1100-4BW12, rok akademicki 2019/20

WSTĘP DO OPTYKI FOURIEROWSKIEJ

dr hab. Rafał Kasztelanic

Dyfrakcja

Punktem wyjścia jest równanie Helmholtza: $[\Delta + k^2]U(\boldsymbol{x}) = 0$

Rozwiązanie równania falowego
w postaci fal monochromatycznych

gdzie $k = \dfrac{\omega}{c} = \dfrac{2\pi\nu}{\lambda}$ jest wektorem falowym.

Właściwości danego pola *U* zależą wyłącznie od położenia i czasu: $U(\boldsymbol{x}, t) = Re\{U(\boldsymbol{x})e^{-i\omega t}\}$

Obliczenie własności zespolonego pola *U(**x**)* w dowolnym punkcie przestrzeni ***x*** możliwe jest przy wykorzystaniu funkcji Greena:

$$U(\boldsymbol{x_0}) = \frac{1}{4\pi} \oiint_S [\boldsymbol{\nabla} U(x)\ G(x) - U(x)\ \boldsymbol{\nabla} G(x)]dS$$

Jest to podstawowe równanie skalarnej teorii dyfrakcji (równanie Helmholtza-Kirchhoffa).

Pozwala ono na sprowadzenie problemu dyfrakcji do rozważania pól rozchodzących się bez przeszkód oraz pól pochodzących od przeszkód, które stają się źródłem fal sferycznych.

Całkowanie odbywa się po powierzchni zamkniętej *S,* która otacza dany punkt.

Dyfrakcja

$$div\ U = \nabla \cdot U \equiv \left[\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z}\right]$$

$$\nabla^2 U \equiv \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right]$$

$$grad\ u = \nabla u \equiv \left[\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right]$$

Twierdzenie Gaussa:

$$\underbrace{\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{U}\, dV}_{\text{całkowity wypływ strumienia z objętości V}} = \underbrace{\oint_S \boldsymbol{U}\, ds}_{\text{całkowity wypływ strumienia przez powierzchnię S}}$$

Mamy dwie funkcje ciągłe i dwukrotnie różniczkowalne U i G:

$$\nabla \cdot (U \nabla G) = U \nabla \cdot \nabla G + (\nabla U) \cdot (\nabla G)$$

$$- \quad \nabla \cdot (G \nabla U) = G \nabla \cdot \nabla U + (\nabla G) \cdot (\nabla U)$$

$$\nabla \cdot (U \nabla G - G \nabla U) = U \nabla^2 G - G \nabla^2 U$$

Liczymy teraz całkę po objętości, w której określone są te funkcje:

„Przepływ" w objętości V

$$\iiint_V \nabla \cdot (U \nabla G - G \nabla U) dV = \iiint_V (U \nabla^2 G - G \nabla^2 U) dV$$

Lewą stronę z teorii Gaussa można zastąpić całką po powierzchni:

$$\oiint_S (U \nabla G - G \nabla U)\, dS = \iiint_V (U \nabla^2 G - G \nabla^2 U) dV$$

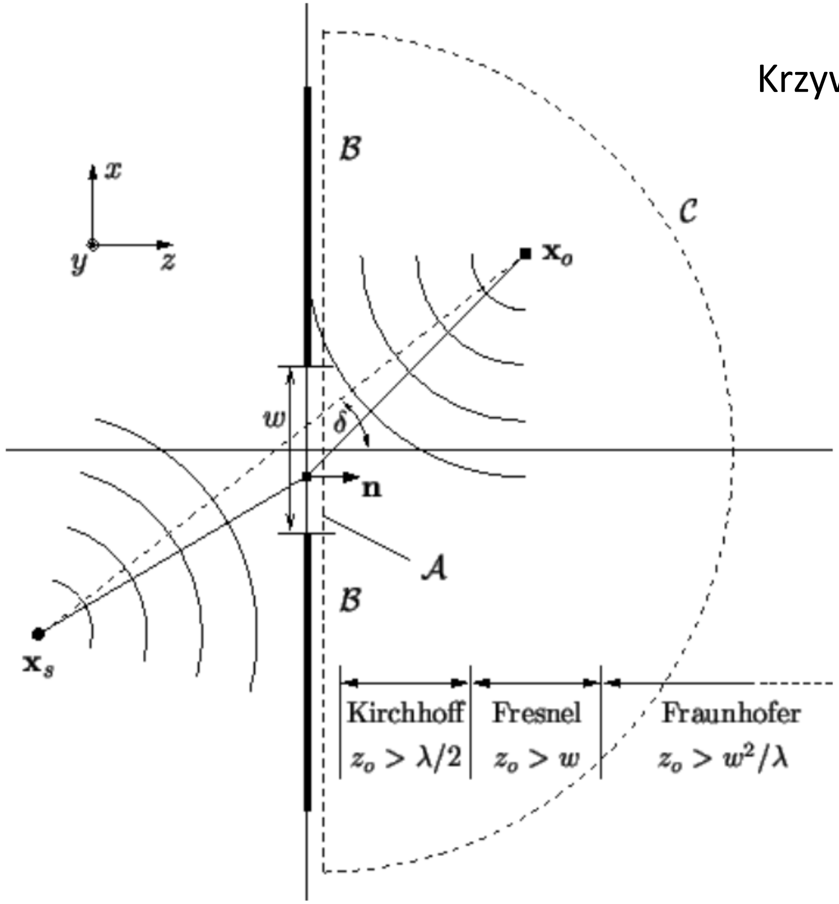
Jeśli gradient policzy się wzdłuż normalnych dostaje się:

Strumień przepływający przez objętość otoczoną powierzchnią S

$$\boxed{\iint_S \left(U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n}\right) dS} = \iiint_V (U \nabla^2 G - G \nabla^2 U) dV$$

Dyfrakcja

Rozważmy dyfrakcję na otworze o wielkości w, fali rozchodzącej się z punktu $\boldsymbol{x_S}$.



Krzywą zamkniętą *S*, po której całkujemy dzielimy na 3 części:

A - Obszar otworu

$$U(x) = U_s(x) \qquad \frac{\partial U(x)}{\partial n} = \frac{\partial U_S(x)}{\partial n}$$

B – Powierzchnia ekranu

$$U(x) = 0 \qquad \frac{\partial U(x)}{\partial n} = 0$$

C – ograniczenie w wolnej przestrzeni

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \|x\| \left(\frac{\partial U(x)}{\partial n} - ikU(x) \right) = 0$$

Warunek Sommerfelda

$$U(\boldsymbol{x_0}) = \frac{1}{4\pi} \iint_{A+C} \left[\frac{\partial U}{\partial n} \frac{e^{ik_0 r_0}}{r_0} - U \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ik_0 r_0}}{r_0} \right] ds$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ik_0 R}}{R} = \left(ik - \frac{1}{R} \right) \frac{e^{ik_0 R}}{R} \approx ik \frac{e^{ik_0 R}}{R}$$

$$\frac{e^{ik_0 r_0}}{r_0} \left(\frac{\partial U}{\partial n} - ikU \right) \rightarrow \lim_{R\to\infty} \frac{e^{ik_0 R}}{R} \left(\frac{\partial U}{\partial n} - ikU \right) = 0$$

Dyfrakcja

Czyli wpływ ekranu i wolnej przestrzeni równy jest 0.
Zostaje tylko OTWÓR W EKRANIE.

$$U(x_0) = -\frac{1}{4\pi} \iint_A \left[\frac{\partial U(x)}{\partial n} G(x) - U_S(x) \frac{\partial G(x)}{\partial n} \right] ds$$

Aby rozwiązać to zagadnienie musimy poczynić kilka założeń.

- Fala wejściowa ma postać fali sferycznej:

$$U_S(x_S) = A_S \frac{e^{ik_0 r_S}}{r_S} \qquad r_S = \|x_S - x\|$$

- Odległość punktu skąd startuje fala wejściowa $\boldsymbol{x_S}$ i punktu obserwacji $\boldsymbol{x_0}$ jest dużo większa niż długość fali:

$$\lambda \ll r_0, r_S$$

- Funkcja G również ma postać fali sferycznej:

$$G(x) = \frac{e^{ik_0 r_0}}{r_0} \qquad r_0 = \|x_0 - x\|$$

Dyfrakcja

Dostajemy:

$$\frac{\partial U_S(x)}{\partial n} \cong ik_0 A_S cos(n, x_S - x)\frac{e^{ik_0 r_S}}{r_S}$$

n – normalna do płaszczyzny otworu

$$\frac{\partial G(x)}{\partial n} \cong ik_0 cos(n, x_0 - x)\frac{e^{ik_0 r_0}}{r_0}$$

i po podstawieniu do równania Helmholtza-Kirchhoffa:

$$\boxed{U(x_0) = \frac{iA_S}{\lambda}\iint_A \frac{e^{ik_0(r_S + r_0)}}{r_S r_0}\left[\frac{cos(n, x_0 - x) - cos(n, x_S - x)}{2}\right] ds}$$

Równanie to jest symetryczne, to znaczy, możemy zamienić punkty x_0 i x_S .
Jest to **twierdzenie o wzajemności Helmholtza**.

Dyfrakcja – Kirchhoffa

Wypisując jawnie współrzędne punktów *(x,y)* otrzymujemy:

$$U(x_0,y_0)=\iint\limits_{x,y} h(x_0,y_0,x,y)U_S(x,y)dx\,dy=\iint\limits_{x,y} h(x_0,y_0,x,y)\frac{e^{ik_S r_S}}{r_S}dx\,dy$$

gdzie:

$$h(x_0,y_0,x,y)=\frac{i}{\lambda}\left[\frac{cos(n,x_0-x)-cos(n,x_S-x)}{2}\right]\frac{e^{ik_0 r_0}}{r_0}$$

czyli dyfrakcja zależna jest od funkcji *h(x_0,y_0,x,y), w której zawarte są informacje o wzajemnym położeniu punktu obserwacji i punktu skąd pochodzi fala padająca oraz od kształtu otworu, o którym informacja zawarta jest w obszarze całkowania.*

Wzór ten jest prawdziwy dla odległości z>λ/2

Jest trudny do praktycznego stosowania, dlatego wprowadza się kolejne przybliżenia.

Wniosek Huygensa – dyfrakcja to złożenie fal kulistych rozchodzących się z płaszczyzny otworu

Z dokładnością do: czynnika 1/λ, czynnika kierunkowego [(cos-cos)/2], fazy π/2

Dyfrakcja – Hyugensa-Fresnela

Przyjmując:

$$\frac{cos(n, x_0 - x) - cos(n, x_S - x)}{2} = 1$$

Prawdziwe jeśli źródło i punkt obserwacji daleko w porównaniu z wielkością otworu

Uzyskujemy:

$$\boxed{U(x_0, y_0) = \frac{i}{\lambda} \iint_{x,y} U(x, y) \frac{e^{ik_S r_S}}{r_S} dx\, dy}$$

Dyfrakcja Hyugensa-Fresnela

czyli złożenie fal kulistych z obrębu otworu

Dyfrakcja Fresnela

Dla dużej odległości ekranu od otworu: $$\frac{e^{ik_0 r_0}}{r_0} \approx \frac{e^{ik_0 r_0}}{z_0}$$

Dodatkowo rozwińmy w szereg Taylora wyrażenia $k_0 r_0$ z równania: $$h(x_0, y_0, x, y) = \frac{i}{\lambda}\frac{e^{ik_0 r_0}}{r_0}$$

$$k_0 r_0 = k_0 \sqrt{z_0^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \boxed{k_0 z_0 \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x - x_0}{z_0}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{y - y_0}{z_0}\right)^2 \mp \cdots\right)}$$

Biorąc tylko człony kwadratowe otrzymujemy:

$$\boxed{h(x_0, y_0, x, y) \cong i\, \frac{e^{ik_0 z_0}}{\lambda z_0}\, e^{i\frac{k_0}{2z_0}\left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right)}}$$ **Dyfrakcja Fresnela**

Przybliżenie prawdziwe dla: $$(2z_0)^3 \gg k_0[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^2_{max}$$

Lub równoważnie: $z_0 \gg w$ gdzie w jest wielkością otworu.

Dyfrakcja Fraunhofera

Pomijając dalej kolejne wyrażenia:

$$k_0 r_0 = k_0\sqrt{z_0^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} =$$

$$= k_0 z_0 \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x - x_0}{z_0}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{y - y_0}{z_0}\right)^2 \mp \cdots\right) =$$

$$= \boxed{k_0\, z_0 \left(1 + \frac{x_0^2 + y_0^2}{2z_0^2} - \frac{xx_0 + yy_0}{z_0^2}\right.} + \left.\frac{x^2 + y^2}{2z_0^2} \mp \cdots\right)$$

uzyskujemy:

$$\boxed{h(x_0, y_0, x, y) \cong i\,\frac{e^{ik_0 z_0}}{\lambda z_0}\, e^{i\frac{k_0}{2z_0}(x_0^2 + y_0^2)}\, e^{i\frac{k_0}{z_0}(xx_0 + yy_0)}}$$

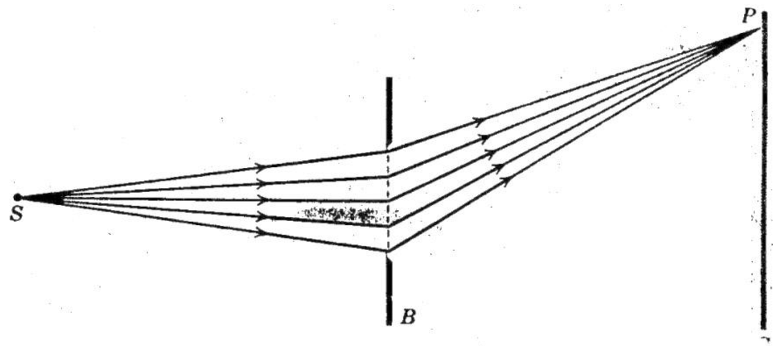
Dyfrakcja Fraunhofera

Przybliżenie prawdziwe dla: $2z_0 \gg k(x^2 + y^2)_{max}$

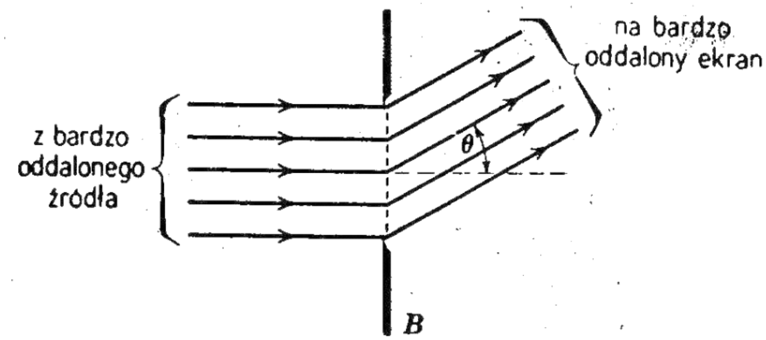
Lub równoważnie: $z_0 \gg \dfrac{w^2}{\lambda}$ gdzie *w* jest wielkością otworu.

Dyfrakcja

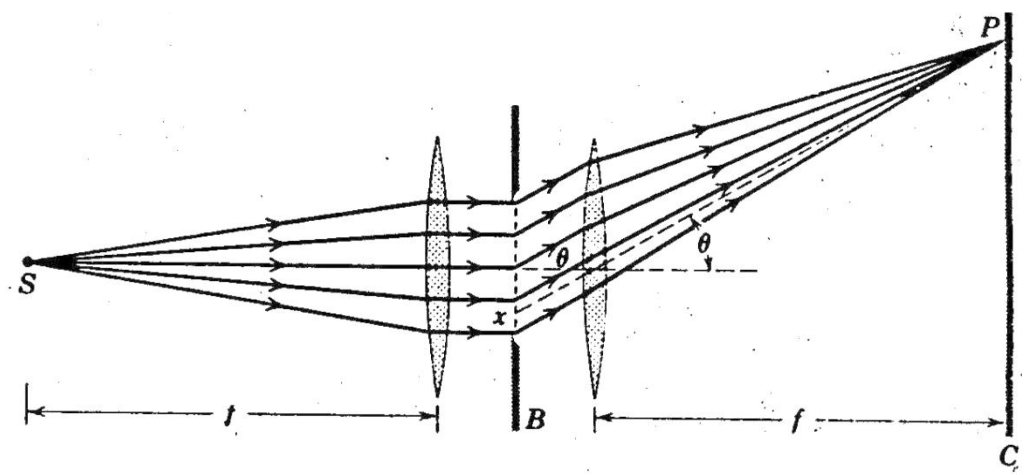
Fresnel:



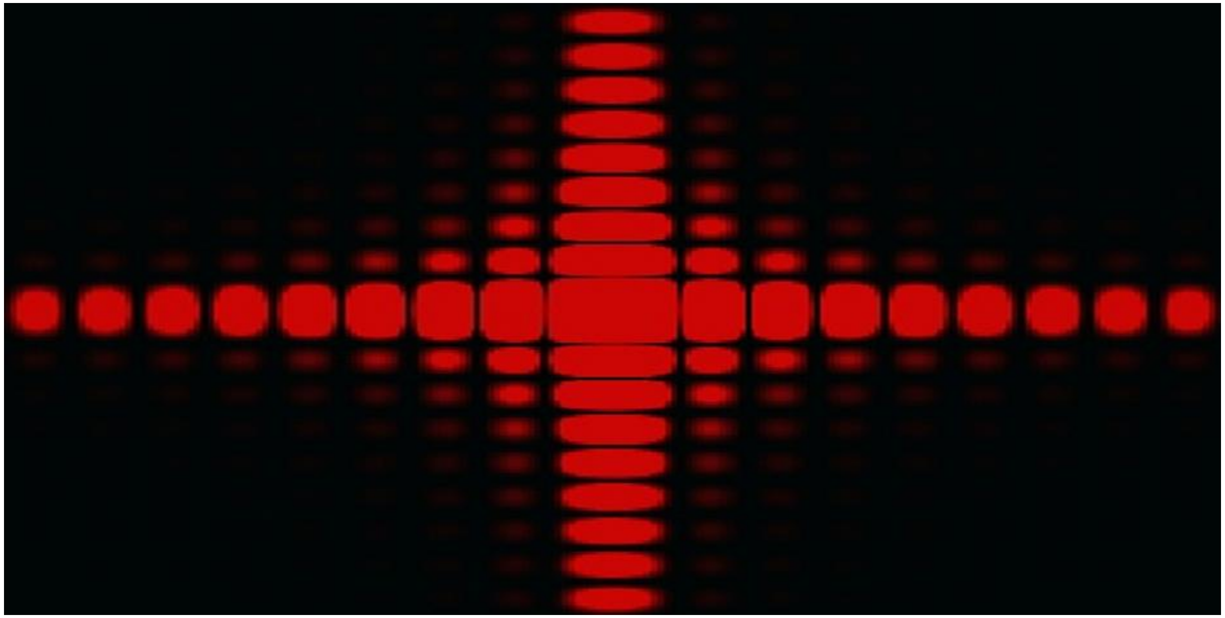
Fraunchhofer:



Sprowadzenie dyfrakcji Fresnela do dyfrakcji Fraunchofera:



Dyfrakcja - przykłady



en.wikipedia.org

es.123rf.com

Dyfrakcja - przykłady

Odbiciowa siatka dyfrakcyjna

Przykładowa siatka – płyta CD
Odległość między ścieżkami: d = 1,6 μm
Liczba linii na mm: N = 625
Długość fali (laser He-Ne): λ = 632,8 nm

Rzędy ugięcia:

$$\theta_k = \arcsin\left(\frac{k\lambda}{d}\right)$$

Czyli:

$$\theta_1 = 23{,}2972$$
$$\theta_2 = 52{,}2791$$
$$\theta_3 = nie\ ma$$

Rozdzielczość siatki dyfrakcyjnej:
Określa możliwość rozdzielenia dwóch długości fali różniących się o Δλ
Maksimum od jednej wypada w pierwszym minimum od drugiej (kryterium Rayleigha)

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{Nd\left|\sin\theta - \sin\theta_0\right|}{\lambda}$$

gdzie:
ϑ_0 – kąt padania wiązki na siatkę

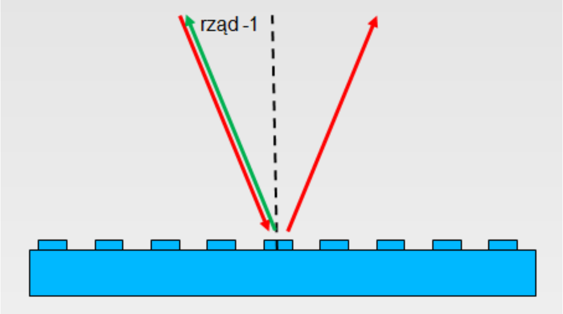
$$\Delta\lambda = 0{,}506\,nm$$

(2 rząd)

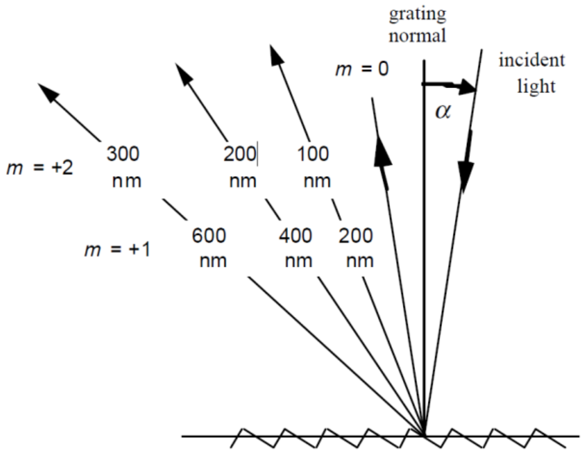
Dyfrakcja

Matlab animacje:

- Wiązka monochromatycza (monograting)
- Światło białe (whitegrating)
    - konfiguracja Litrowa – dla danej długości fali wiązka w danym rzędzie dyfrakcyjnym biegnie jak wiązka padająca – działa dla tej długości fali jak zwierciadło.



- Nakładanie się kolejnych rzędów dyfrakcyjnych



Siatka dyfrakcyjna

Wydajność siatki dyfrakcyjnej:

Stosunek energii padającej na siatkę do energii ugiętej w pierwszy rząd dyfrakcyjny

$$\eta = \frac{I_1}{I_0}$$

Dla siatki amplitudowej: $\eta_{\max} = 6,25\%$

Dyspersja siatki dyfrakcyjnej:

$$D = \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\lambda\cos\beta} .$$

W konfiguracji Littrowa:

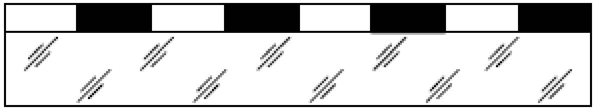
$$D = \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{2}{\lambda}\tan\beta$$

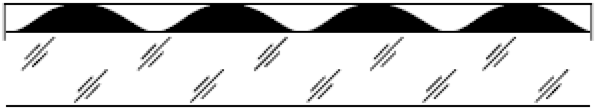
Siatka dyfrakcyjna

Rodzaje siatek dyfrakcyjnych:

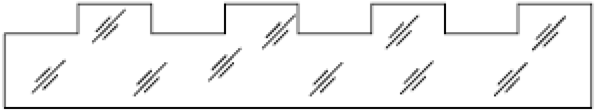
binarne sinusoidalne

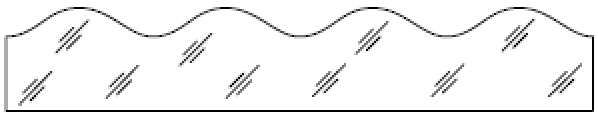
Siatki amplitudowe:



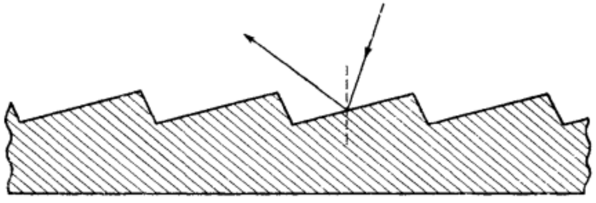


Siatki fazowe:





Siatka typu blazed:



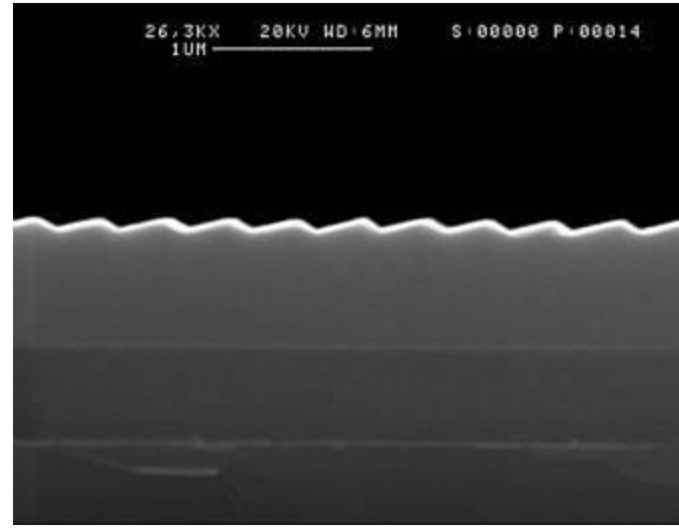
śnie nacinana, karbowana)

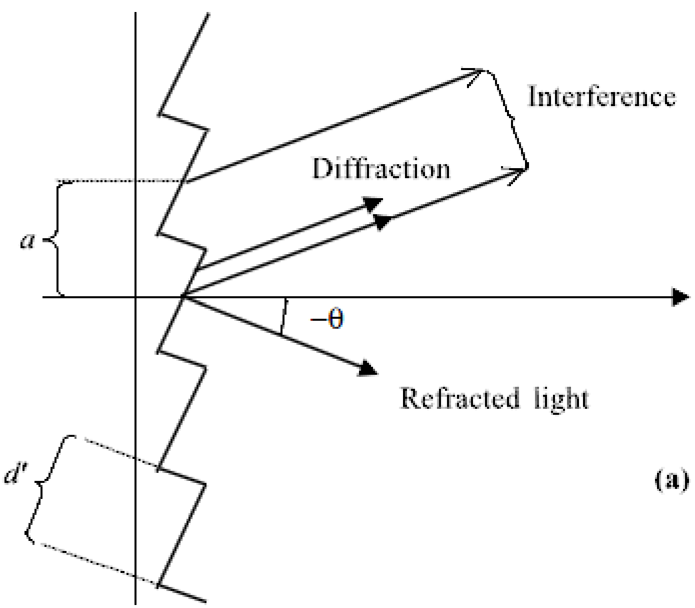
Siatka dyfrakcyjna

Siatka karbowana (blazed):

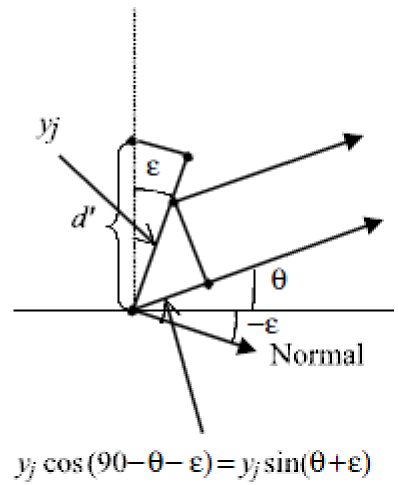
Może być w wersji fazowej i w wersji amplitudowej.

W obu przypadkach opis jak w wersji fazowej – pochylenie wprowadza zmianę fazy





(a)

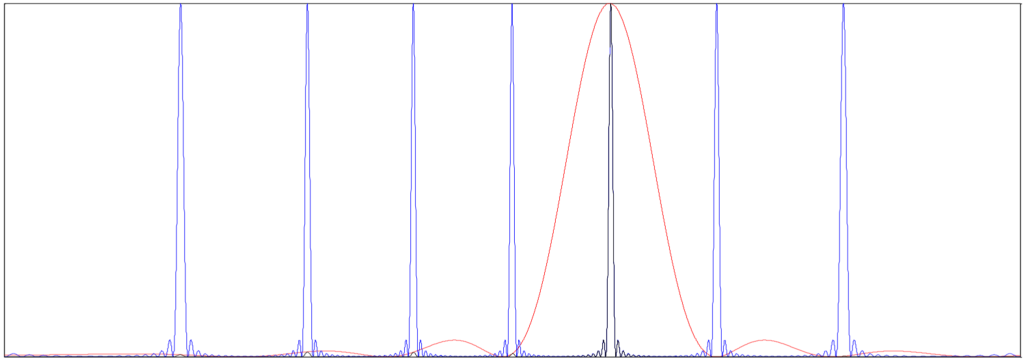


(b)

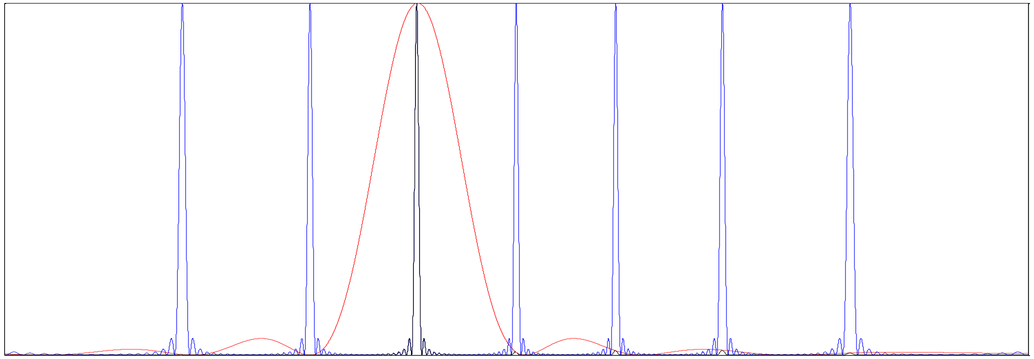
$$I(\theta) = \left[\frac{\sin\left(\pi d \sin(\theta+\varepsilon)/\lambda\right)}{\pi d \sin(\theta+\varepsilon)/\lambda}\right]^2 \left[\frac{\sin\left(\pi N a \sin\theta/\lambda\right)}{N \sin\left(\pi a \sin\theta/\lambda\right)}\right]^2$$

Siatka dyfrakcyjna

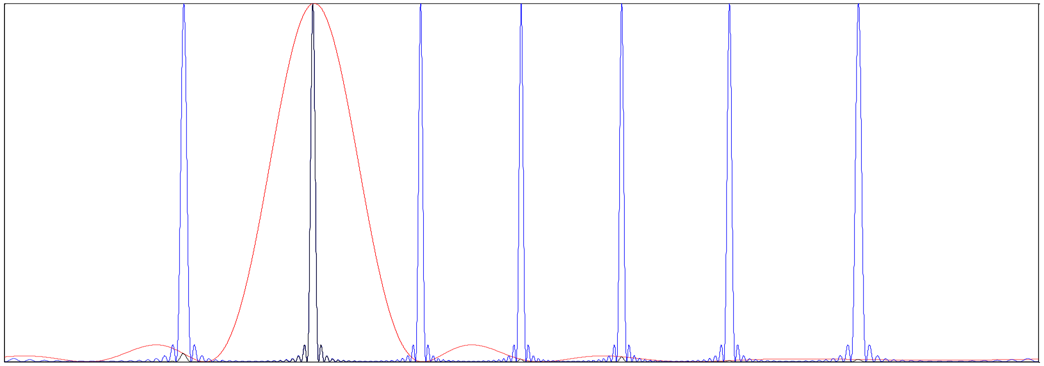
$\varepsilon = -0,25$



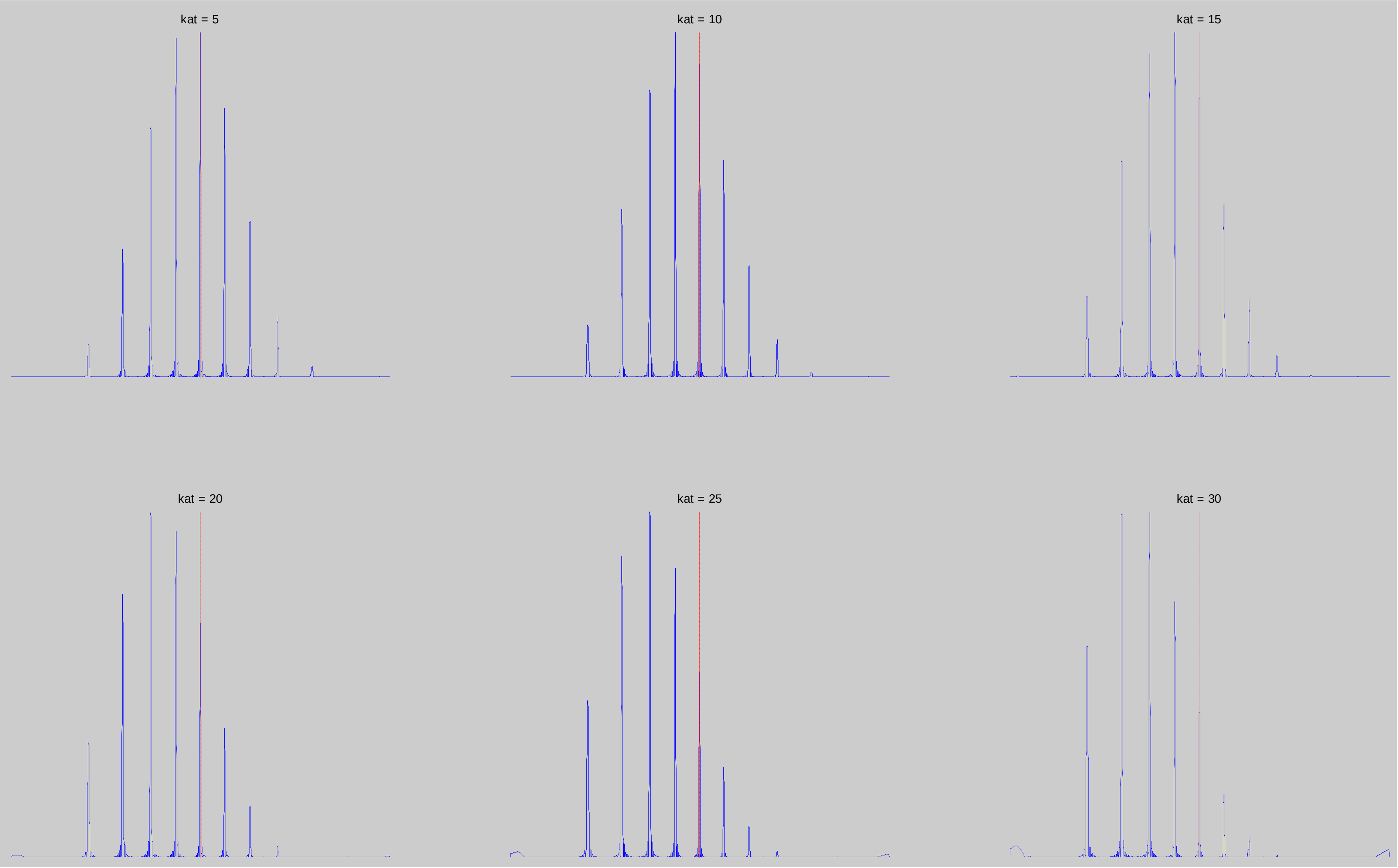
$\varepsilon = 0,25$



$\varepsilon = 0,52$



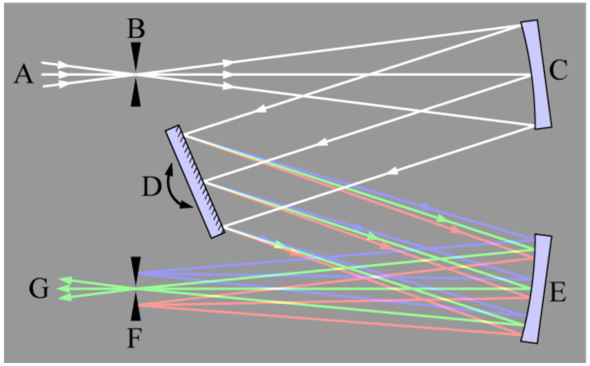
Siatka dyfrakcyjna

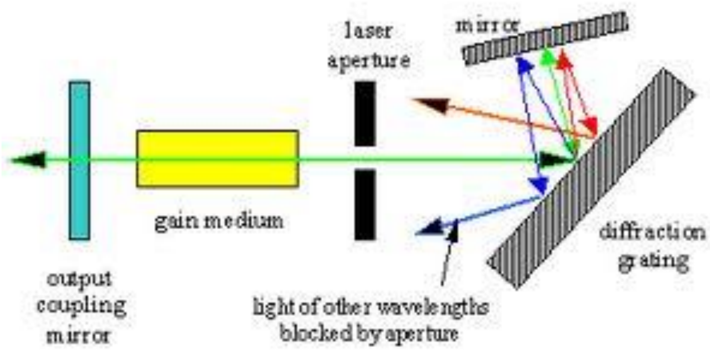


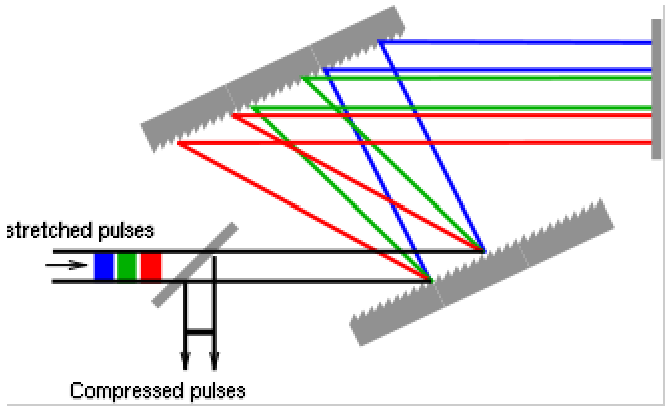
Siatka dyfrakcyjna

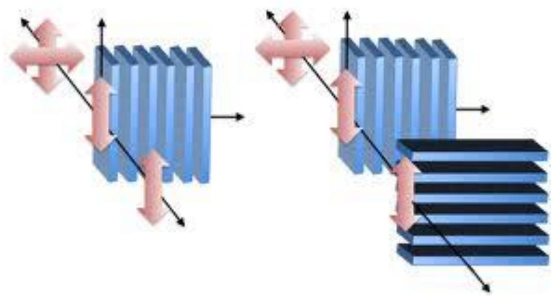
Siatka dyfrakcyjna - zastosowania

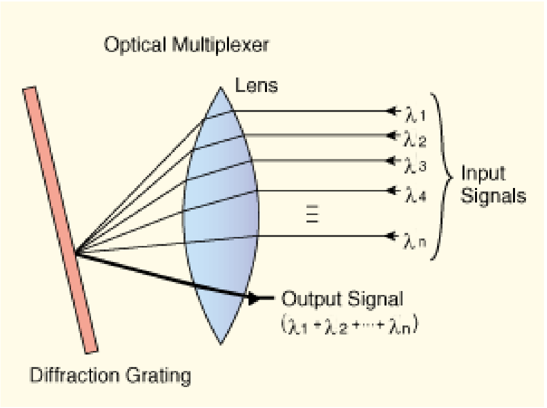
- Spektroskopia
- Monochromator (1)
- Strojenie laserów (2)
- Kompresja impulsów (3)
- Filtracja
- Polaryzator (4)
- Telekomunikacja
- Multiplekser – Demultiplekser (5)
- Dzielnik wiązki – długość fali
- Układy optyczne dla promieniowania X







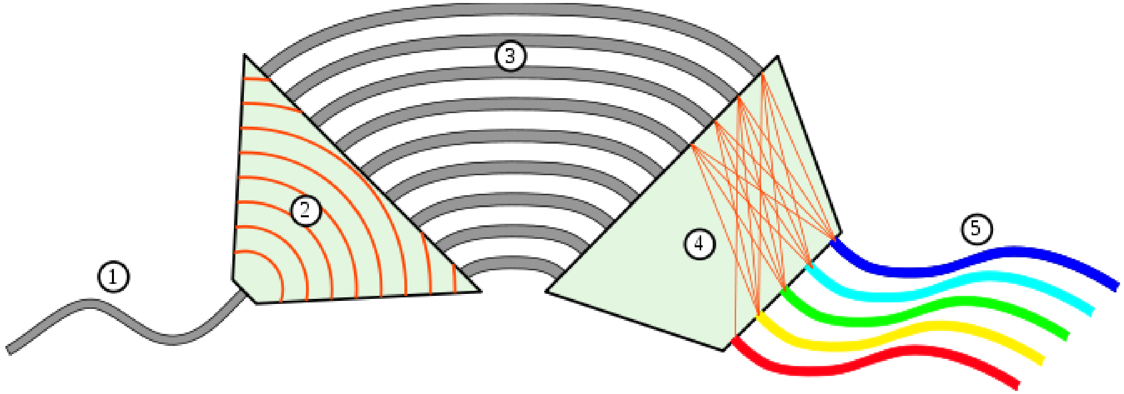


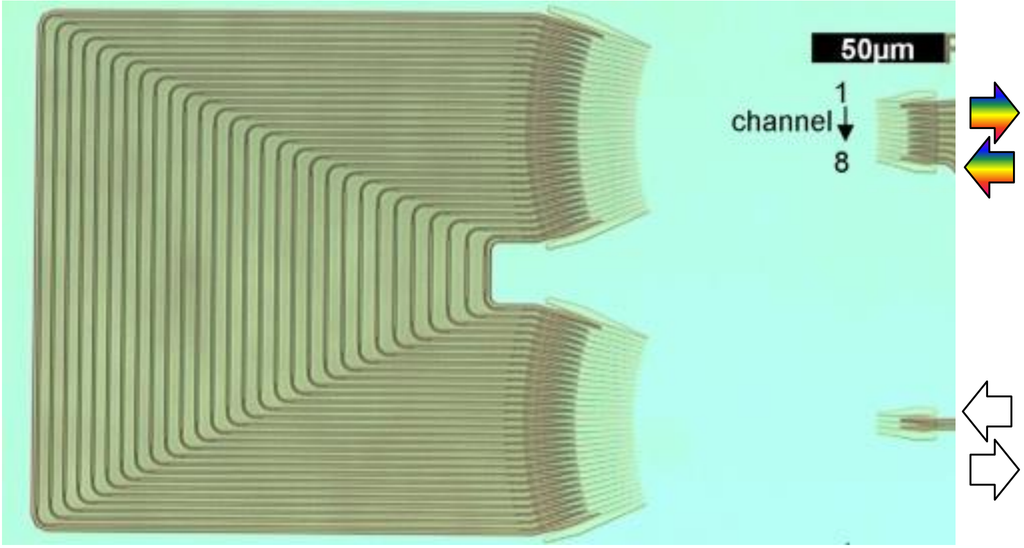


Siatka dyfrakcyjna

Siatka dyfrakcyjna - zastosowania

Multiplekser – Demultiplekser





Wyjście

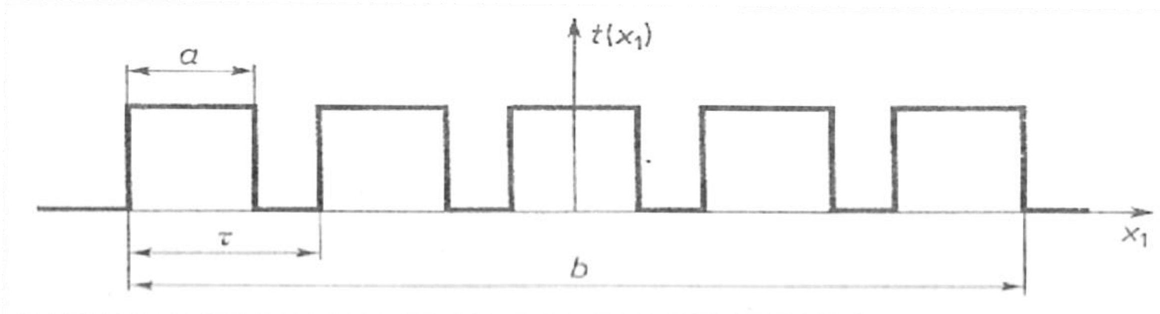
Wejście

Siatka dyfrakcyjna

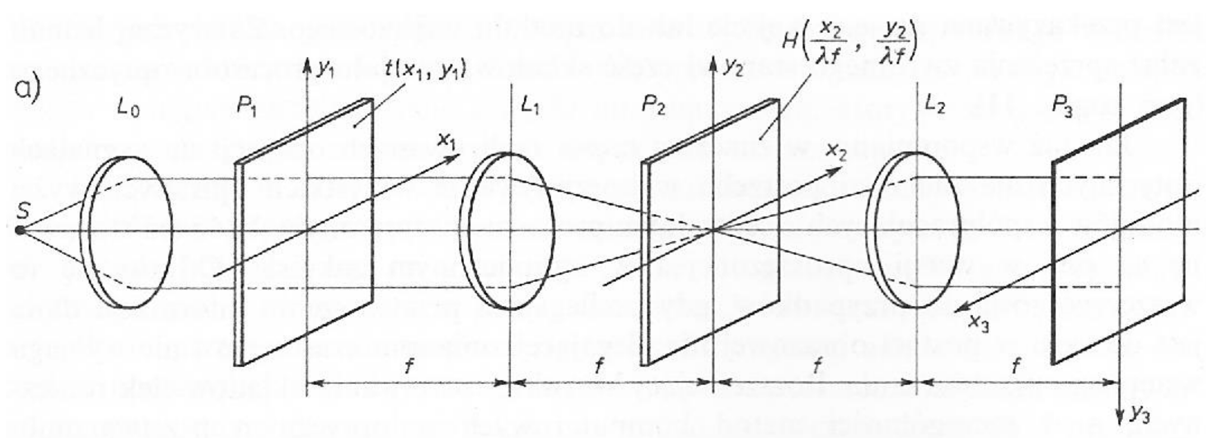
Rozważamy jak zmienia się obraz siatki dyfrakcyjnej po filtracji:

Siatka dyfrakcyjna:

$$t(x_1) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{x_1 - m\tau}{a}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{x_1}{b}\right)$$



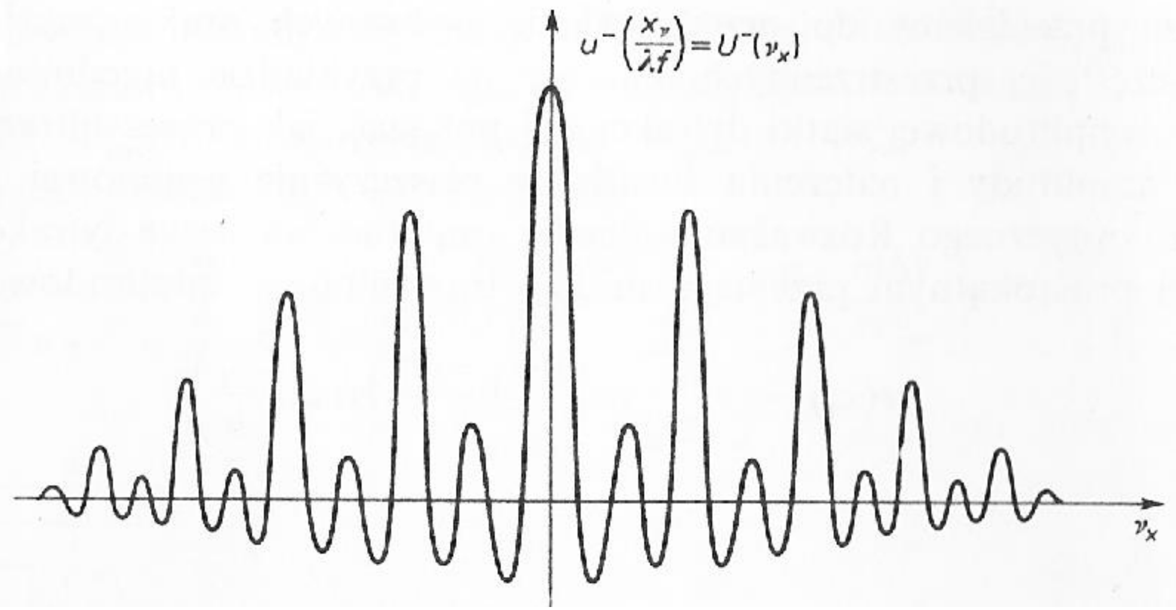
Układ do filtracji:



Siatka dyfrakcyjna

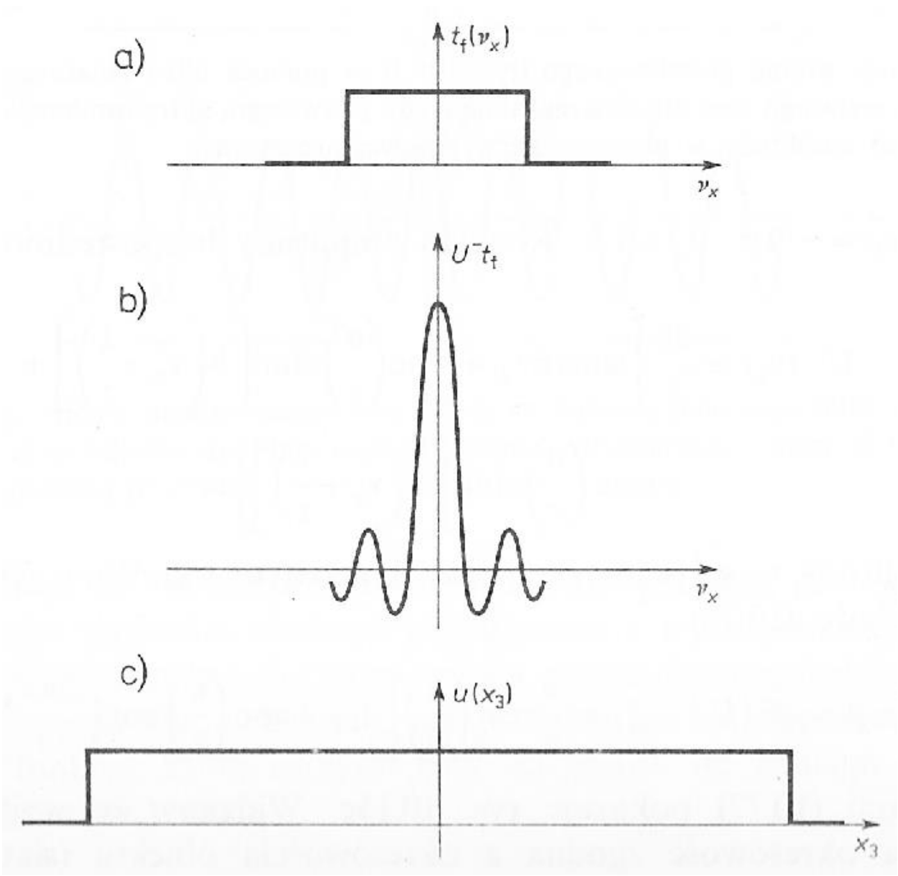
Sygnał w płaszczyźnie fourierowskiej:

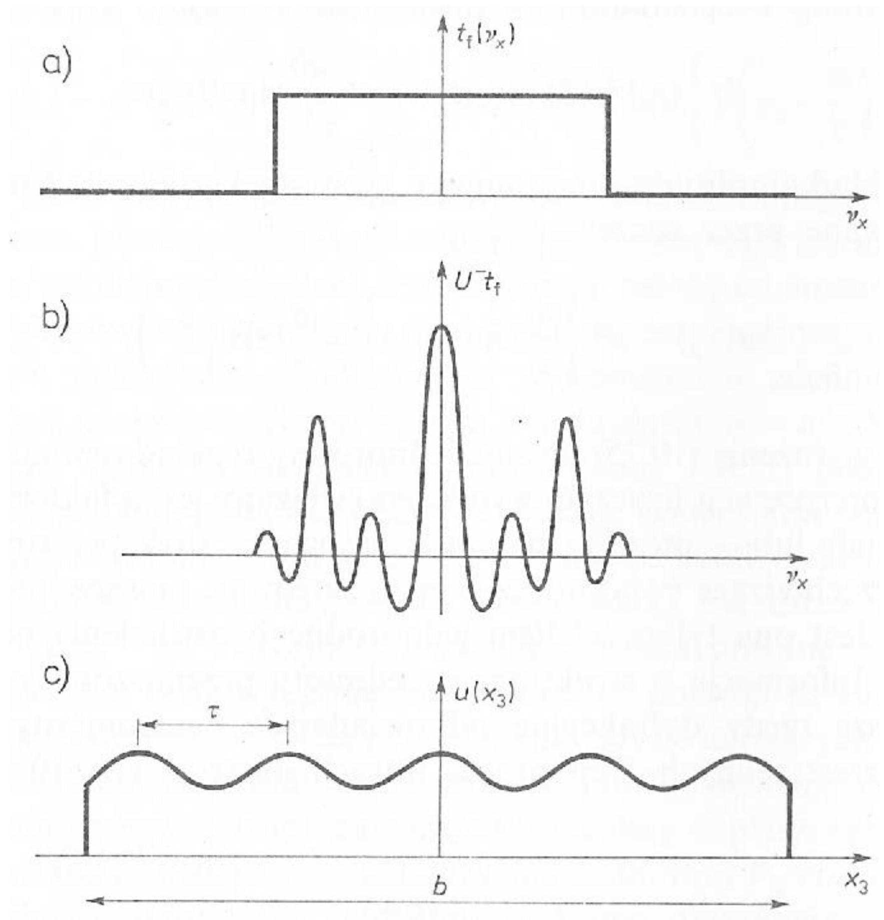
$$U^{-}(\nu_x) \sim \mathscr{F}\{t(x_1)\} = \frac{ab}{\tau} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{am}{\tau}\right) \operatorname{sinc}\left[b\left(\nu_x - \frac{m}{\tau}\right)\right]$$



Siatka dyfrakcyjna

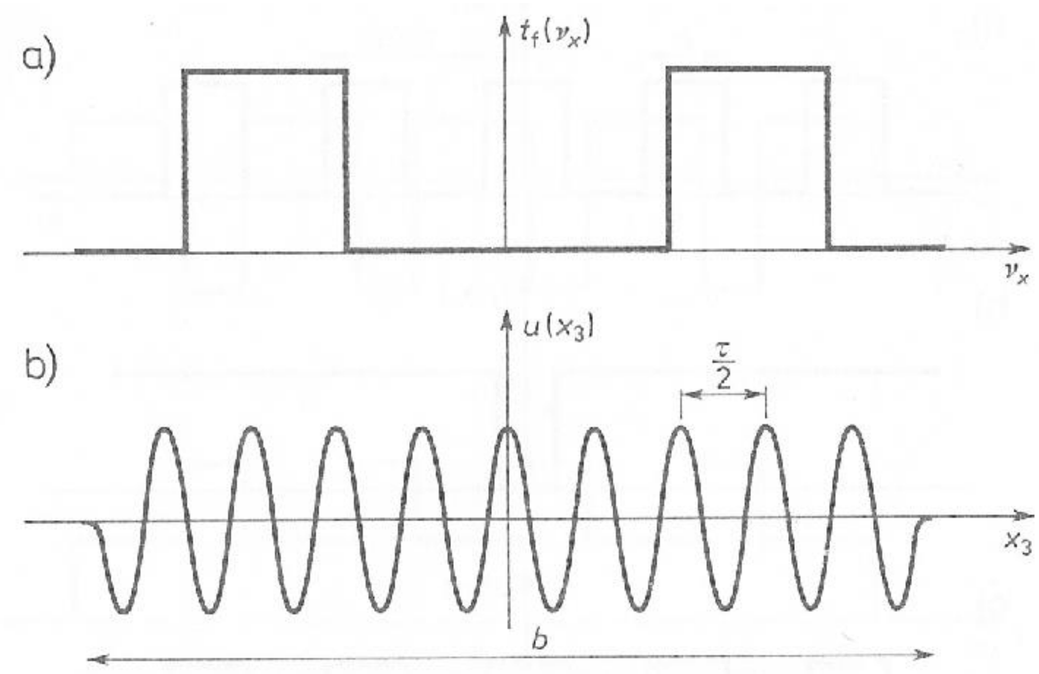
Filtracja dolnoprzepustowa:





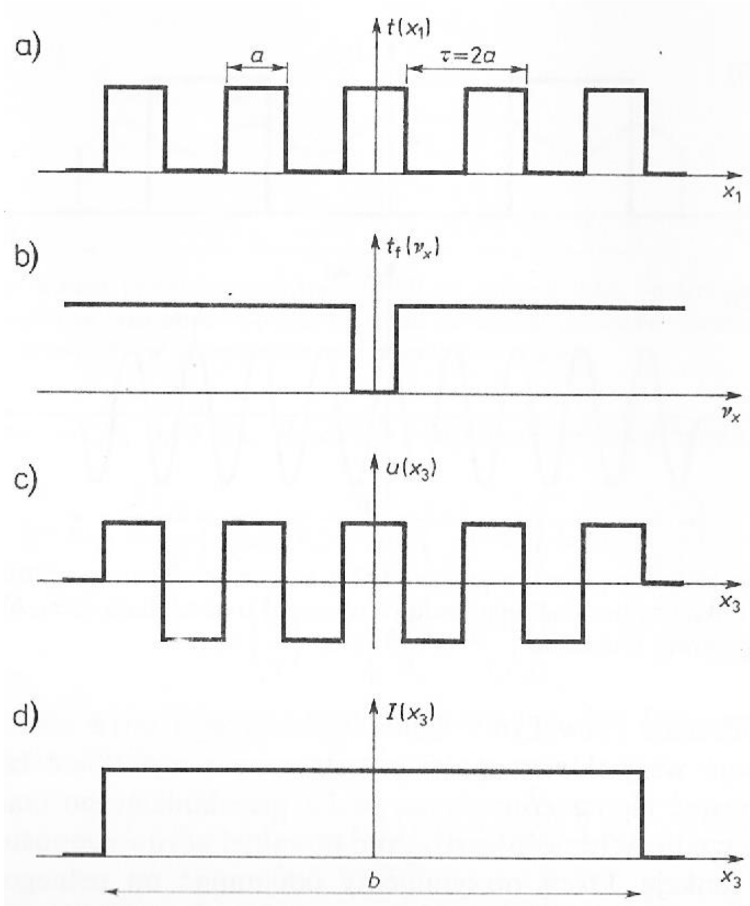
Siatka dyfrakcyjna

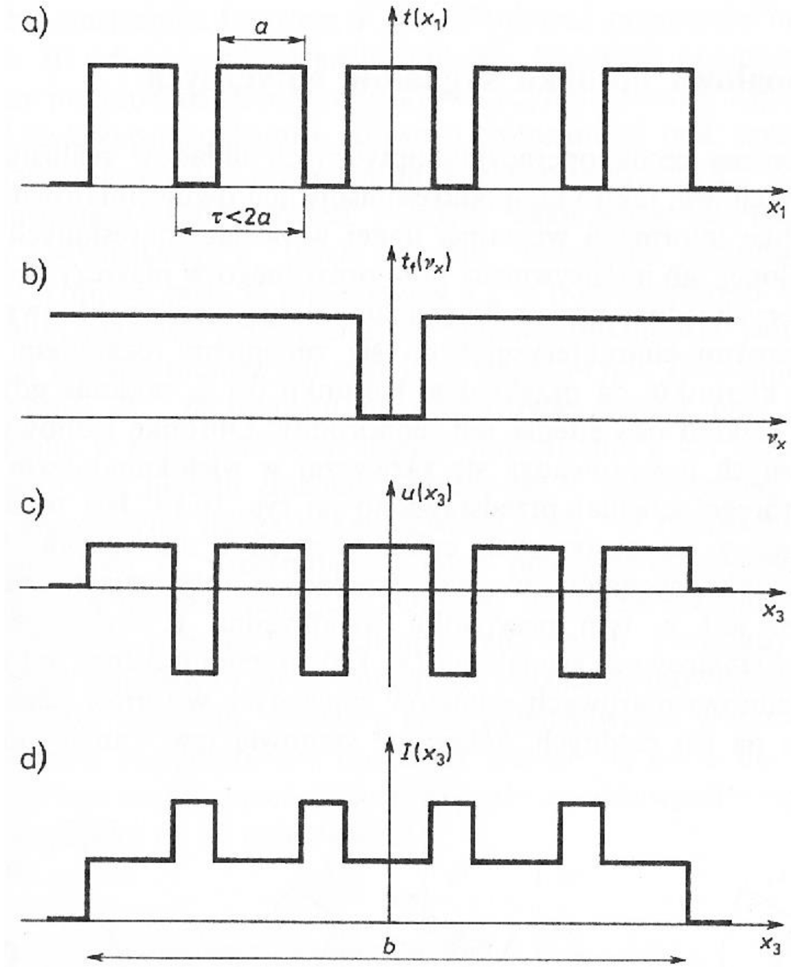
Filtracja środkowoprzepustowa:



Siatka dyfrakcyjna

Filtracja górnoprzepustowa:





Jednorodne natężenie

odwrócenie kontrastu

gui3_2