

1. Wstęp.

Badaniem przepływów w atmosferze oraz ich związków z pogodą i klimatem zajmuje się meteorologia dynamiczna. Zakres skal tych przepływów sięga od bezładnych ruchów właściwych cząsteczkom, aż do cyrkulacji globalnej, obejmującą całą atmosferę. Przepływy atmosferyczne, tak jak ruchy jakichkolwiek obiektów w fizyce klasycznej, podporządkowane są zasadom dynamiki Newtona. Aby zrozumieć zawile własności przepływów atmosferycznych należy znać siły, które oddziałują na cząstkę (objętość próbną) powietrza. Aby mierzyć i porównywać składniki równań ruchu będziemy korzystać z międzynarodowego układu jednostek (SI), gdzie długość wyrażana jest w metrach [m], masa w kilogramach [kg], czas w sekundach [s], temperatura w Kelwinach [K].

2. Metody opisu ruchu.

Do opisu ruchu powietrza można używać dwóch sposobów. Jeden z nich zwany jest opisem metodą Eulera, drugi zaś metodą Lagrange’a.

Metoda Eulera na określeniu właściwości powietrza jako funkcji położenia w przestrzeni $\vec{r}$ i czasu t . Podstawową wielkością charakteryzującą ruch powietrza jest prędkość $\vec{V}$, która zależy od położenia i czasu: $\vec{V}(\vec{r}, t)$. Opis tą metodą można uznać za obraz przestrzennego rozkładu prędkości powietrza w każdej chwili podczas jego ruchu. Oczywiście jeśli skupimy uwagę na określonym elemencie objętości, to powietrze, które wypełnia ten element, będzie się nieustannie zmieniało.

Metoda Lagrange’a traktuje powietrze jako zbiór małych cząstek. Prędkość każdej cząstki jest funkcją czasu. Metoda ta opisuje historię ruchu każdej cząstki powietrza w atmosferze. Niestety nie da się nią w prosty sposób wyznaczyć przestrzennych gradientów prędkości, niezbędnych do określenia oddziaływań między cząstkami, natomiast stosunkowo łatwo jest śledzić ruch każdej cząstki.

Przy rozpatrywaniu przepływów atmosferycznych molekularną naturę powietrza można zignorować i rozpatrywać atmosferę jako ciągły płynny ośrodek czyli continuum materialne. Za „punkt” w continuum uważa się część składową objętości, która jest bardzo mała w porównaniu z objętością atmosfery, ale jednocześnie zawiera dużą liczbę cząsteczek. Wyrażenia objętość próbna powietrza, cząstka powietrza czy pakiet są zwykle używane w odniesieniu do takiego punktu. Zakłada się, że różnorodne wielkości fizyczne opisujące stan atmosfery (np. ciśnienie, gęstość, temperatura) mają określone wartości w każdym punkcie continuum atmosferycznego. Ponadto zakłada się, iż parametry te i ich pochodne są ciągłymi funkcjami przestrzeni i czasu.

Fundamentalne prawa mechaniki płynów i termodynamiki, rządzące ruchami atmosfery mogą więc być wyrażone za pomocą równań różniczkowych cząstkowych, w których parametry pola pełnić będą funkcję zmiennych zależnych, a przestrzeń i czas zmiennych niezależnych.

3. Analiza skali

Analiza skali, lub skalowanie, jest wygodną techniką szacowania wielkości wyrażen w równaniach opisujących określone typy ruchu. W skalowaniu określone są charakterystyczna długość, głębokość i skala czasu, w których zachodzą przepływy które chcemy opisać oraz charakterystyczne zakresy zmienności pól (temperatury, ciśnienia, prędkości i.t.p.) obserwowane w tych skalach. Te typowe wartości są następnie użyte do porównania wielkości różnych wyrażen w równaniach ruchu. Charakter przepływów atmosferycznych silnie zależy od skali poziomej, skala ta stanowi wygodne narzędzie klasyfikacji układów.

Typy przepływów	Skala pozioma (m)
Cząsteczkowa średnia droga swobodna	10^{-7}
Przepływy bezwiarowe	10^{-3}
Najmniejsze wiry turbulencyjne	$10^{-2}-10^{-1}$
Małe wiry	10^{-1}
Zawierowania unoszące kurz czy piasek	1-10
Podmuchy wiatru	$10-10^2$
Tornado	10^2
Chmury <i>cumulonimbus</i>	10^3
Fronty, linie szkwałowe	10^4
Huragany	10^5-10^6
Niże i wyży	10^6
Cyrkulacja globalna	10^7

W wyżej podanej tabeli przykłady różnorodnych przepływów są sklasyfikowane według ich rozmiarów horyzontalnych w zakresie skal od 10^{-7} do 10^7 m.

4. Fundamentalne siły rządzące przepływami atmosferycznymi.

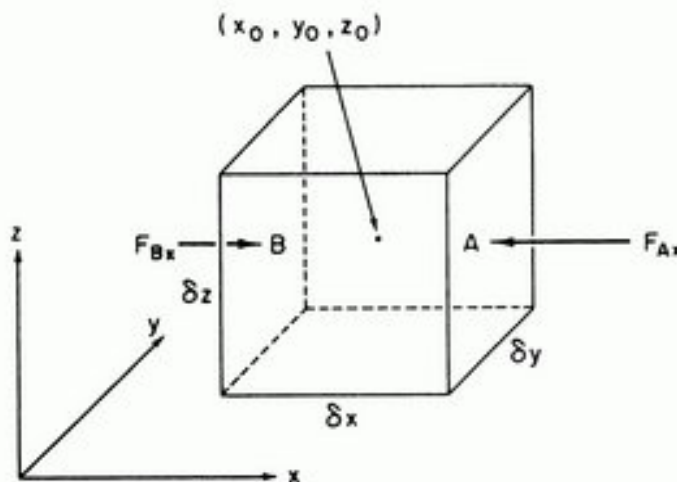
Siły wpływające na przepływy atmosferyczne mogą być sklasyfikowane jako siły masowe bądź siły powierzchniowe. Siły masowe działają na środek masy pakietu cieczy; mają one wielkości proporcjonalne do masy pakietu.

Przykładem siły masowej jest grawitacja. Siły powierzchniowe działają wzdłuż powierzchni granicznej oddzielającej pakiet cieczy od jego otoczenia; ich wielkości nie są zależne od masy pakietu. Za przykład może posłużyć gradient ciśnienia.

Druga zasada dynamiki Newtona mówi, że tempo zmiany pędu danego obiektu mierzone w absolutnym układzie współrzędnych, równe jest sumie wszystkich działających sił. Dla przepływów atmosferycznych istotnych dla meteorologii najważniejszymi siłami są: gradient ciśnienia, siła grawitacji oraz tarcia. Gdy ruch opisujemy w układzie odniesienia obracającym się wraz z Ziemią druga zasada dynamiki Newtona może być w dalszym ciągu stosowalna z zastrzeżeniem, że uwzględnia się siły bezwładności: siłę odśrodkową i siłę Coriolisa.

4.1 Siła gradientu ciśnienia

Ciśnienie wywierane na powierzchnię cząstki powietrza zdefiniowane jest jako składowa normalna siły wywieranej przez jej otoczenie, przypadająca na jednostkę pola powierzchni. Ta siła skierowana jest zawsze do wnętrza cząstki, co ilustruje poniższy rysunek:



Cząstka dozna oddziaływania siły wypadkowej tylko wówczas, gdy ciśnienia na jej przeciwległych powierzchniach nie będą równe. Tę siłę nazywa się siłą gradientu ciśnienia. Całkowity gradient ciśnienia na jednostkę masy wyraża się wzorem:

$$\frac{\vec{F}}{m} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p$$

gdzie: ρ - gęstość powietrza, p - pole ciśnienia w atmosferze. Siła ta jest proporcjonalna do gradientu ciśnienia, a nie samego ciśnienia.

5.2 Siła grawitacji

Newtonowskie prawo powszechnego ciążenia mówi, że każde dwa ciała masywne we wszechświecie przyciągają się wzajemnie siłą wprost proporcjonalną do ich mas i odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości między nimi. Dla ciał skończonych podany wzór może w dalszym ciągu mieć zastosowanie, jeżeli $\vec{r}$ zostanie zinterpretowane, jako odległość pomiędzy środkami mas ciał.

Jeżeli masę Ziemi oznaczmy przez M , a m będzie elementem masy atmosfery, wtedy siła wywierana na jednostkę masy atmosfery przez przyciąganie grawitacyjne Ziemi będzie:

$$\frac{\vec{F}_g}{m} \equiv \vec{g} = \frac{-GM}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}.$$

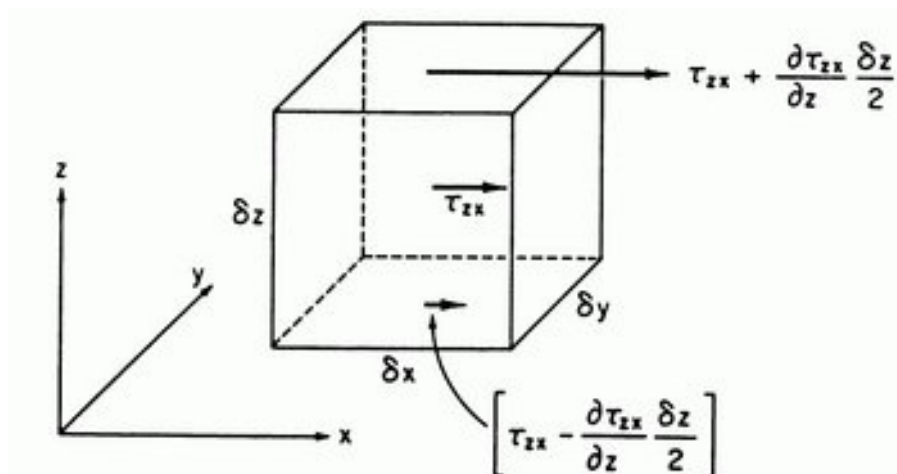
W meteorologii dynamicznej zwykło się używać jako współrzędnej pionowej wysokości nad poziomem morza. Średni promień Ziemi jest oznaczony przez a , a odległość nad średnim poziomem morza przez z , wtedy zanedbując niewielkie odchylenie kształtu Ziemi od kulistości, $r = a + z$. Zatem dany wzór możemy zapisać jako:

$$\vec{g} = \frac{\vec{g}_0}{1 + z/a},$$

gdzie $\vec{g}$ jest wartością przyspieszenia grawitacyjnego na średnim poziomie morza. Dla zastosowań meteorologicznych $z \ll a$, więc z pomijalnym błędem można traktować siłę grawitacyjną jako stałą.

4.3 Siła tarcia

Siłę tarcia możemy obliczać rozpatrując różniczkę elementu objętości płynu o bokach $\delta x \delta y \delta z$, co przedstawia poniższy rysunek.



Jeśli naprężenie styczne działające w kierunku x bezpośrednio w centrum tego elementu oznaczmy przez τ_{zx} , wtedy naprężenie działające wzdłuż górnej granicy na poniższą ciecz może być w przybliżeniu zapisane jako:

$$\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{\delta z}{2},$$

podczas gdy naprężenie działające wzdłuż dolnej granicy na powyższą ciecz wynosi:

$$\left[\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{\delta z}{2} \right].$$

Wypadkowa siła tarcia działająca w kierunku x na element objętości jest sumą tych dwóch naprężeń, czyli równa się:

$$\left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{\delta z}{2} \right) \delta y \delta x - \left(\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{\delta z}{2} \right) \delta y \delta x.$$

Stąd możemy zauważyć, że siła tarcia na jednostkę masy spowodowana pionowym gradientem x - owej składowej prędkości ma postać:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right).$$

(dla przypomnienia $\delta x \delta y \delta z = \delta V$ i $\frac{M}{\delta V} = \rho \rightarrow \frac{\delta V}{M} = \frac{1}{\rho}$)

Dla $\mu = \text{const}$ powyższy wzór daje się zapisać w postaci:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

gdzie $\nu = \mu / \rho$ jest kinematycznym współczynnikiem lepkości. Dla atmosfery standardowej na poziomie morza $\nu = 1.46 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.

Analogicznie można wyprowadzić siłę tarcia działającą we wszystkich kierunkach. W rezultacie składowe siły tarcia na jednostkę masy w trzech współrzędnych kartezjańskich przedstawiają się jako:

$$\begin{aligned} F_{rx} &= \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \\ F_{ry} &= \nu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] \\ F_{rz} &= \nu \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] \end{aligned}$$

Dla atmosfery poniżej 100 km współczynnik lepkości jest tak niewielki, że lepkość molekularna jest zanedbywalnie mała, z wyjątkiem cienkiej, kilkucentymetrowej warstwy tuż przy powierzchni Ziemi. Powyżej tarcie spowodowane jest głównie ruchami wirowymi i konwekcją. Dla ruchów turbulencyjnych w małej skali wprowadza się tzw. wirowy (turbulencyjny) współczynnik lepkości.

4.4. Efektywna siła ciężkości (ang. gravity)

Cząstka o jednostkowej masie, spoczywająca na powierzchni Ziemi, obserwowana w układzie obracającym się z Ziemią, jest obiektem działania siły odśrodkowej $\Omega^2 \vec{R}$, gdzie Ω jest prędkością kątową Ziemi ($\Omega = 7.292 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$) i $\vec{R}$ odległością cząstki od osi obrotu.

Ciężar cząstki o masie m spoczywającej na powierzchni Ziemi, , jest wtedy mniejszy niż siła ciężkości $m\vec{g}_0$, ponieważ siła odśrodkowa częściowo równoważy siłę grawitacyjną. Dlatego wygodnie jest łączyć oddziaływanie siły ciężkości i odśrodkowej wprowadzając efektywną (odczuwalną) siłę ciężkości (ang. gravity) $\vec{g}$:

$$\vec{g} \equiv \vec{g}_0 + \Omega^2 \vec{R}.$$

Siła grawitacyjna jest skierowana w kierunku środka Ziemi, podczas gdy siłą odśrodkową jest skierowana na zewnątrz od osi obrotu. Dlatego, poza biegunami i równikiem, gravity nie jest skierowana do środka Ziemi. Jeśli Ziemia byłaby idealną kulą, gravity miałaby równikową składową, równoległą do jej powierzchni. Ziemia jako elipsoida obrotowa z równikową wypukłością, ma $\vec{g}$ wszędzie skierowane normalnie do poziomu powierzchni. W konsekwencji, równikowy promień Ziemi jest o 21 km dłuższy niż promień biegunowy. W dodatku miejscowy pion, który jest brany równoległe do $\vec{g}$, nie przechodzi przez środek Ziemi, poza równikiem i biegunami.

4.5 Siła Coriolisa

Druga zasada dynamiki może być zastosowana we współrzędnych wirujących do opisanie przedmiotu spoczywającego względem obracającego się układu pod warunkiem, że uwzględnia się oddziaływanie siły odśrodkowej. Jeśli natomiast przedmiot porusza się względem tego układu, musimy uwzględnić dodatkową siłę bezwładności, siłę Coriolisa.

Zakładamy, że przedmiot porusza się ruchem jednostajnym względem układu inercjalnego. Jeśli obserwujemy przedmiot z układu wirującego, droga jaką on wykonał okazuje się być krzywą. Wynika z tego, że na przedmiot działa siła odchylająca go z drogi prostoliniowej. W rezultacie droga jest krzywą odchyloną w kierunku przeciwnym do kierunku obrotu układu współrzędnych, a siłą to powodującą jest siła Coriolisa.

Opis matematyczny siły Coriolisa można otrzymać rozpatrując ruch hipotetycznej cząstki o jednostkowej masie, to jest ruch swobodny na beztarciowej poziomej powierzchni na obracającej się Ziemi. Jeśli cząstka jest początkowo w stanie spoczynku względem Ziemi, to działają na nią tylko siły grawitacji i odśrodkowa. Załóżmy teraz, że cząstka jest w ruchu w kierunku wschodnim. W efekcie cząstka wiruje teraz szybciej niż Ziemia i siła odśrodkowa działająca na nią wzrasta. Gdy przez Ω oznaczymy prędkość kątową Ziemi, wektor $\vec{R}$ położenie cząstki od osi obrotu i $\vec{u}$ wschodnią składową

prędkości cząstki względem podłoża, to całkowita siła odśrodkowa będzie wyrażała się wzorem:

$$\left(\Omega + \frac{u}{R}\right)^2 \vec{R} = \Omega^2 \vec{R} + \frac{2\Omega u \vec{R}}{R} + \frac{u^2 \vec{R}}{R^2}.$$

Pierwszy człon z prawej strony jest właśnie siłą odśrodkową należącą do obracającej się Ziemi. Pozostałe dwa człony reprezentują siły odchylające, które działają na zewnątrz wzdłuż wektora $\vec{R}$ (to jest, prostopadle do osi obrotu). Dla synoptycznej skali ruchów $u \ll \Omega R$ i ostatni człon może być zaniedbany w pierwszym przybliżeniu. Człon $2\Omega u \left(\frac{\vec{R}}{R}\right)$ jest siłą Coriolisa związaną z ruchem wzdłuż równoleżnika. Siłę tę możemy rozłożyć na składowe w kierunkach równoleżnikowym i południkowym. Ruch względny w kierunku wschód-zachód wywołuje przyspieszenie w kierunku północ-południe:

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{Co} = -2\Omega u \sin \varphi$$

i przyspieszenie w pionie:

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_{Co} = 2\Omega u \cos \varphi,$$

gdzie u, v, w oznaczają odpowiednio wschodnią, północną i skierowaną ku górze składową prędkości, φ jest szerokością geograficzną, a indeks Co wskazuje, że jest to przyspieszenie będące skutkiem działania siły Coriolisa. Cząstka poruszająca się na wschód w płaszczyźnie poziomej na półkuli północnej jest odchylona przez siłę Coriolisa na południe, podczas gdy cząstka poruszająca się ku zachodowi jest odchylona na północ. Widzimy więc, że w obu przypadkach odchylenie działa w prawo od kierunku ruchu. Pionowa składowa siły Coriolisa jest dużo mniejsza niż siła grawitacji i dlatego ma ona bardzo mały wpływ na zmianę ruchu.

Dotychczas rozważaliśmy siłę Coriolisa spowodowaną ruchem w kierunku wschód-zachód. Załóżmy teraz, że cząstka zostaje wprowadzona w ruch wzdłuż równika. W tym przypadku wzrasta odległość do osi obrotu R , zmiana tej odległości wynosi δR dla południkowego przesunięcia z szerokości geograficznej φ_0 do szerokości $\varphi_0 + \delta\varphi$.

$$\Omega R^2 = \left(\Omega + \frac{\delta u}{R + \delta R}\right)(R + \delta R)^2,$$

gdzie δu jest wschodnią składową prędkości względnej kiedy na szerokości $\varphi_0 + \delta\varphi$. Rozpisując prawą stronę, zaniedbując różniczkę drugiego rzędu i rozwijając dla δR otrzymujemy:

$$\delta u = -2\Omega \delta R + 2\Omega a \delta\varphi \sin \varphi_0,$$

gdzie zastosowaliśmy $\delta R = a \delta\varphi \sin \varphi_0$ (a jest promieniem Ziemi).

Dzieląc przez przyrost czasu δt i biorąc granicę $\delta t \rightarrow 0$, otrzymamy:

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{Co} = 2\Omega a \frac{d\varphi}{dt} \sin \varphi_0 = 2\Omega v \sin \varphi,$$

gdzie $v = a d\varphi/dt$ jest północną składową prędkości.

Podobnie można pokazać, że jeśli cząstka jest puszczone w ruch pionowo przy szerokości φ_0 , doznaje przyspieszenia w kierunku wschód-zachód równego $\cdot 2\Omega w \cos \varphi_0$, gdzie w jest prędkością pionową. W ten sposób w ogólnym przypadku zawierającym oba ruchy względne: poziomy i pionowy, mamy:

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{Co} = 2\Omega v \sin \varphi \cdot 2\Omega w \cos \varphi.$$

5. Wektorowa forma równania ruchu we współrzędnych wirujących

W układzie inercyjnym druga zasada dynamiki Newtona może być symbolicznie zapisana jako:

$$\frac{d_a \vec{U}_a}{dt} = \sum \vec{F}.$$

Lewa strona przedstawia szybkość zmiany prędkości absolutnej w układzie inercyjnym. Prawa strona przedstawia sumę rzeczywistych sił działających na jednostkę masy.

Żeby przekształcić to wyrażenie do współrzędnych wirujących musimy najpierw znaleźć związek między $\vec{U}_a$ i prędkością względną w układzie wirującym, którą oznaczmy przez $\vec{U}$. Ten związek uzyskamy przez zastosowanie równania $d_a \vec{A}/dt = d\vec{A}/dt + \vec{\Omega} \times \vec{A}$ do wektora położenia $\vec{r}$ dla cząstki powietrza na obracającej się Ziemi:

$$\frac{d_a \vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{r}.$$

Ale $d_a \vec{r}/dt \equiv \vec{U}_a$ i $d\vec{r}/dt \equiv \vec{U}$, dlatego powyższe równanie możemy zapisać jako:

$$\vec{U}_a = \vec{U} + \vec{\Omega} \times \vec{r},$$

które prosto przedstawia prędkość absolutną przedmiotu na obracającej się Ziemi jako sumę prędkości względnej i prędkości wirującej Ziemi.

Teraz zastosujemy równanie $d_a \vec{A}/dt = d\vec{A}/dt + \vec{\Omega} \times \vec{A}$ do wektora prędkości $\vec{U}_a$, otrzymamy:

$$\frac{d_a \vec{U}_a}{dt} = \frac{d\vec{U}_a}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{U}_a.$$

Podstawiając do powyższego wyrażenia prawa stronę z równania $\vec{U}_a = \vec{U} + \vec{\Omega} \times \vec{r}$, otrzymujemy:

$$\frac{d_a \vec{U}_a}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{U} + \vec{\Omega} \times \vec{r}) + \vec{\Omega} \times (\vec{U} + \vec{\Omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{U}}{dt} + 2\vec{\Omega} \times \vec{U} + \Omega^2 \vec{R},$$

gdzie $\vec{\Omega}$ jest stałą, a $\vec{R}$ wektorem prostopadłym do osi obrotu. Równanie to przedstawia przyspieszenie w układzie inercyjnym jako sumę szybkości zmian

prędkości względnej w układzie wirującym, przyspieszenia Coriolisa i przyspieszenia dośrodkowego.

Jeśli przyjmiemy że jedyne rzeczywiste siły działające na cząstkę powietrza to siła gradientu ciśnienia, grawitacja i tarcie, możemy przepisać drugą zasadę Newtona z pomocą powyższego równania jako:

$$\frac{d\vec{U}}{dt} = -2\vec{\Omega} \times \vec{U} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{g} + \vec{F}_t,$$

gdzie $\vec{F}_t$ oznacza siłę tarcia i siła odśrodkowa jest kombinacją grawitacji i „gravity” w wyrazie $\vec{g}$. Widać, że przyspieszenie cząstki wywoływane jest przez siłę Coriolisa, siłę gradientu ciśnienia, efektywnej siły ciężkości („gravity”) i tarcie. Ta forma równania ruchu stanowi podstawę meteorologii dynamicznej.

5.1. Składowe równania ruchu we współrzędnych sferycznych

Rozwińmy teraz wektorową postać równania ruchu na składowe. Odstępstwo od kulistego kształtu Ziemi jest mało znaczące dla meteorologii, dzięki temu wygodnie jest rozwinąć to równanie we współrzędnych sferycznych z powierzchnią Ziemi jako powierzchnią odniesienia. Ośiami współrzędnych są wtedy (λ, φ, z) , gdzie λ jest długością geograficzną, φ szerokością geograficzną, a z wysokością nad powierzchnią Ziemi. Jeśli wektory jednostkowe $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ odpowiadają kierunkom: wschodniemu, północnemu i pionowemu, to względna prędkość staje się:

$$\vec{U} = \vec{i}u + \vec{j}v + \vec{k}w$$

gdzie składowe u, v i w są zdefiniowane jako:

$$u \equiv r \cos \varphi \frac{d\lambda}{dt}, \quad v \equiv r \frac{d\varphi}{dt}, \quad w \equiv \frac{dz}{dt}.$$

Tutaj r jest odległością od środka Ziemi, która jest związana z z przez $r = a + z$, a jest promieniem Ziemi. Dalej w równaniach zmienna r zostanie zastąpiona przez stałą a . Jest to bardzo dobre przybliżenie gdyż $z \ll a$ dla obszaru atmosfery, którym zajmuje się meteorologia. Dla uproszczenia definiujemy x i y jako współrzędne wschodnią i północną, tak że $dx = a \cos \varphi d\lambda$ i $dy = a d\varphi$, a składowe prędkości u i v zapiszemy w postaci $u \equiv dx/dt$ i $v \equiv dy/dt$. Układ współrzędnych zdefiniowany jako (x, y, z) nie jest kartezjański, ponieważ kierunki wektorów jednostkowych nie są stałe, ale są funkcjami położenia na powierzchni Ziemi. Stąd przyspieszenie zapisujemy jako:

$$\frac{d\vec{U}}{dt} = \vec{i} \frac{du}{dt} + \vec{j} \frac{dv}{dt} + \vec{k} \frac{dw}{dt} + u \frac{d\vec{i}}{dt} + v \frac{d\vec{j}}{dt} + w \frac{d\vec{k}}{dt}.$$

Żeby otrzymać składowe równania ruchu konieczne jest najpierw oszacowanie szybkości zmian wektorów jednostkowych.

Po rachunkach otrzymujemy wyrażenia:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} \cdot \frac{uv \tan \varphi}{a} + \frac{uw}{a} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2\Omega v \sin \varphi - 2\Omega w \cos \varphi + F_{tx} \\ \frac{dv}{dt} + \frac{u^2 \tan \varphi}{a} + \frac{vw}{a} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2\Omega u \sin \varphi + F_{ty} \\ \frac{dw}{dt} \cdot \frac{u^2 + v^2}{a} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \cdot g + 2\Omega u \cos \varphi + F_{tz},\end{aligned}$$

które są odpowiednio wschodnią, północną i pionową składową równania ruchu.

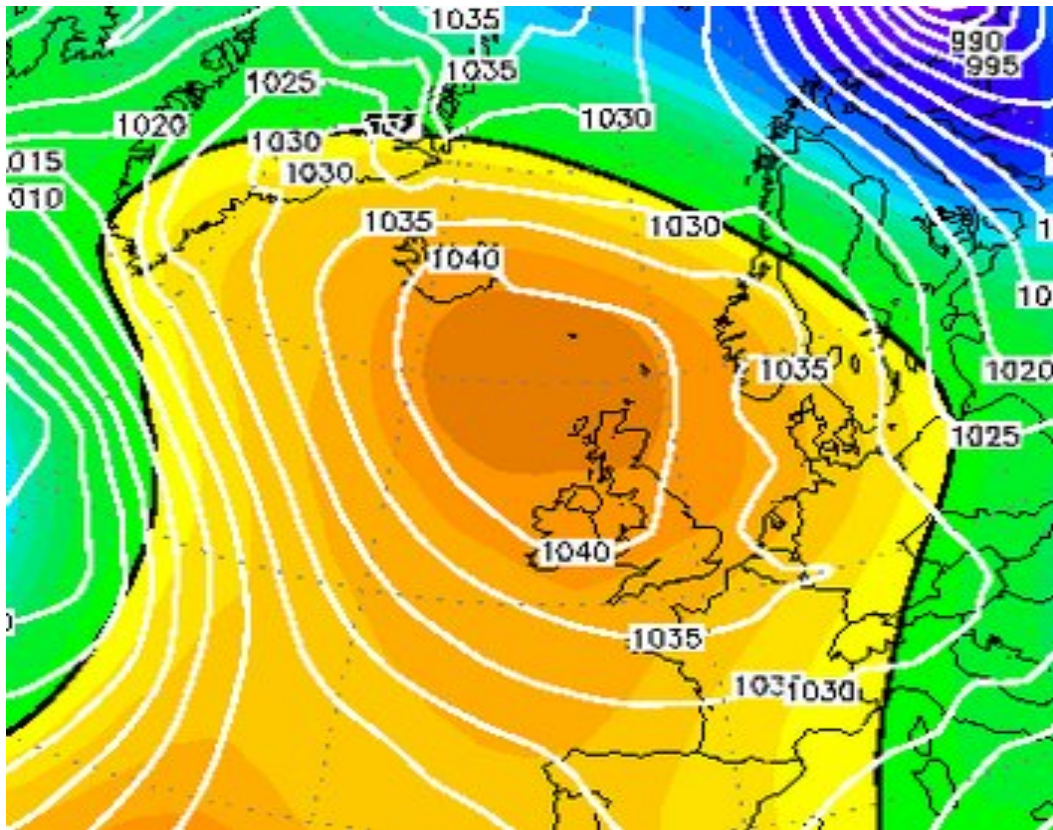
5.2. Analiza skali równań ruchu

Analiza ta polega na oszacowaniu wielkości poszczególnych składników w równaniach ruchu. Dzięki temu, dla ruchów obejmujących tylko niektóre skale wszystkich przepływów atmosferycznych niektóre człony można pominąć.

Rozmiary charakterystyczne przepływów w skali synoptycznej to 2000 km. Są one mniejsze niż rozmiary ruchów w skali globalnej, jednak wystarczająco duże, aby można je było wyodrębnić za pomocą konwencjonalnej sieci obserwacji meteorologicznych. Odległości między stacjami obserwacyjnymi w takiej sieci są rzędu kilkudziesięciu kilometrów. Przykładami ruchów o skali synoptycznej są antycyklony i cyklony.

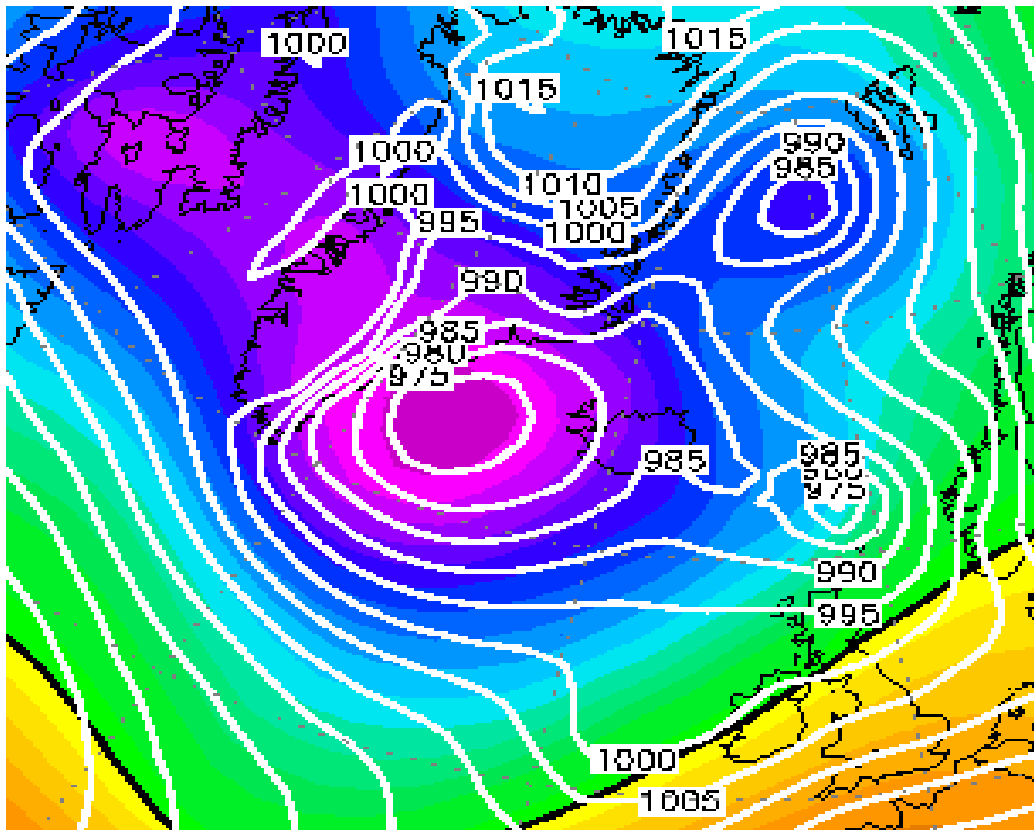
Obszar względnie wysokiego ciśnienia atmosferycznego nazywany jest wyżem atmosferycznym. Ciśnienia wzrasta ku środkowi tego obszaru i największe jest w jego centrum. Wyż na mapie pogody objęty jest zamkniętymi izobarami. Cyrkulacja powietrza w wyżu atmosferycznym ma charakter ancykloniczny: na półkuli północnej ma ona kierunek zgodny z ruchem wskazówek zegara, a na półkuli południowej powietrze przemieszcza się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Antycyklony są charakterystyczne dla stref zwrotnikowych, a w ich obszarze panuje zazwyczaj pogoda z małym zachmurzeniem.

Na poniższej mapce przedstawiony jest wyż atmosferyczny. Widoczne są izobary o konkretnych wartościach ciśnienia, które rośnie do środka obszaru i przyjmuje tam wartość 1040 hPa.



Nieżem atmosferycznym nazywany jest obszar względnie niskiego ciśnienia. W tym układzie ciśnienie maleje ku środkowi i tam ma najniższą wartość. Na mapie pogody niż również jest objęty zamkniętymi izobarami. Cyrkulacja powietrza w niżu atmosferycznym ma charakter cykloniczny. Na półkuli północnej odbywa się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, a na południowej odwrotnie. Cyklony charakterystyczne są charakterystyczne zwłaszcza dla umiarkowanych i wysokich szerokości geograficznych. Przechodzeniu cyklonów towarzyszą zmiany pogody, związane z frontami atmosferycznymi (zmiany temperatury, ciśnienia, prędkości i kierunku wiatru, zachmurzenie, opady).

Na poniższej mapce przedstawiony jest niż atmosferyczny. Ciśnienie maleje do środka obszaru gdzie ma wartość 975 hPa.



Ażeby uprościć równania ruchu atmosfery tak, żeby dobrze opisywały przedstawione wyżej przepływy w synoptycznej skali ruchów, zdefiniujemy następujące charakterystyczne skale w średnich szerokościach geograficznych:

$U \sim 10 \text{ m s}^{-1}$ - skala prędkości horyzontalnej

$W \sim 1 \text{ cm s}^{-1}$ - skala prędkości pionowej

$L \sim 10^6 \text{ m}$ - skala długości - 1000 km

$D \sim 10^4 \text{ m}$ - skala głębokości - 10 km

$\delta P / \rho \sim 10^3 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ - horyzontalna skala fluktuacji ciśnienia

$L/U \sim 10^5 \text{ s}$ - skala czasu

Horyzontalne fluktuacje ciśnienia δP są znormalizowane przez gęstość ρ , definiując skalę, która jest ważna dla wszystkich wysokości w troposferze, mimo wykładniczego spadku z wysokością zarówno δP , jak i ρ . $\delta P / \rho$ ma

jednostki geopotencjału. Odnosząc się do równania $\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_z = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_p$, zobaczymy jakie wielkości w fluktuacji $\delta P / \rho$ na powierzchni na stałej wysokości, muszą równać się wielkości fluktuacji geopotencjału na powierzchni izobarycznej. Skala czasu jest tutaj adwekcyjną skalą czasu, która jest stosowana dla systemu ciśnienia, które porusza się w przybliżeniu z szybkością horyzontalnego wiatru, jak jest obserwowane dla skali synoptycznej. W ten sposób L/U jest czasem potrzebnym do pokonania drogi L z prędkością U i pochodną substancjalną operatora $d/dt \sim U/L$ dla takich ruchów.

Możemy teraz oszacować wielkość każdego wyrazu w równaniach na wschodnią i północną składową równania ruchu dla skali synoptycznej w danej szerokości geograficznej. Poniższa tabela pokazuje właśnie te charakterystyczne wielkości.

	A	B	C	D	E	F	G
x-owa składowa	$\frac{du}{dt}$	$-2\Omega v \sin \varphi$	$+2\Omega w \cos \varphi$	$+\frac{uw}{a}$	$-\frac{uv \tan \varphi}{a}$	$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$	$+F_{tx}$
y-owa składowa	$\frac{dv}{dt}$	$+2\Omega u \sin \varphi$		$+\frac{vw}{a}$	$+\frac{u^2 \tan \varphi}{a}$	$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$	$+F_{ty}$
skale	$\frac{U^2}{L}$	$f_0 U$	$f_0 W$	$\frac{UW}{a}$	$\frac{U^2}{a}$	$\frac{\delta P}{\rho L}$	$\frac{vU}{D^2}$
wielkości	10^{-4}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-8}	10^{-5}	10^{-3}	10^{-12}

5.3 Przybliżenie geostroficzne

Z powyższej tabeli widać, że pierwsze przybliżenie równań ruchu daje:

$$fv \approx \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad -fu \approx \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y},$$

gdzie $f \equiv 2\Omega \sin \varphi$ zwane jest parametrem Coriolisa. Prędkość powietrza, określona z warunku równowagi między siłą Coriolisa i siłą gradientu ciśnienia dana wzorem $\vec{V}_g \equiv i u_g + j v_g$ nazywa się wiatrem geostroficznym. Jego definicję można zapisać w postaci:

$$\vec{V}_g \equiv \vec{k} \times \frac{1}{\rho f} \vec{\nabla} p.$$

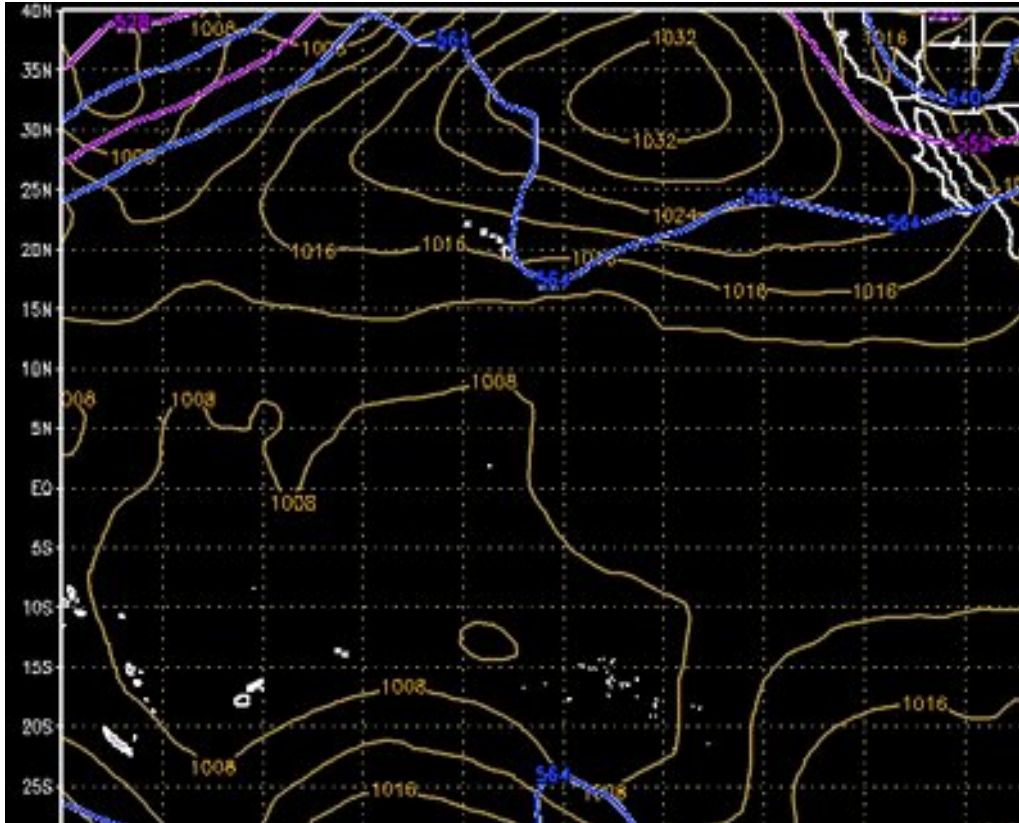
W średnich szerokościach geograficznych wiatr geostroficzny przybliża rzeczywistą prędkość przepływu powietrza z dokładnością 10-15%.

Dla porównania, jeżeli weźmiemy równania ruchu na równiku, to zredukują się one do innej postaci, ze względu na to, że $\varphi = 0$. W tym przypadku otrzymamy:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + 2\Omega w + \frac{uw}{a} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{dv}{dt} + \frac{vw}{a} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}. \end{aligned}$$

Równania te różnią się od przybliżenia geostroficznego, nie ma już równowagi między siłą Coriolisa i siłą gradientu ciśnienia. Ten fakt ma wpływ na to, że na

równiku nie ma dużej różnicy ciśnień. Można to zaobserwować na poniższej mapce:



Widoczne jest, że na równiku mamy tylko jedną izobare, a na wyższych szerokościach geograficznych jest ich znacznie więcej.

5.4 Przybliżone równanie prognostyczne, liczba Rossby'ego

Z uwzględnieniem przyspieszenia przybliżenie horyzontalnych równań ruchu ma postać:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= fv - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = f(v - v_g), \\ \frac{dv}{dt} &= -fu - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = -f(u - u_g)\end{aligned}$$

Przyspieszenia w powyższych równaniach są proporcjonalne do różnicy między rzeczywistym wiatrem i wiatrem geostroficznym. Przybliżenie to nazywamy quasi-geostroficznym.

Zwykle stosowaną miarą wielkości przyspieszenia w stosunku do efektu siły Coriolisa jest wyrażenie:

$$\frac{U^2/L}{f_0 U} = \frac{U}{f_0 L} \equiv R_0,$$

gdzie R_0 nazywa się liczbą Rossby'ego. Małość tej liczby jest miarą ważności przybliżenia geostroficznego.