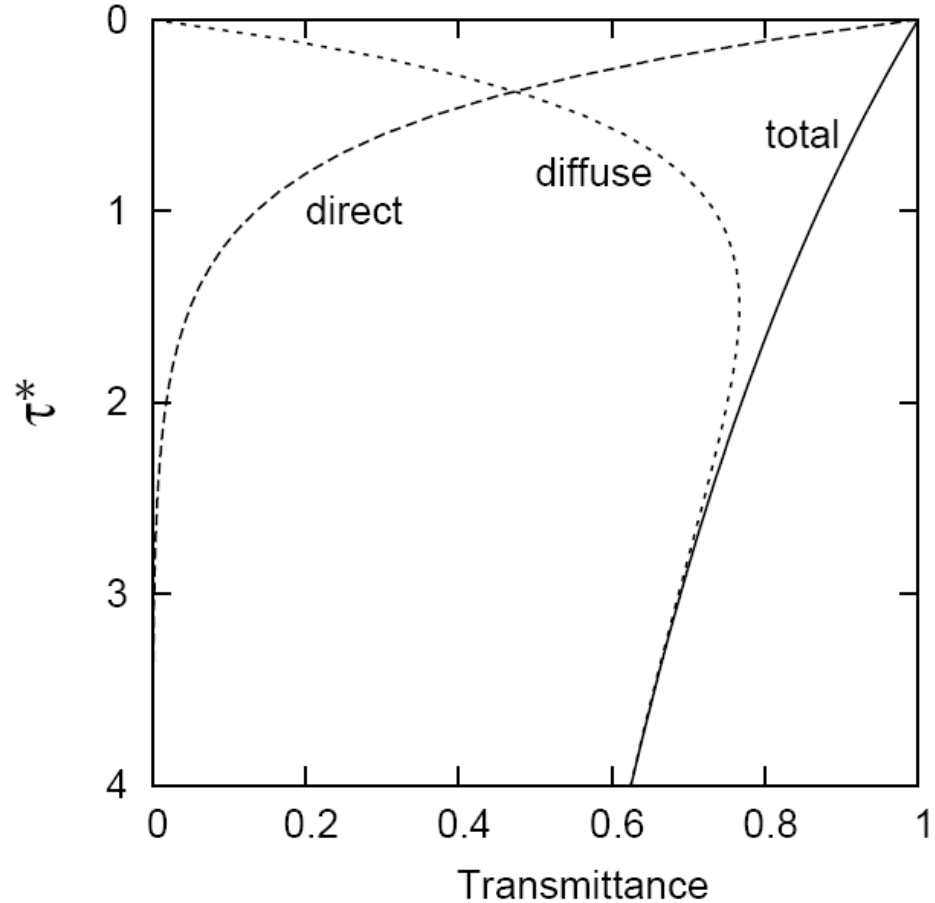
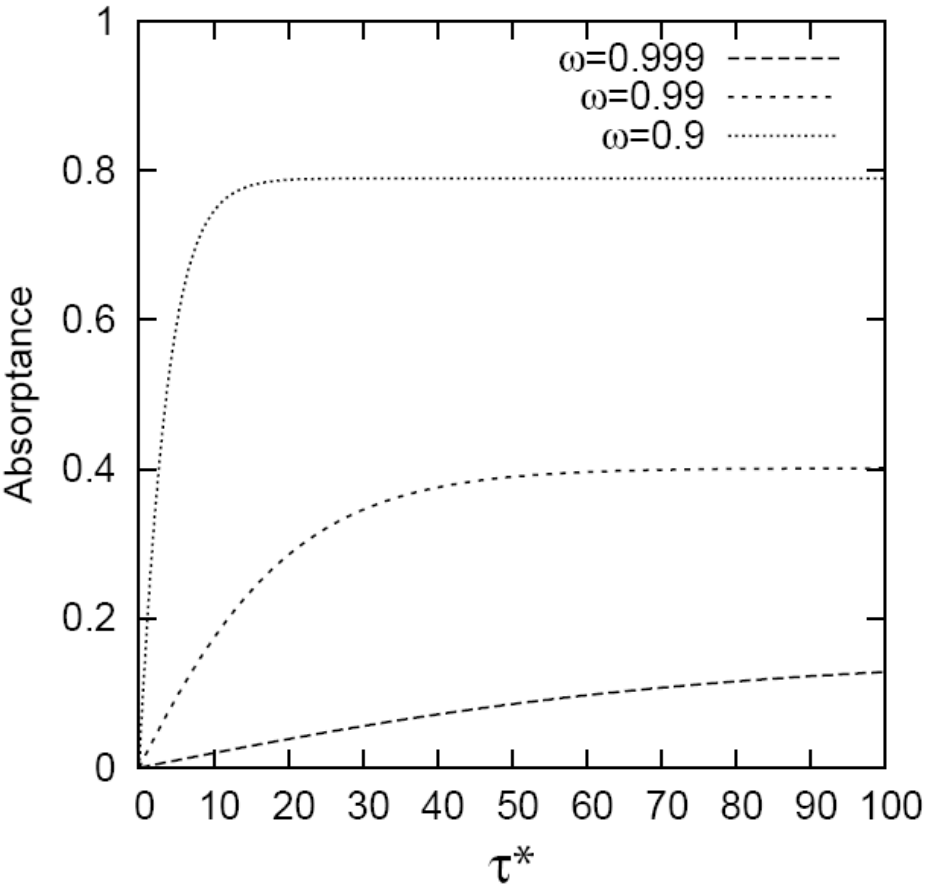
# Albedo i transmisja nieabsorbującej ( $\omega=1$ ) chmury o skończonej grubości optycznej

$$A = \frac{F^\uparrow}{F^\downarrow} = \frac{\pi I^\uparrow(0)}{\pi I^\downarrow(0)} = \frac{(1-g)\tau_*}{1 + (1-g)\tau_*}$$

$$T = \frac{I^\downarrow(\tau_*)}{I^\downarrow(0)} = \frac{1}{1 + (1-g)\tau_*}$$







Transmisja promieniowania bezpośredniego, rozproszonego oraz transmisja całkowita chmury o parametrze asymetrii  $g=0.85$ .

# Własności przybliżenia 2-strumieniowego

- Rozwiązanie wykazuje dobrą dokładności, ale w ograniczonym przedziale zmienności parametrów optycznych.
- Jest bardzo efektywną metodą rozwiązywania równania transferu (metoda bardzo szybka).
- Znacznym ograniczeniem jest kształt funkcji fazowej. Dla dużych cząstek funkcja fazowa ma silne maksimum dla zerowych kątów rozpraszania (rozpraszanie do przodu). Taka postać funkcji jest bardzo słabo przybliżana w metodzie 2-strumieniowej dlatego stosuje się przybliżenie delta-Eddingtona. Polega ono na modyfikacji polegający na założeniu że fotony rozproszone blisko zerowego kąta nie ulegają rozproszeniu i wchodzą w strumień promieniowania rozproszonego.