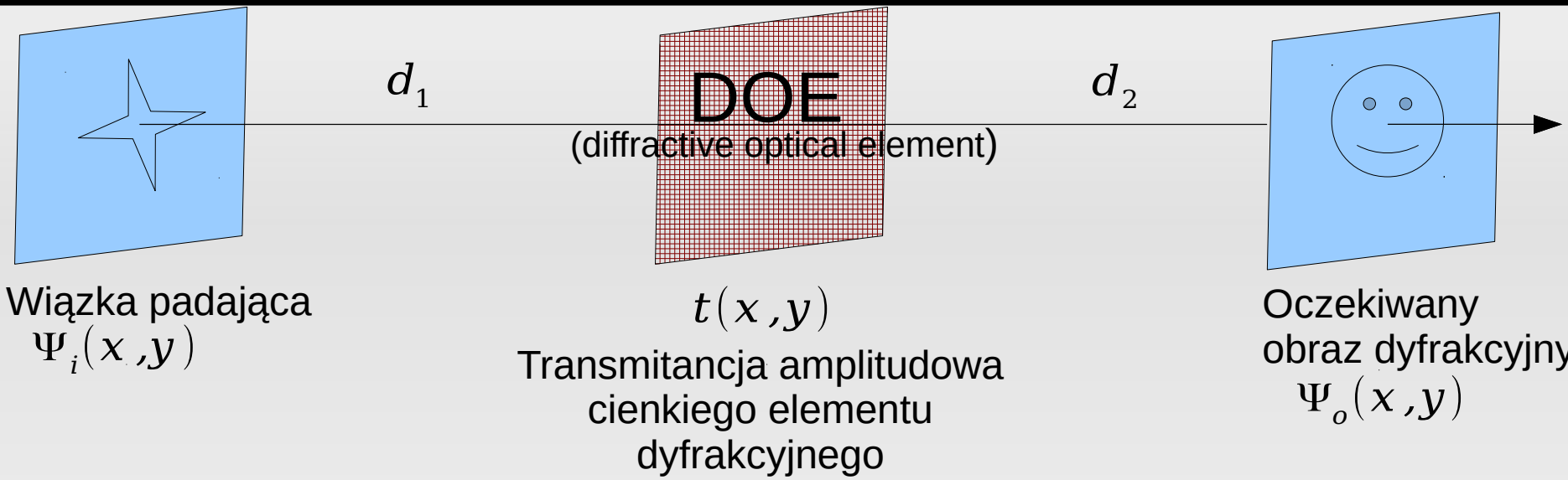
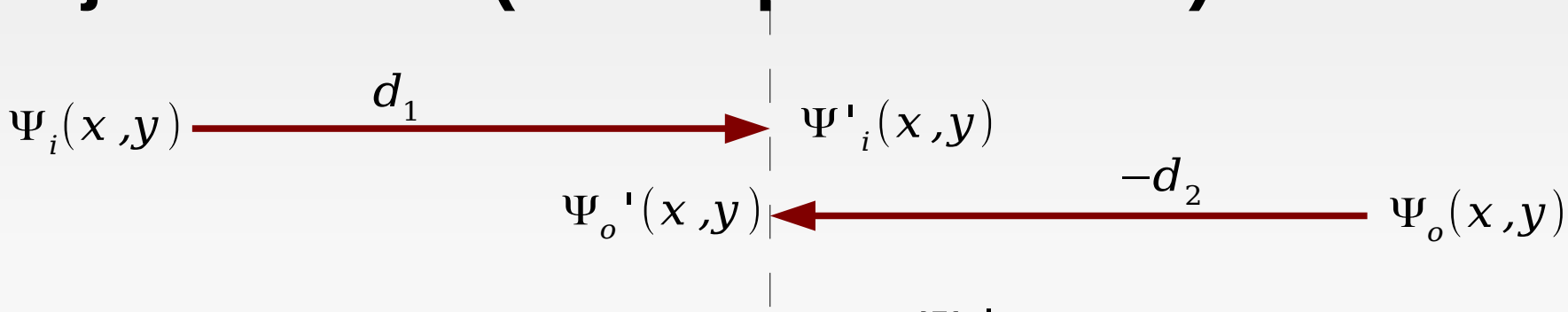
Metody Obliczeniowe Mikrooptyki i Fotoniki

- Dyfrakcja – różne reżimy
- Obliczanie elementów dyfrakcyjnych

Elementy dyfrakcyjne - idea

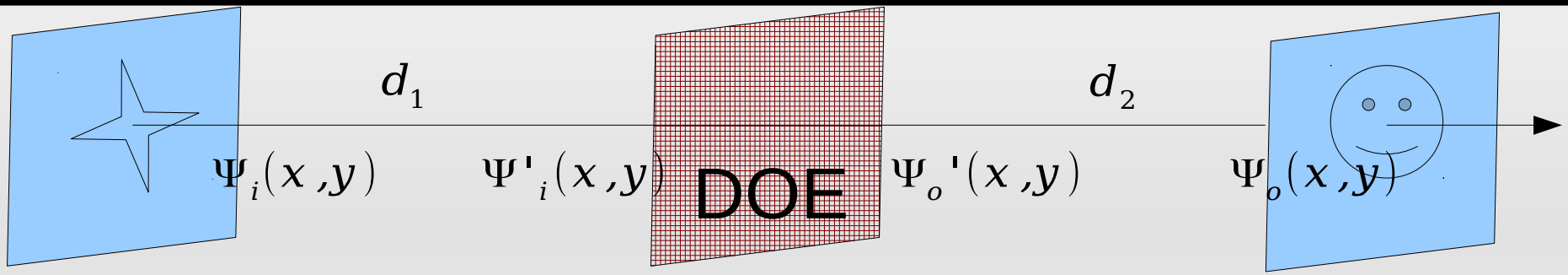


Projektowanie (duże uproszczenie):



$$t(x,y) \approx \frac{\Psi_o'}{\Psi_i'} = A(x,y) \cdot \exp(i\, k_0 \cdot n \cdot d(x,y))$$

Cienkie elementy DOE - idea



$$t(x,y) \approx \frac{\Psi_o'}{\Psi_i'} = A(x,y) \cdot \exp(i\, k_0 \cdot n \cdot d(x,y))$$

Problemy:

- zależność *t(x,y)* od długości fali
- zakres wartości *t(x,y) oraz* osobliwości i nieciągłości fazy
- dyspersja transmitancji niebinarnych *DOE*
- ograniczona dziedzina kodowania
- ograniczona rozdzielczość i apertura
- ograniczona liczba stopni swobody (liczba pikseli)
- znaczenie kształtu i regularnego ułożenia pikseli
- dowolność rozkładu fazy w obrazie (niejednoznaczność definicji)
- symetria odpowiedzi impulsowej np. dla kodowania amplitudowego
- ograniczenia modelu – polaryzacja, częściowa koherencja, uproszczony obraz wpływu elementu na zmianę kształtu frontu falowego

Jak obliczyć postać DOE

Modelowanie propagacji:

1. Przez bezpośrednie obliczenie całki np. Rayleigha-Sommerfelda
   (Dwuwymiarowe całkowanie dla każdego punktu na wyjściu)

2. Przez obliczenie całki splotowej – dyfrakcja Rayleigha-Sommerfelda, lub Fresnela
   (3 dwuwymiarowe transformaty Fouriera)

3. Przez obliczenie transformaty Fouriera – dyfrakcja Fraunhoffera, lub Fresnela

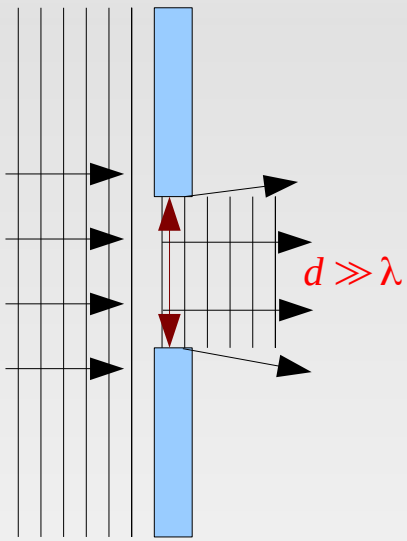
4. Przez bezpośrednie rozwiązanie r. propagacji (np. wektorowego r. falowego, r.Helmholtza, r. propagacji wiązki)

Kodowanie elementu dyfrakcyjnego:

- techniki optymalizacji dostosowane do materiału – (alg. Gerhberg-Saxon / IFTA Iterowanej transformaty Fouriera), symulowane wyżarzanie itp.
- CGH (hologrmy generowane komputerowo) - zapis przy uzyciu binarnych apertur
- surface relief holography – zapis elementu dyfrakcyjnego przy użyciu siatek dyfrakcyjnych

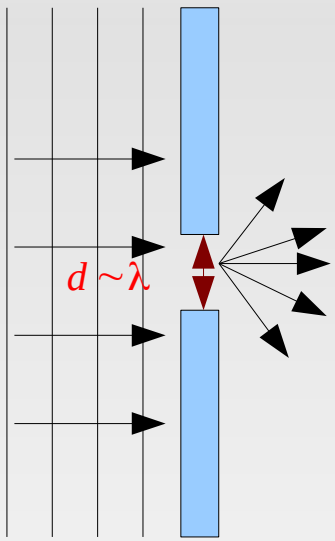
Różne reżimy dyfrakcji

Pole dalekie
(płaskie fronty falowe)



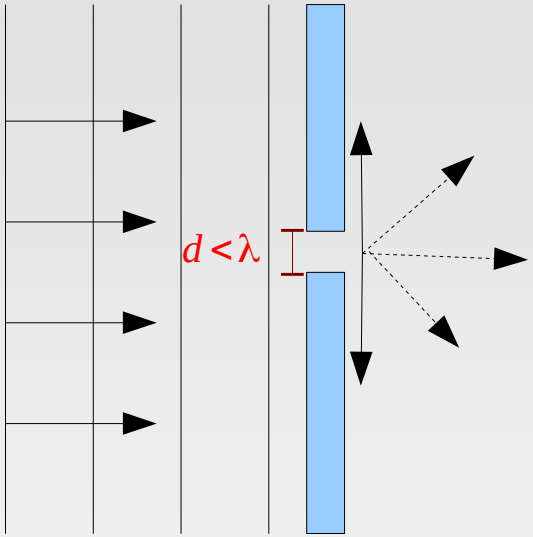
- elementy dyfrakcyjne (DOE), siatki dyfrakcyjne, hologramy

Pole bliskie
(parabolicznee fronty falowe)



- kryształy fotoniczne, DBR, siatki odbiciowe

Pole ewanescentne
(fala powierzchniowa)



- dyfrakcja fal ewanescentnych
- nadzwyczajna transmisja
- plazmonika

Dyfr. Fraunhofera, Dyfr. Fresnela,
Dyfr. Rayleigha-Sommerfelda, Równ. Maxwella

Opis skalarny | **Opis wektorowy**

Filtracja liniowa

(+niezmienniczość przestrzenna, w dwóch wymiarach)

Płaszczyzn a wyjściowa | **SYSTEM LINIOWY** | **Płaszczyzna wejściowa**

Dziedzina przestrzenna:

FT ↓ ↑ **IFT**

Dziedzina częstości przestrzennych

Odpowiedź impulsowa

splot

$$f(x,y)=H(x,y)*g(x,y)$$

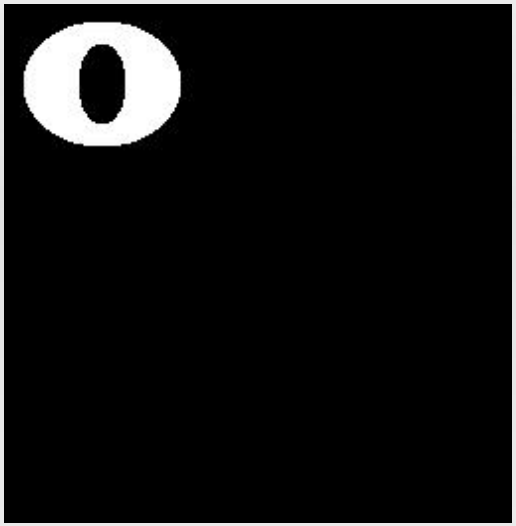
Funkcja przenoszenia

$$\hat{f}(v_x,v_y)=\hat{H}(v_x,v_y)\cdot\hat{g}(v_x,v_y)$$

mnożenie

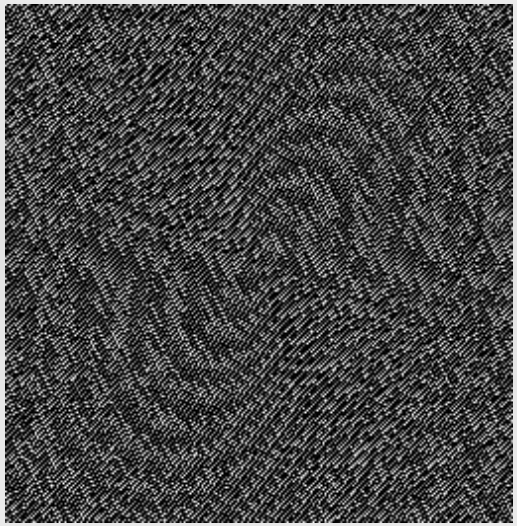
Znaczenie fazy w widmie przestrzennym

Obraz:



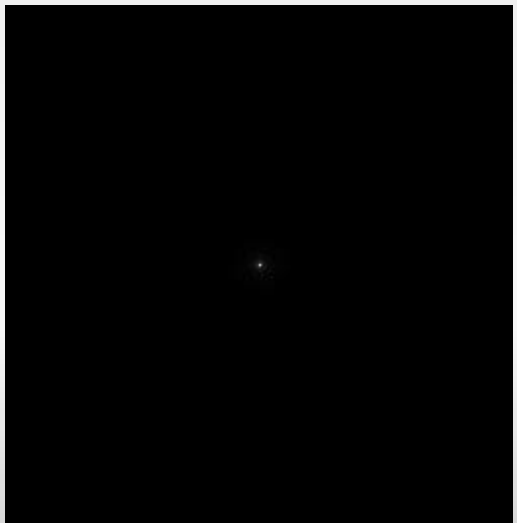
amplituda TF

faza TF



Rekonstrukcja na podstawie:

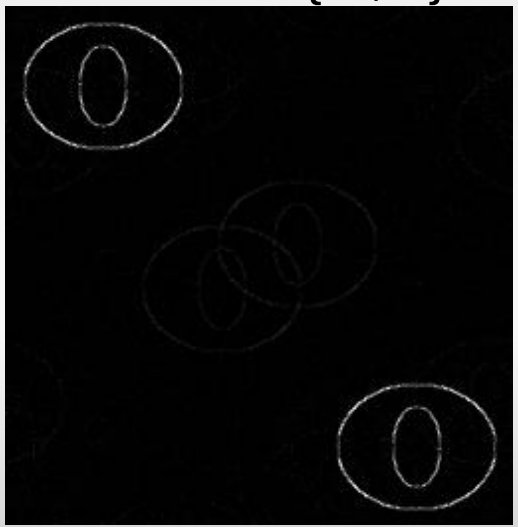
amplitudy TF



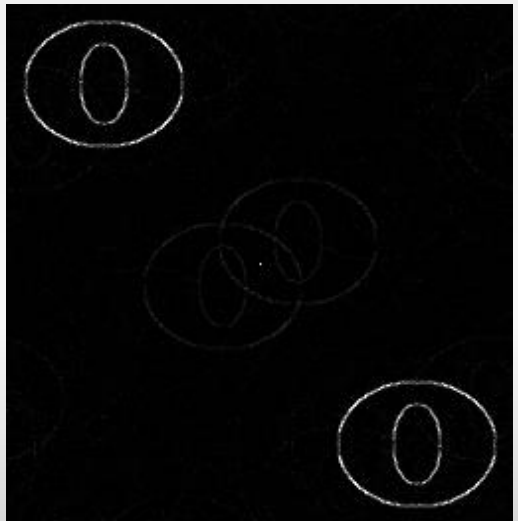
fazy TF

zbinaryzowanej fazy TF kodowanej

fazowo {-1, 1}



amplitudowo {0, 1}



Funkcja przenoszenia

Opis układu: $g(\boldsymbol{r}')=\int H(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})\cdot f(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}$

Interpretacja: $H(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}_0)=\int H(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})\cdot \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot d\boldsymbol{r}$

odpowiedź impulsowa układu

Dla układu niezmienniczego ze względu na przesunięcie:

$$H(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})=h(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})$$

$$g(\boldsymbol{r}')=\int h(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})\cdot f(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}=[h*f]_{\boldsymbol{r}'}$$

T.F.

$$\hat{g}(\boldsymbol{v}')=[\hat{h}\cdot\hat{f}]_{\boldsymbol{v}'}$$

Funkcja przenoszenia układu

Odpowiedź impulsowa układu liniowego

Opis układu: $$g(\boldsymbol{r}')=\int H(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})\cdot f(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}$$

Interpretacja: $$H(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}_0)=\int H(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})\cdot \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot d\boldsymbol{r}$$

odpowiedź impulsowa układu

Związek między funkcją przenoszenia a odpowiedzią impulsową

Odpowiedź impulsową i f. przenoszenia łączy 2-wym Transformata Fouriera

$$H(x,y)=(2\pi)^{-2}\iint \hat{H}(k_x,k_y)\exp(i(k_x x+k_y y))\,dk_x\,dk_y$$

FT ↓ ↑ **IFT**

$$\hat{H}(k_x,k_y)=\iint H(x,y)\exp(-i(k_x x+k_y y))\,dx\,dy$$

Dla układów o symetrii obrotowej TF sprowadza się do T. Fouriera-Bessela (Hankela)

$$H(\rho)=2\pi\int_0^\infty \hat{H}(k_\rho)J_0(\rho k_\rho)k_\rho\,dk_\rho$$

HT ↓ ↑ **IHT**

$$\hat{H}(k_\rho)=\int_0^\infty H(\rho)J_0(\rho k_\rho)\rho\,d\rho$$

$$k_\rho=\sqrt{k_x^2+k_y^2}$$

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$$

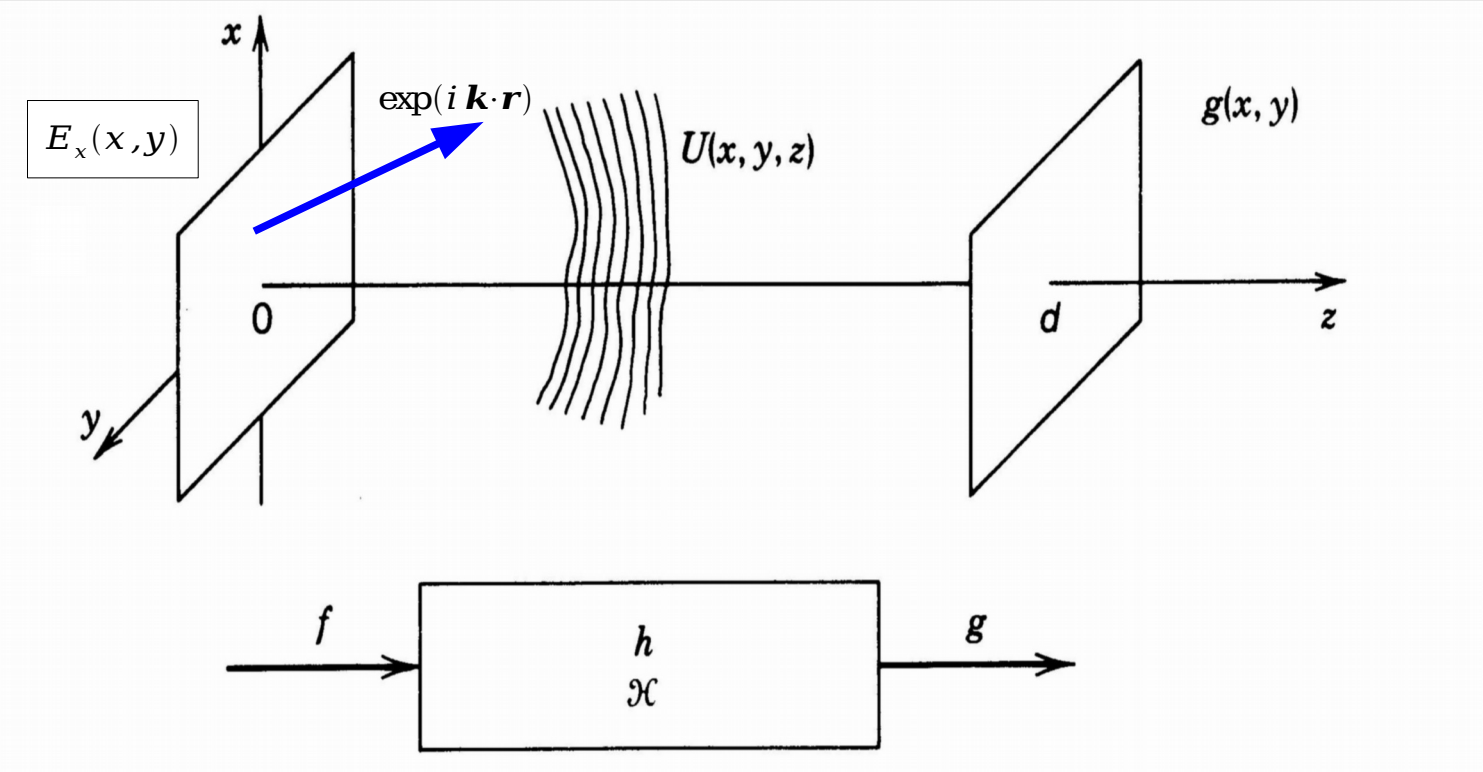
Dyfrakcja w przestrzeni swobodnej

Rozkład pola na częstości przestrzenne:

$$\hat{E}(\boldsymbol{k}_t, z) \propto \int d\boldsymbol{r}_t \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_t, z) \cdot \exp(-i\,\boldsymbol{k}_t \cdot \boldsymbol{r}_t)$$

Oznaczenia:

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{r}_t = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{k}_t = [k_x, k_y] = 2\pi[\nu_x, \nu_y]$$



Funkcja przenoszenia przestrzeni swobodnej

Rozkład pola na częstości przestrzenne:

$$\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{k}_t, z) \propto \int d\boldsymbol{r}_t \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_t, z) \cdot \exp(-i\,\boldsymbol{k}_t \cdot \boldsymbol{r}_t)$$

Rozkład pola na fale płaskie:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_t, z) = \int d\boldsymbol{k}_t \cdot \hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{k}_t, z=0) \cdot \exp(i\,\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}) =$$

$$= \int d\boldsymbol{k}_t \cdot \left[\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{k}_t, z=0) \cdot \underline{\exp(i\,\beta \cdot z)}\right] \cdot \exp(i\,\boldsymbol{k}_t \cdot \boldsymbol{r}_t)$$

Funkcja przenoszenia

Związek dyspersyjny (z równ. Helmholtza):

$$\boldsymbol{k} = [k_x, k_y, \beta]$$

$$k_x^2 + k_y^2 + \beta^2 = n^2 k_0^2 = (2\pi n/\lambda)^2$$

$$\boxed{\hat{h}_z = \exp(i\,\beta \cdot z) = \exp\left(\pm i\,z\sqrt{(k_0 n)^2 - k_x^2 - k_y^2}\right) = \exp\left(\pm 2\pi i\,z\sqrt{(n/\lambda)^2 - v_x^2 - v_y^2}\right)}$$

Dyfrakcja Rayleigha-Sommerfelda

Dyfrakcja Rayleigha-Sommerfelda

1. Rozkład pola na częstości przestrzenne:

$$\hat{\boldsymbol{E}}\left(\boldsymbol{k}_t, z=0\right)=\int d\,\boldsymbol{r}_t \cdot \boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{r}_t, z=0\right)\cdot \exp\left(-i\,\boldsymbol{k}_t \cdot \boldsymbol{r}_t\right)$$

2. Filtracja przestrzenna

$$\hat{\boldsymbol{E}}\left(\boldsymbol{k}_t, z=d\right)=\hat{\boldsymbol{E}}\left(\boldsymbol{k}_t, z=0\right)\cdot \hat{h}_d\left(\boldsymbol{k}_t\right)$$

$$\hat{h}_z=\exp\left(i\,z\sqrt{k_0^2 n^2-k_x^2-k_y^2}\right)$$

3. Rekonstrukcja pola

$$\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{r}_t, z=d\right)\propto\int d\,\boldsymbol{k}_t \cdot \hat{\boldsymbol{E}}\left(\boldsymbol{k}_t, z=d\right)\cdot \exp\left(+i\,\boldsymbol{k}_t \cdot \boldsymbol{r}_t\right)$$

Przybliżenie Fresnela

(Dyfrakcja w bliskim polu)

Funkcja przenoszenia dla przestrzeni swobodnej:

$$\hat{h}_z(\boldsymbol{\nu}) = \left[\exp\left(2\pi i z \sqrt{n^2/\lambda^2 - \nu_x^2 - \nu_y^2}\right)\right]$$

Przybliżenie Fresnela: $\sqrt{n^2/\lambda^2 - \nu_x^2 - \nu_y^2} \approx \frac{n}{\lambda}\left(1 - \frac{\lambda^2}{2n^2}\left(\nu_x^2 + \nu_y^2\right)\right)$

$$\hat{h}_z(\boldsymbol{\nu}) = \left[\exp\left(2\pi i z \sqrt{n^2/\lambda^2 - \nu_x^2 - \nu_y^2}\right)\right] \approx \exp\left(i k_0 n z\right) \cdot \boxed{\left[\exp\left(\frac{-\pi \boldsymbol{\nu}^2}{n/i\lambda z}\right)\right]}$$

IFT (2-wym):

Odpowiedź impulsowa:

$$h_z(\boldsymbol{r}_t) = \frac{\exp\left(i k_0 n z\right)}{i\lambda z/n} \cdot \boxed{\left[\exp\left(\frac{-\pi \boldsymbol{r}_t^2}{i\lambda z/n}\right)\right]}$$

Warunek stosowalności przybliżenia Fresnela: $N_F n \boldsymbol{r}_t^2 / 4z^2 \ll 1$

Liczba Fresnela: $N_F = \boldsymbol{r}_t^2 / \lambda z$

Związek dyfrakcji Fresnela z transformatą Fouriera

Odpowiedź impulsowa przestrzeni swobodnej (przybliżenie Fresnela):

$$h_z(\boldsymbol{r}_t)=\frac{e^{ik_0 n z}}{i\lambda z/n}\cdot\left[\exp\left(\frac{-\pi \boldsymbol{r}_t^{\,2}}{i\lambda z/n}\right)\right]$$

Rozkład pola w obrazie dyfrakcyjnym:

(Splot pola wejściowego z odpowiedzią impulsową)

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_t{}', z)=\int \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_t, z=0)\cdot h_z(\boldsymbol{r}_t{}'-\boldsymbol{r}_t)\,d\boldsymbol{r}_t=$$

$$=\frac{e^{ik_0 n z}}{i\lambda z/n}\int\left[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_t, z=0)\cdot\exp\left(\frac{-\pi(\boldsymbol{r}_t-\boldsymbol{r}_t{}')^2}{i\lambda z/n}\right)\right]d\boldsymbol{r}_t=$$

$$=\frac{e^{ik_0 n z}}{i\lambda z/n}\cdot\exp\left(\frac{-\pi \boldsymbol{r}_t{}'^2}{i\lambda z/n}\right)\cdot\int\left[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_t, z=0)\cdot\exp\left(\frac{-\pi \boldsymbol{r}_t^{\,2}}{i\lambda z/n}\right)\right]\cdot\exp\left(\frac{-2\pi i\,\boldsymbol{r}_t\cdot\boldsymbol{r}_t{}'}{\lambda z/n}\right)d\boldsymbol{r}_t$$

$$\boxed{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{v}_t{}', z)=\frac{e^{ik_0 n z}\cdot e^{i\pi\lambda z/n\,\boldsymbol{v}_t{}'^2}}{i\lambda z/n}\cdot\int\left[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_t, z=0)\cdot\exp\left(\frac{-\pi \boldsymbol{r}_t^{\,2}}{i\lambda z/n}\right)\right]\cdot\exp\left(-2\pi i\,\boldsymbol{r}_t\cdot\boldsymbol{v}_t{}'\right)d\boldsymbol{r}_t}$$

$$\boldsymbol{v}_t{}'=\frac{\boldsymbol{r}_t{}'}{\lambda z/n}$$

Jądro transformaty Fouriera

Przybliżenie Fraunhofera
(Dyfrakcja w dalekim polu)

Dyfrakcja Fresnela:

$$E(\boldsymbol{v}_t', z) = \frac{e^{ik_0 nz} \cdot e^{i\pi\lambda z/n\, \boldsymbol{v}_t'^2}}{i\lambda z/n} \cdot \int \left[E(\boldsymbol{r}_t, z=0) \cdot \cancel{\exp\left(\frac{-\pi \boldsymbol{r}_t^2}{i\lambda z/n}\right)} \right] \cdot \exp\left(-2\pi i\, \boldsymbol{r}_t \cdot \boldsymbol{v}_t'\right) d\boldsymbol{r}_t$$

$$\boldsymbol{r}_t^2/\lambda z \ll 1$$

(Przybliżenie Fraunhofera dalekiego pola)

Dyfrakcja Fraunhofera:

$$\boxed{E(\boldsymbol{v}_t', z) = \frac{e^{ik_0 nz} \cdot e^{i\pi\lambda z/n\, \boldsymbol{v}_t'^2}}{i\lambda z/n} \int E(\boldsymbol{r}_t, z=0) \cdot \exp\left(-2\pi i\, \boldsymbol{r}_t \cdot \boldsymbol{v}_t'\right) d\boldsymbol{r}_t}$$

$$\boldsymbol{v}_t' = \frac{\boldsymbol{r}_t'}{\lambda z/n}$$

Warunek stosowalności przybliżenia Fraunhofera: $N_F = \boldsymbol{r}_t^2/\lambda z \ll 1$

+ $N_F n\, \boldsymbol{r}_t^2/4z^2 \ll 1$

Dyskretna transformata Fouriera

Ciągła transformata Fouriera:

$$\hat{h}(\boldsymbol{v}') \propto \int h(\boldsymbol{r}) \cdot \exp(-2\pi i \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{v}) d\boldsymbol{r}$$

Dyskretyzacja (przyp. 1-wymiarowy):

$$h_{l(mod\,N)} = h(l \cdot \Delta x)$$

$$\hat{h}_{k(mod\,N)} = \hat{h}(k \cdot \Delta v) = \hat{h}\left(\frac{k}{\Delta x \cdot N}\right)$$

$$\Delta v = \frac{1}{N \cdot \Delta r}$$

Dyskretna transformata Fouriera :

Zapis w postaci sumy: $\hat{h}_k \propto \sum_{l=0}^{N-1} h_l \cdot \exp(-2\pi i k \cdot l / N)$

Zapis macierzowy: $\hat{\boldsymbol{h}} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{h}$ $\quad [F]_{k,l} \propto \exp(-2\pi i k \cdot n / N)$

Szybka transformata Fouriera (FFT):

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 \cdot \boldsymbol{F}_2 \cdot \ldots \boldsymbol{F}_{lg_2 N}$$

F_i są macierzami rzadkimi (po 2N elementów)

Liczba mnożeń: $N^2 \rightarrow 2 N lg_2 N$

Dyskretna transformata Fouriera

Ciągła transformata Fouriera:

$$\hat{h}(\boldsymbol{v}') \propto \int h(\boldsymbol{r}) \cdot \exp(-2\pi i \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{v}) d\boldsymbol{r}$$

Dyskretna transformata Fouriera :

Zapis w postaci sumy:

$$\hat{h}_k \propto \sum_{l=0}^{N-1} h_l \cdot \exp(-2\pi i k \cdot l / N)$$

$$\Delta v \cdot \Delta r = N^{-1}$$

$$(N \cdot \Delta v) \cdot (N \cdot \Delta r) = N$$

Holografia cyfrowa (CGH)

DOE obliczony przy użyciu IFT:

$$\Psi_o(x,y) \xrightarrow{\text{IFT}} t(x,y)=A(x,y)\cdot\exp(i\phi(x,y))$$

$$\downarrow$$

Zapis fazowy

$$t_{faz}(x,y)=\exp(i\phi(x,y))$$

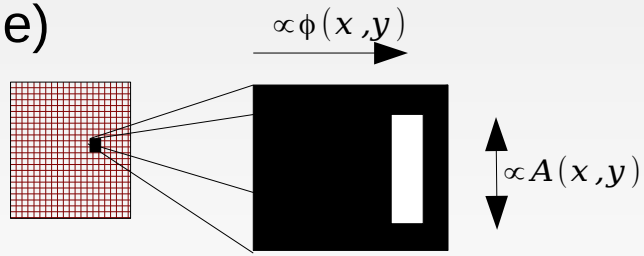
(pominięcie informacji amplitudowej)

Zapis amplitudowy

$$t_{ampl}(x,y)\in\mathbb{R}_+$$

(kodowanie informacji fazowej w amplitudzie)

-Metody Lohmana, Lee itd.

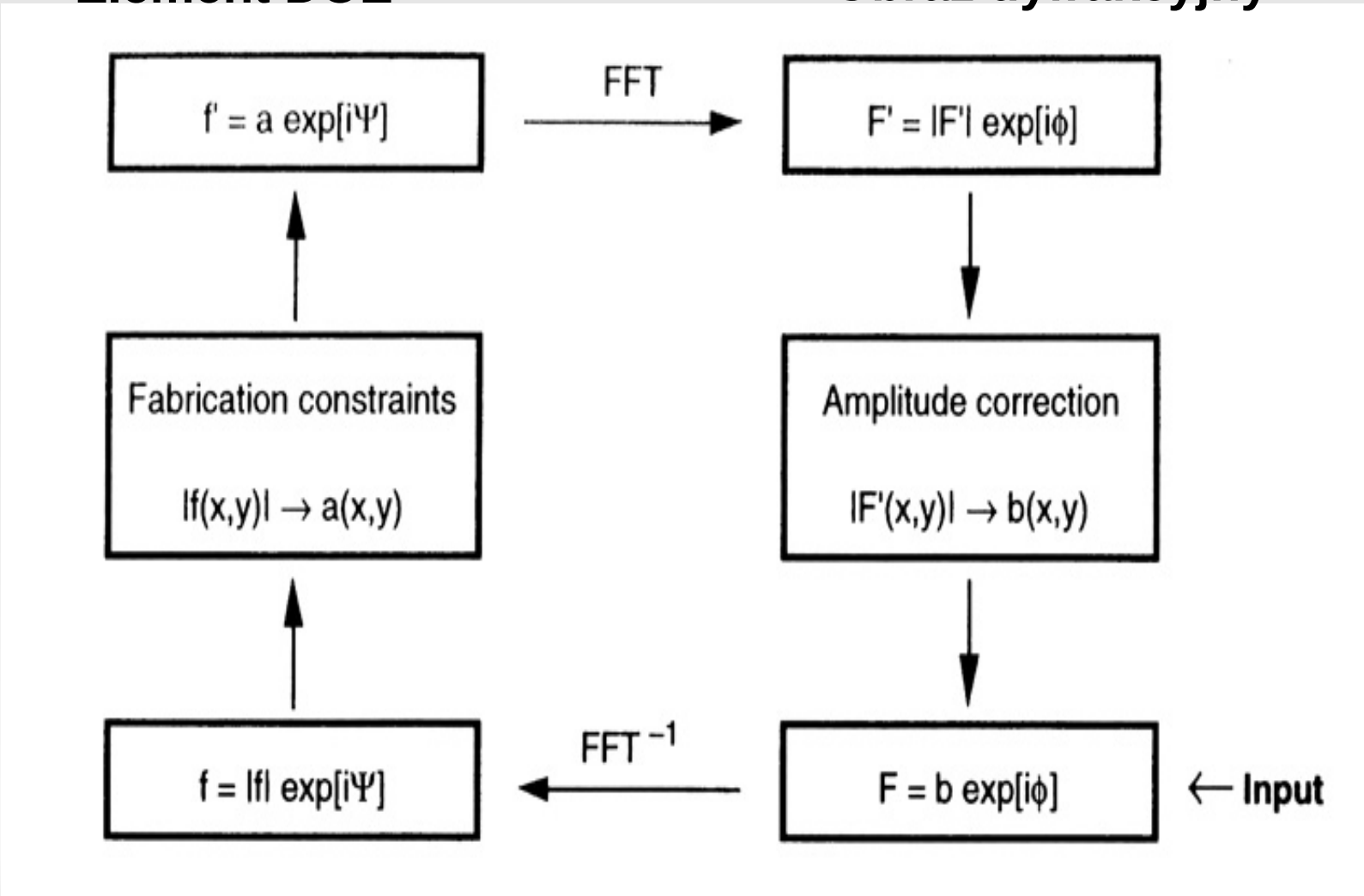


-Amplitudowe kodowanie fazy:

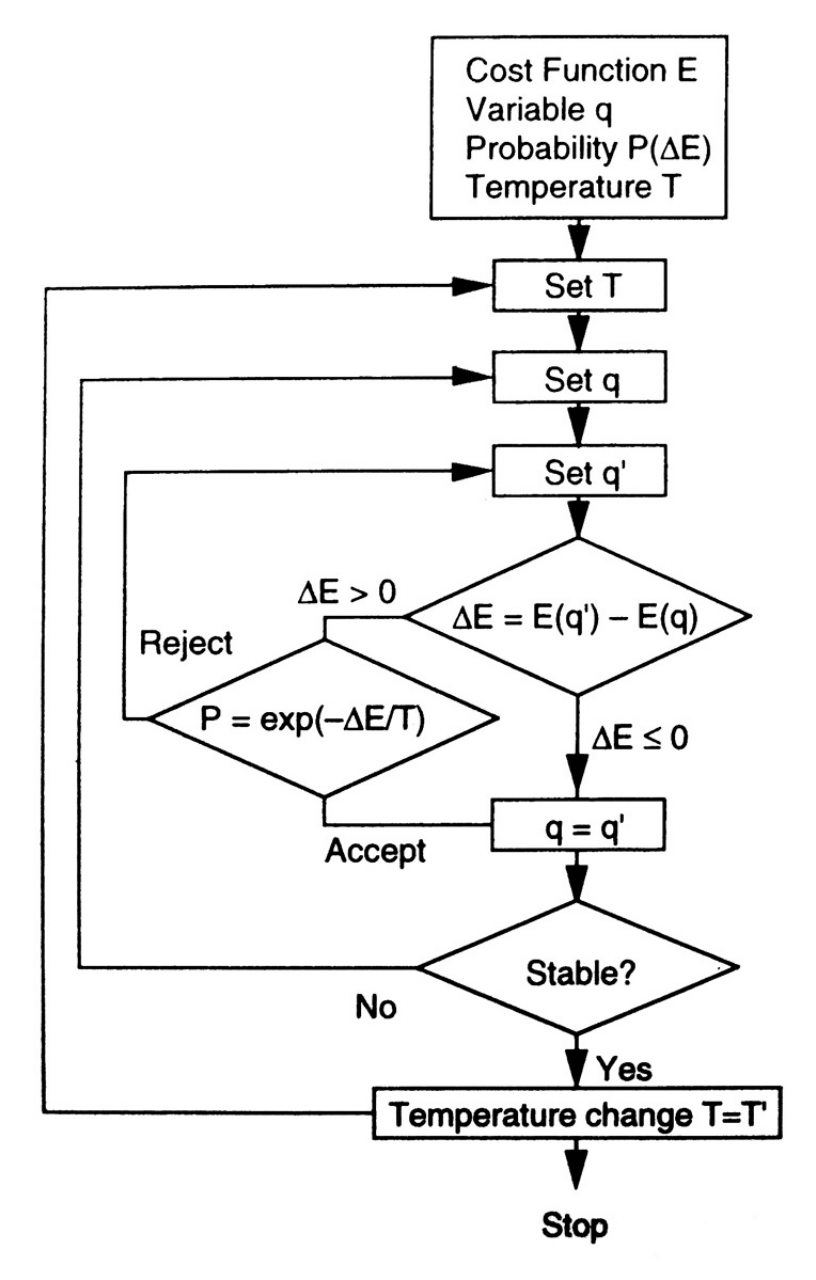
$$\exp(i\phi(x,y))\approx 1+i\phi(x,y) \qquad t_{ampl}(x,y)\propto\phi(x,y)$$

IFTA – algorytm iterowanej transformaty Fouriera

Element DOE **Obraz dyfrakcyjny**

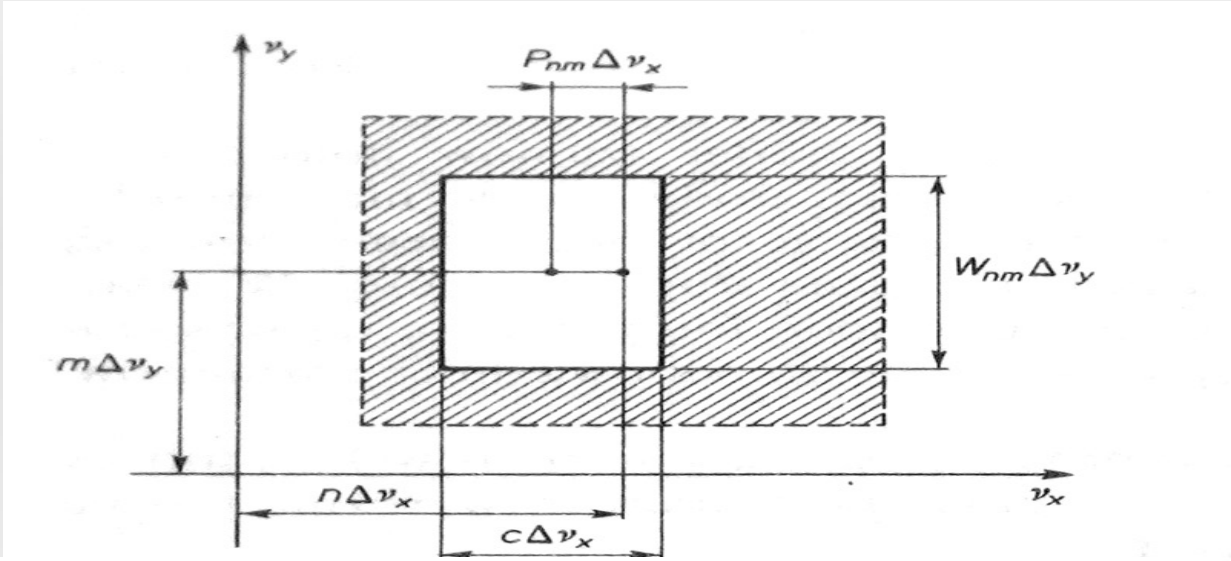


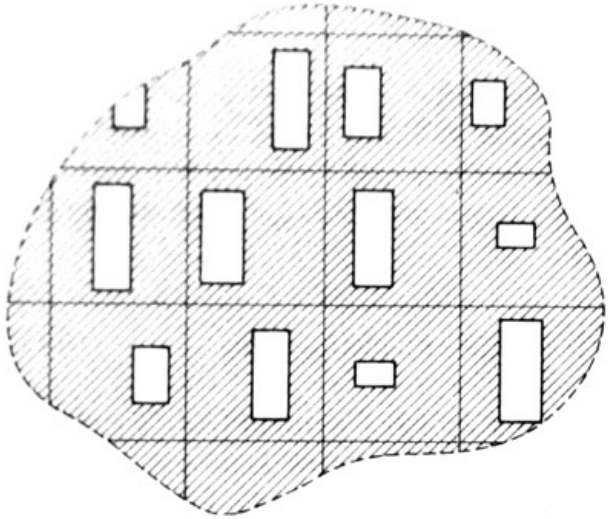
Symulowane wyżarzanie



Wyznaczanie DOE jako problem optymalizacji

CGH -metoda Lohmana





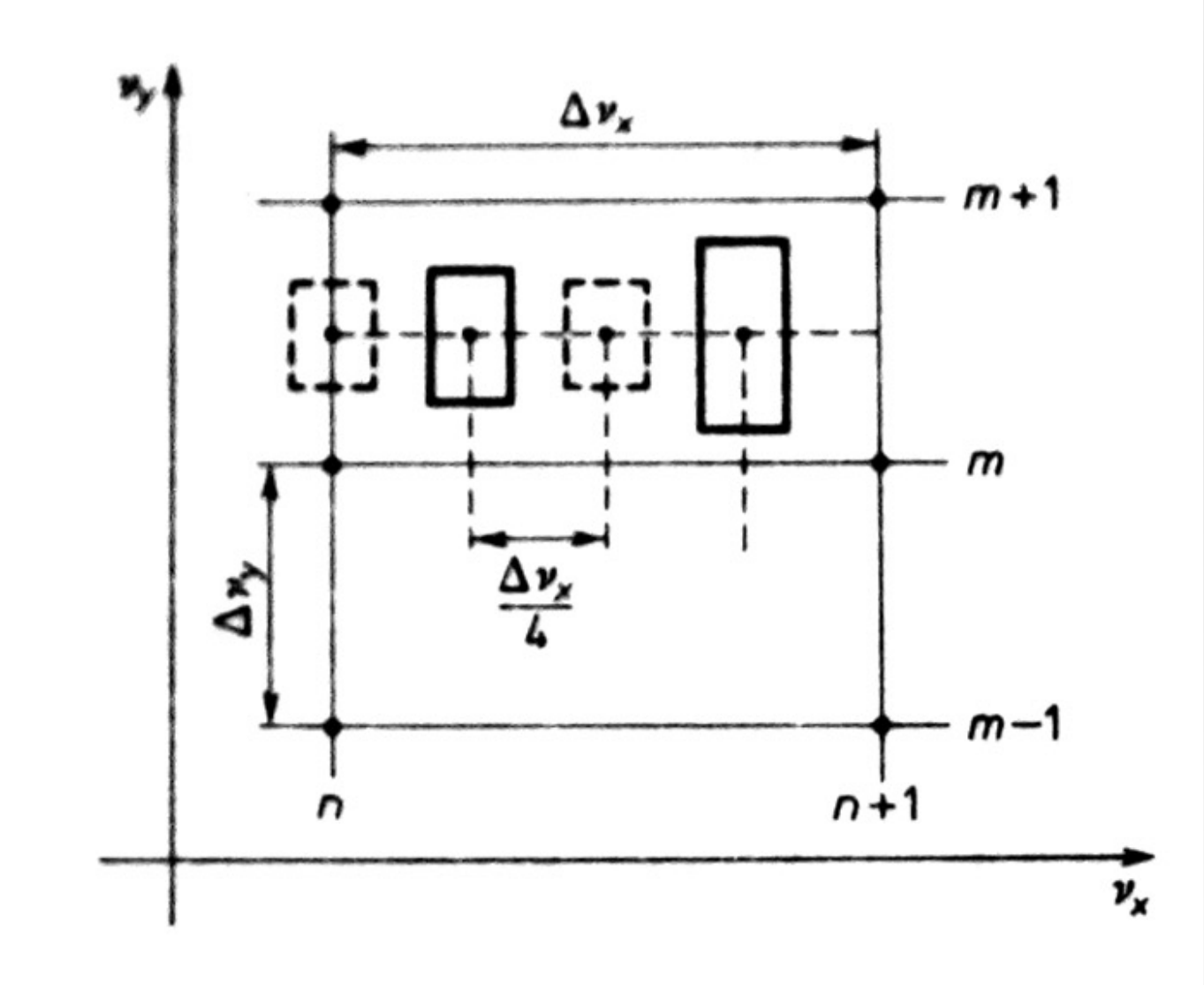
Rys. 10.5. Fragment hologramu zakodowanego metodą Lohmanna

Rys. 10.6. Komputerowy rysunek negatywu hologramu lohmannowskiego

K. Gniadek, *Optyczne przetwarzanie informacji*, PWN, Warszawa, 1992

(Obraz powstaje w 1 rzędzie ugięcia)

CGH-metoda Lee



Amplitudę zespolona w każdym punkcie zapisujemy jako sumę 4 amplitud o argumentach zespolonych 0,pi/2,pi,3/4pi i do każdej stosujemy metodę Lohmana.

Ćwiczenia

Zadanie - optymalizacja elementu dyfrakcyjnego – metody iteracyjne
Napisać program optymalizujący fazowy element dyfrakcyjny o N poziomach fazy, jedną z następujących metod: , algorytmem genetycznym, algorytmem iterowanej Transformaty Fouriera (IFTA) (ew. metodą przeszukiwania przestrzeni (direct binary search), lub jakąś metodą optymalizacji np. algorytmem genetycznym czy metodą symulowanego wyżarzania.)
- zakodować zadany obraz
- zakodować soczewkę dyfrakcyjną

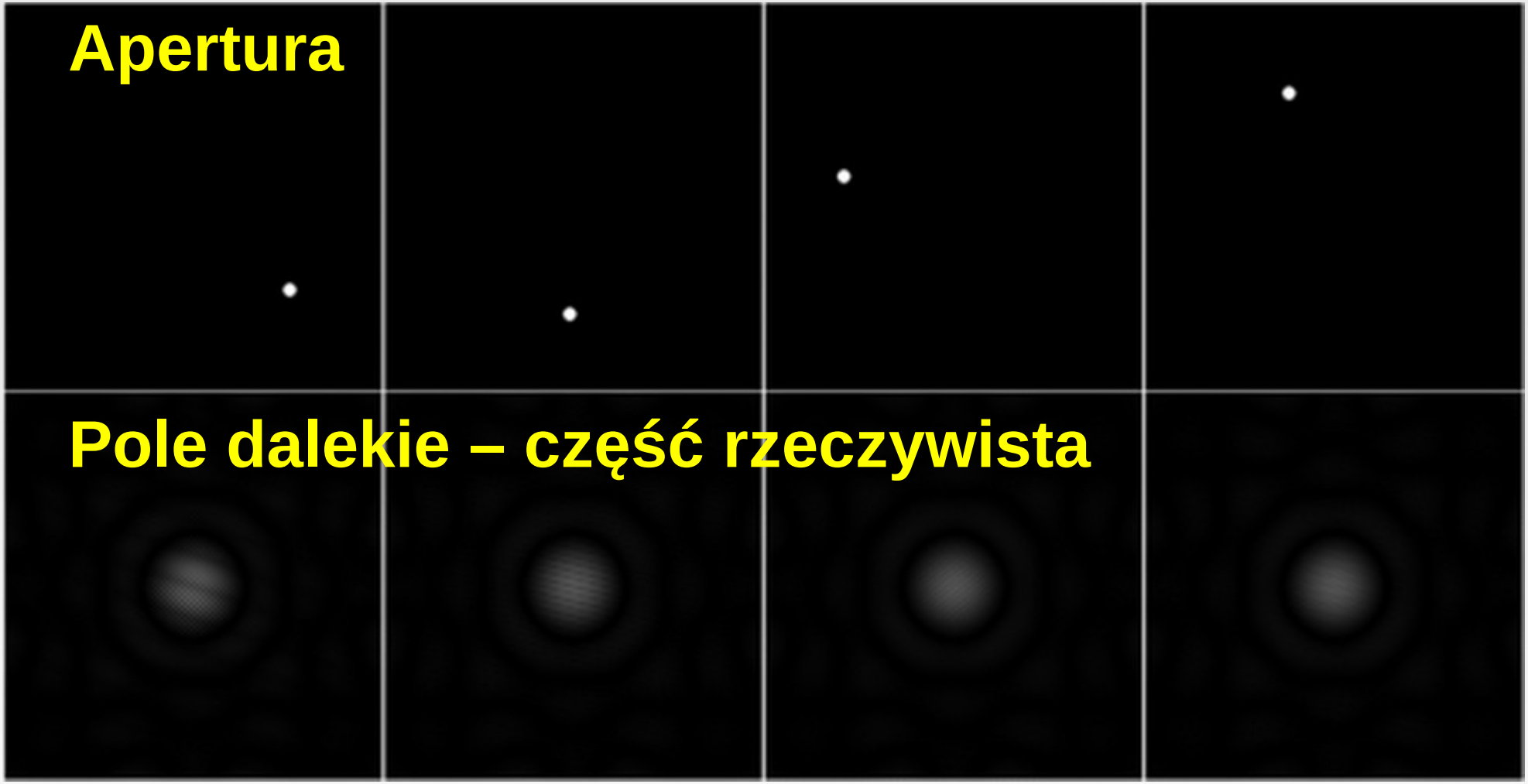
Zadania „na 5”: Napisać program do zaprojektowania hologramu przeznaczonego do kształtowania (prawie) trójwymiarowego rozkładu pola za pomocą binarnego układu mikrozwierciadełek DMD oświetlanego wiązką lasera. Można to uzyskać w ten sposób, że zadajemy rozkłady natężenia w kilku płaszczyznach o różnej odległości od hologramu. Następnie, iteracyjnie nakładamy warunek na natężenie pola w tych płaszczyznach i na binarną dziedzinę kodowania hologramu. Należy zacząć od losowego rozkładu fazy w odtworzeniu hologramu.

Tw. o przesunięciu

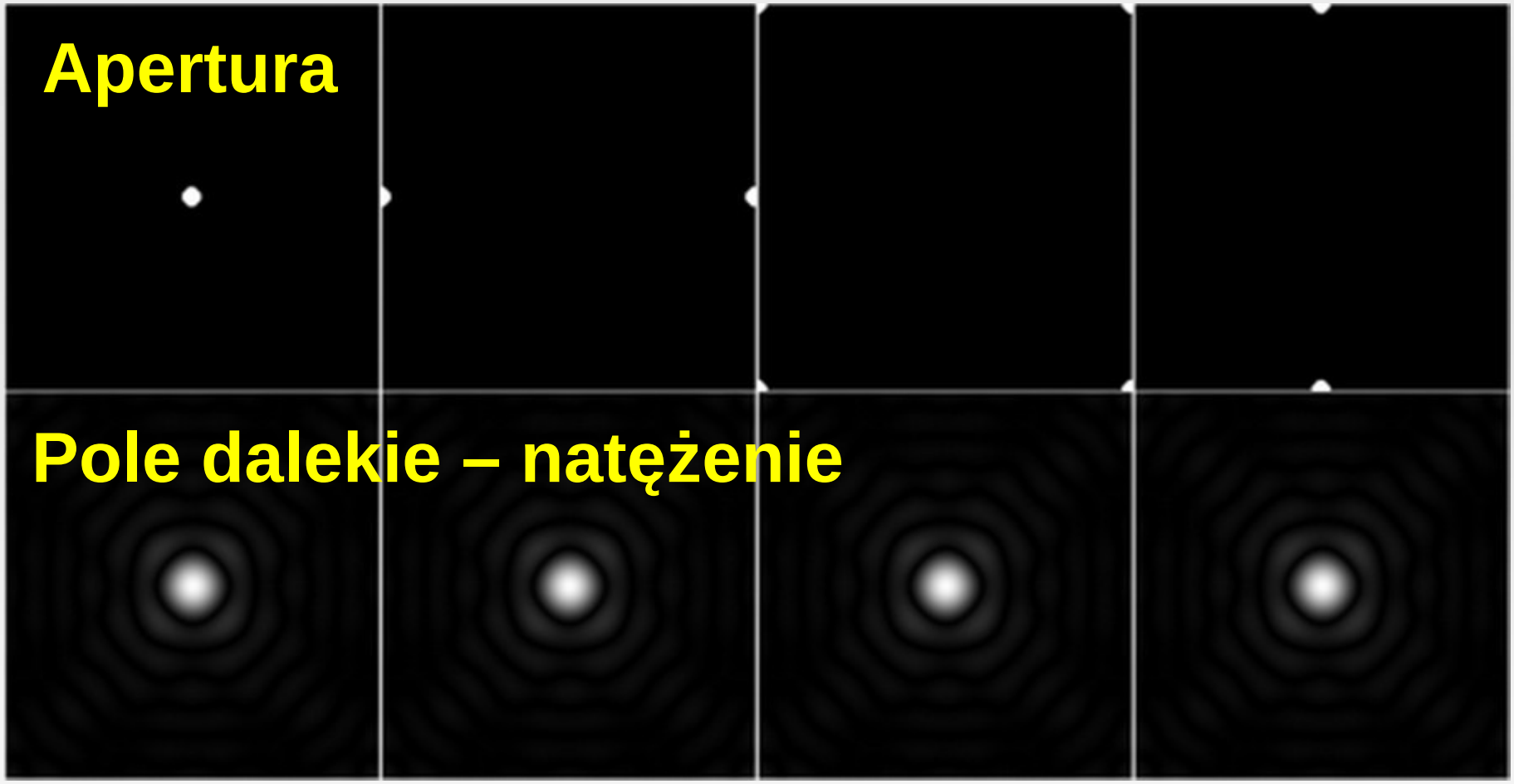
Szum numeryczny związany z dyskretyzacją (symetria obrotowa !) $circ(\boldsymbol{r}) \Leftrightarrow J_1(2\pi|\boldsymbol{\nu}|)/|\boldsymbol{\nu}|$

$$f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r_0}) \Leftrightarrow \exp(-2\pi i\, \boldsymbol{r_0}\cdot\boldsymbol{\nu})\cdot F(\boldsymbol{\nu})$$

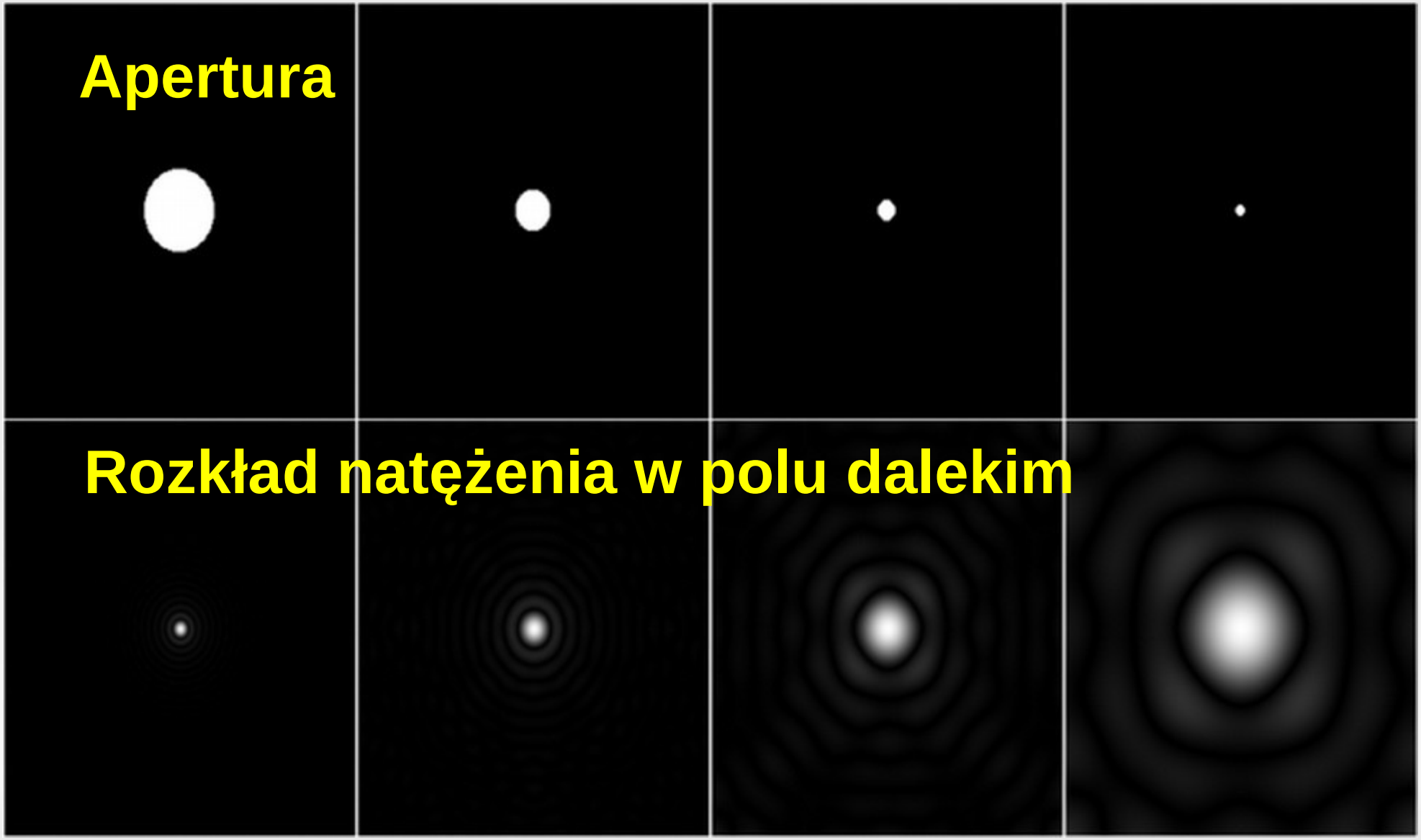
Tw. o przesunięciu



Tw. o przesunięciu dla dyskretnej T.F.



Tw. o skalowaniu



$$f(\boldsymbol{r}/s) \Leftrightarrow |s|^n \cdot F(s \cdot \boldsymbol{\nu})$$

$$f(x/s_x, y/s_y) \Leftrightarrow |s_x s_y| \cdot F(s_x \cdot \nu_x, s_y \cdot \nu_y)$$

Tw. o skalowaniu (1. wymiar)

$$f(x/s_x, y/s_y) \Leftrightarrow |s_x s_y| \cdot F(s_x \cdot \nu_x, s_y \cdot \nu_y)$$

Symetria

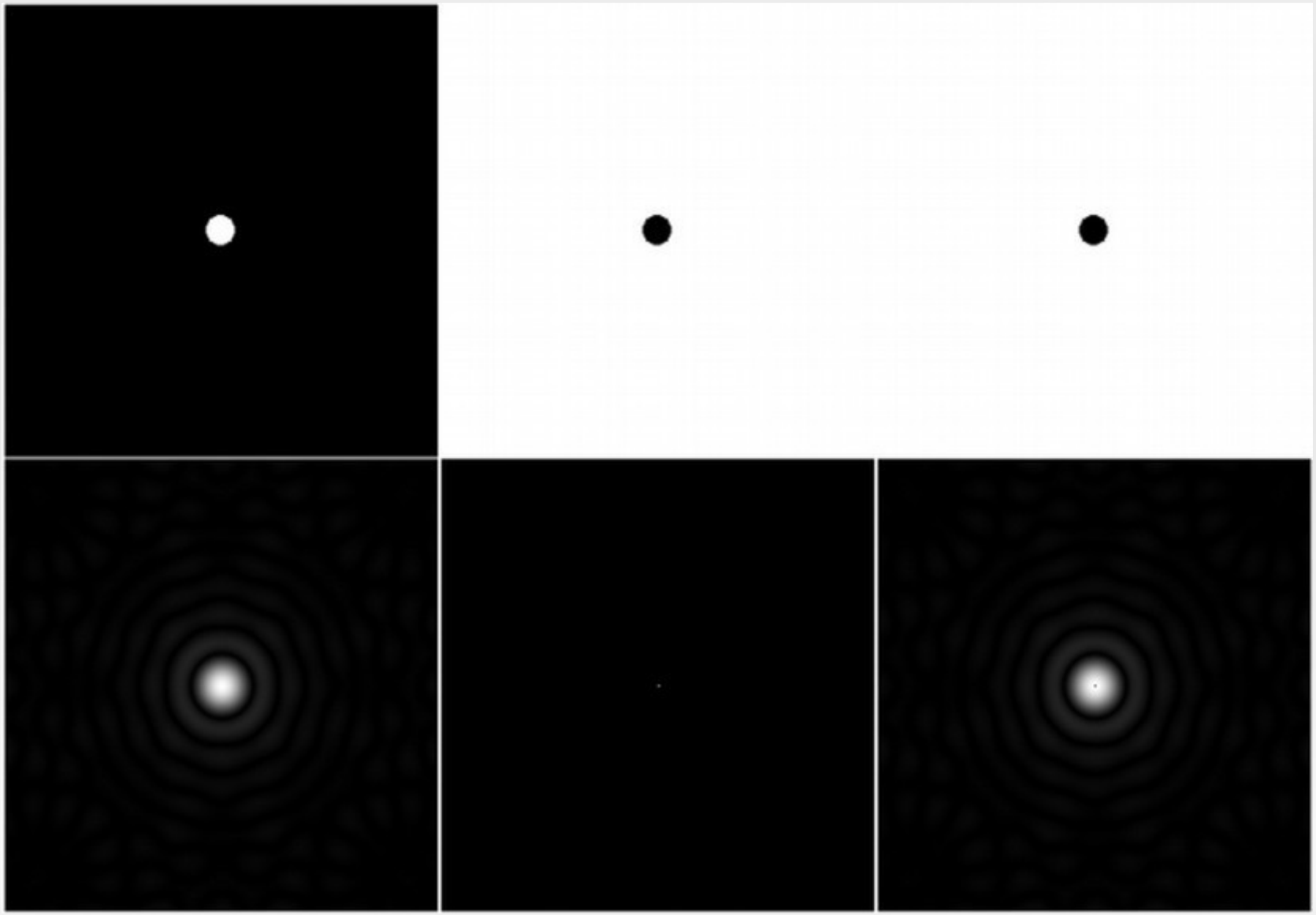
- T.F. Funkcji rzeczywistej jest hermitowska (rozkład natężenia ma symetrię środkową)

$$f(\boldsymbol{r}) \in \mathbb{R} \Rightarrow F(\boldsymbol{v}) = F^*(-\boldsymbol{v})$$

- obrót apertury obraca obraz dyfrakcyjny

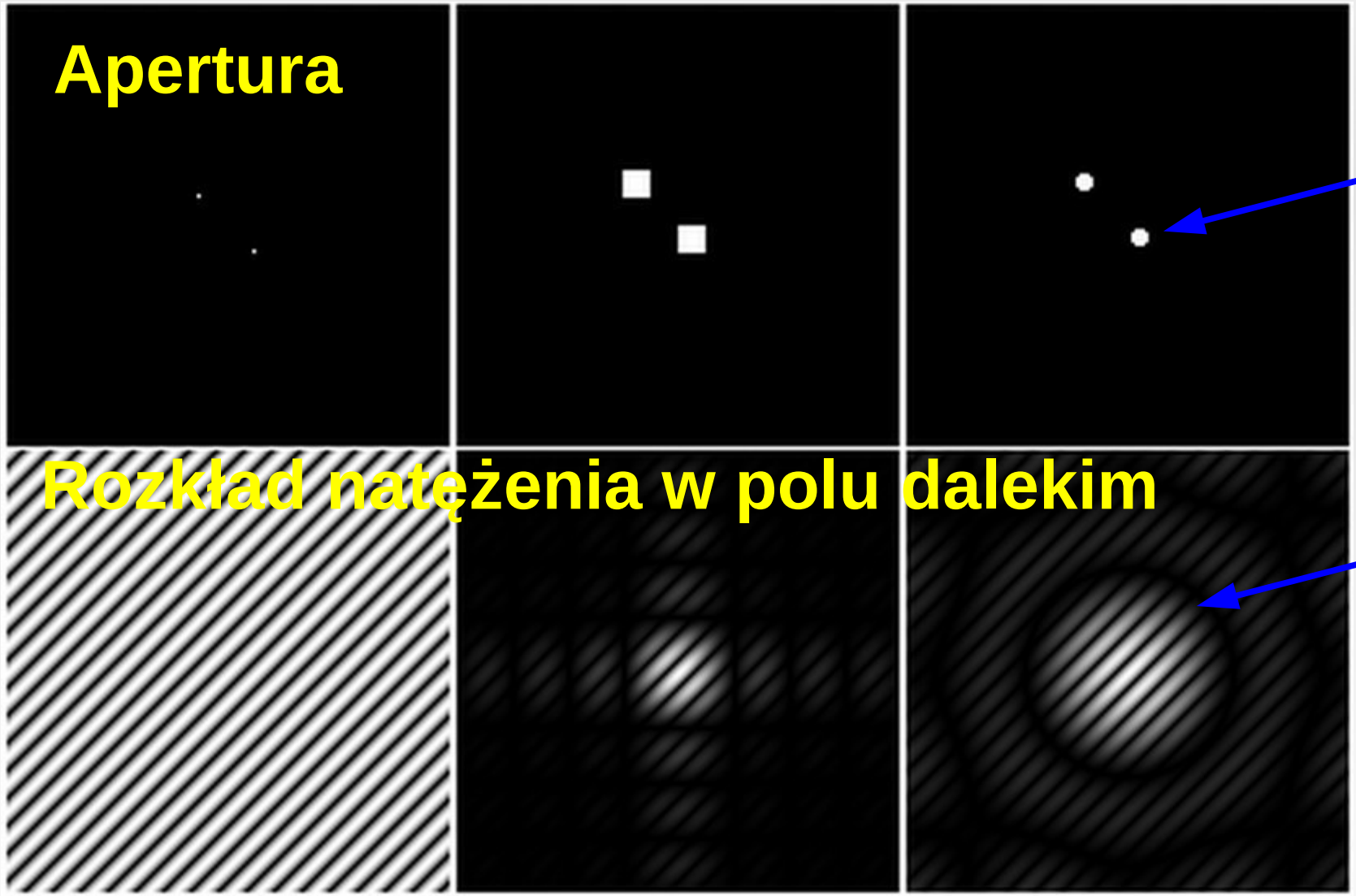
- „wąsy” (wysokie cz. przestrzenne) w kierunku prostopadłym do brzegów apertury

Negatyw



$$\alpha - f(\boldsymbol{r}) \Leftrightarrow \alpha\,\delta(\boldsymbol{v}) - F(\boldsymbol{v})$$

Tw. o splocie



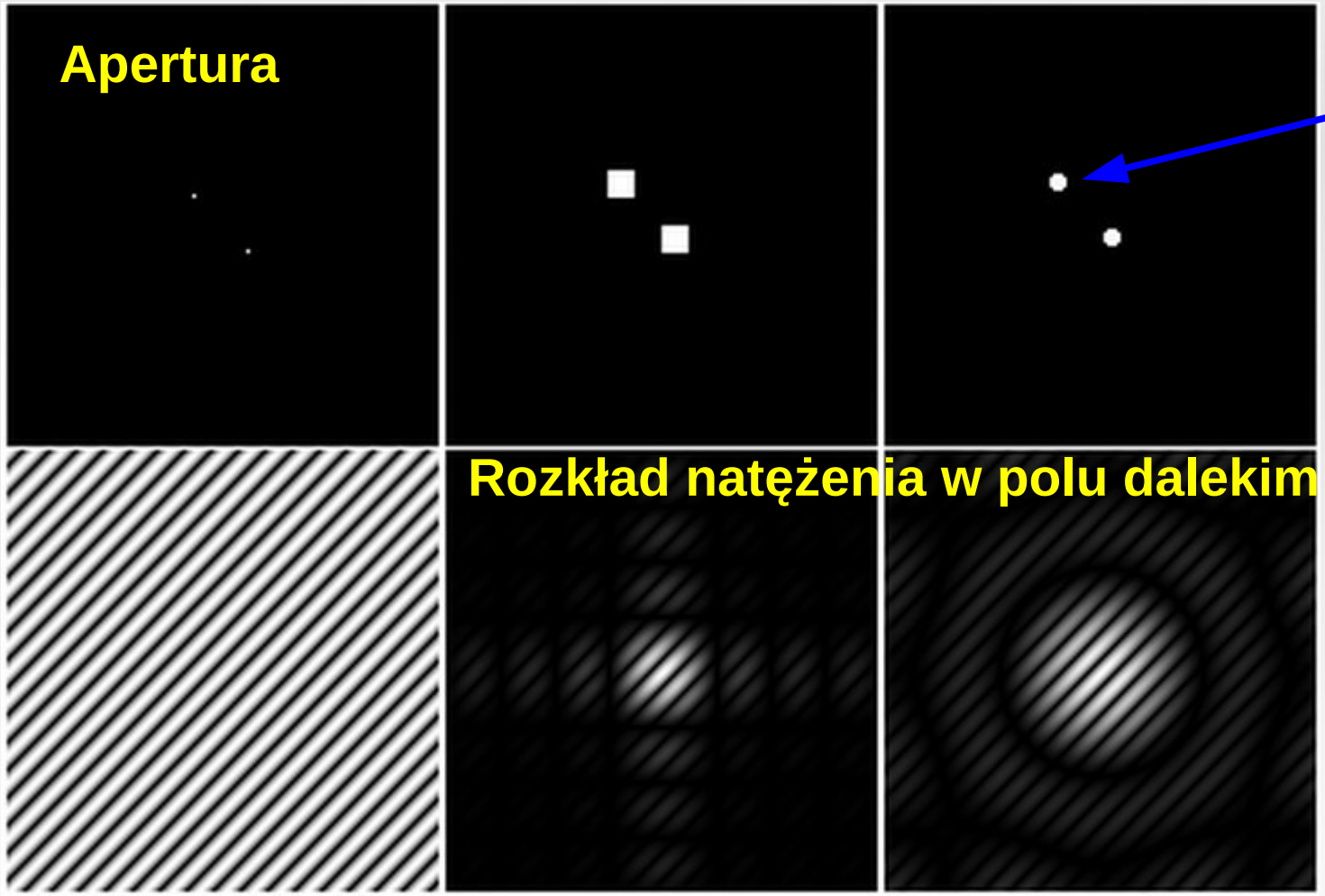
Kształt piksela

Kształt obwiedni

$$f(\boldsymbol{r}) = f_1(\boldsymbol{r}) * f_2(\boldsymbol{r}) = \int f_1(\boldsymbol{r}') \cdot f_2(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \cdot d\boldsymbol{r}' \quad \Leftrightarrow \quad F(\boldsymbol{\nu}) = F_1(\boldsymbol{\nu}) \cdot F_2(\boldsymbol{\nu})$$

DOE – znaczenie kształtu pikseli

$f_1(\boldsymbol{r}) = \delta(\boldsymbol{r} - r_0) + \delta(\boldsymbol{r} + r_0)$ $\quad f_2(\boldsymbol{r}) = rect(\boldsymbol{x}) \cdot rect(\boldsymbol{y})$ $\quad f_2(\boldsymbol{r}) = circ(\boldsymbol{r})$



Kształt piksela

$$F_1(\boldsymbol{v}) = e^{-2\pi i \boldsymbol{v}\boldsymbol{r}_0} + e^{+2\pi i \boldsymbol{v}\boldsymbol{r}_0} = 2\cos(2\pi \boldsymbol{v}\boldsymbol{r}_0)$$

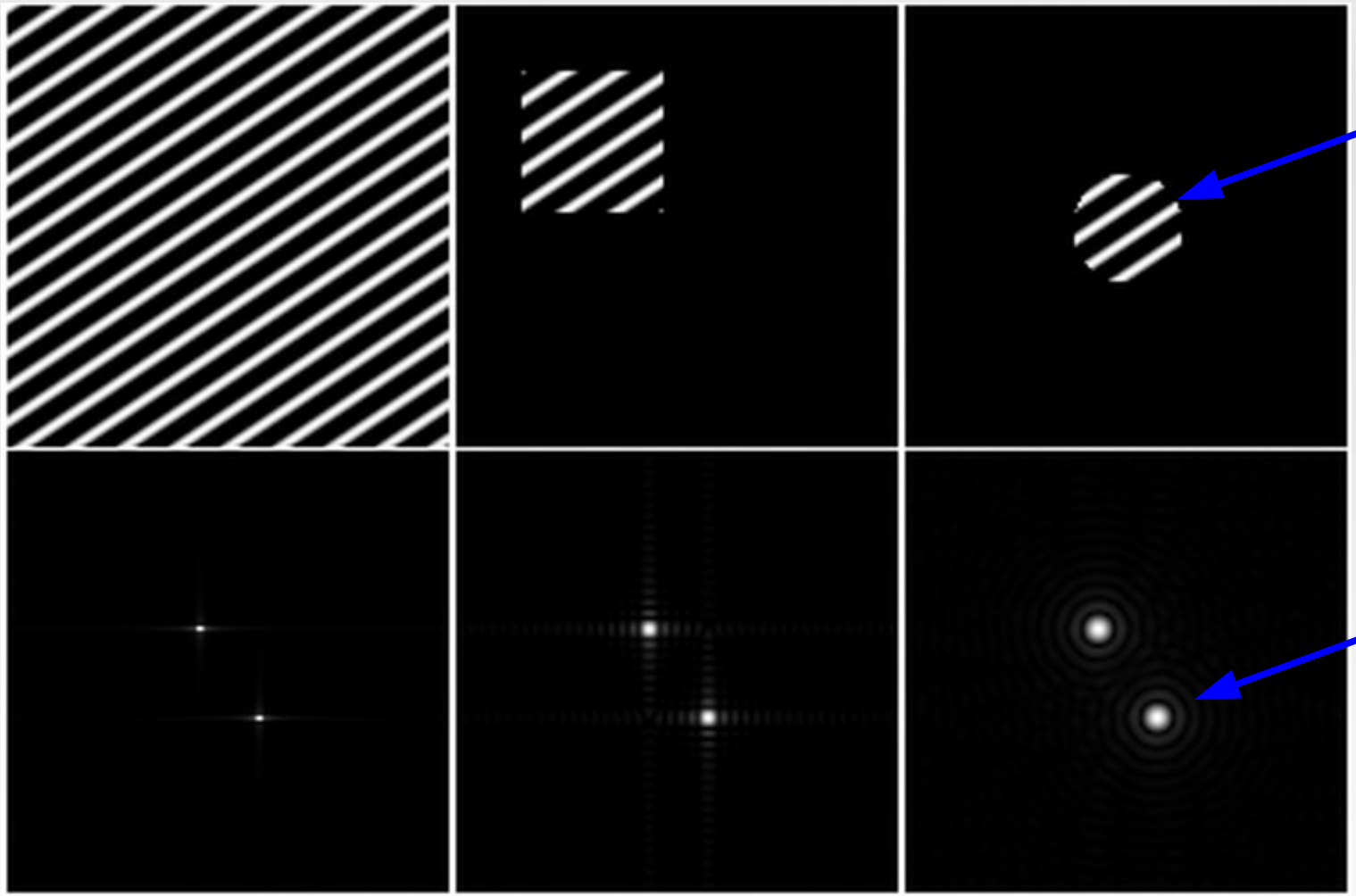
$$F_2(x, y) = sinc(x) \cdot sinc(y) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \cdot \frac{\sin(\pi y)}{\pi y}$$

$$F_2(\boldsymbol{v}) = \frac{J_1(2\pi|\boldsymbol{v}|)}{|\boldsymbol{v}|}$$

$$F(\boldsymbol{v}) = F_1(\boldsymbol{v}) \cdot F_2(\boldsymbol{v})$$

Siatka sinusoidalna

$f_1(\boldsymbol{r}) = \cos(2\pi\, \boldsymbol{r}\boldsymbol{\nu}_0)$ $\quad$ $f_2(\boldsymbol{r}) = rect(\boldsymbol{x}) \cdot rect(\boldsymbol{y})$ $\quad$ $f_2(\boldsymbol{r}) = circ(\boldsymbol{r})$



Kształt apertury

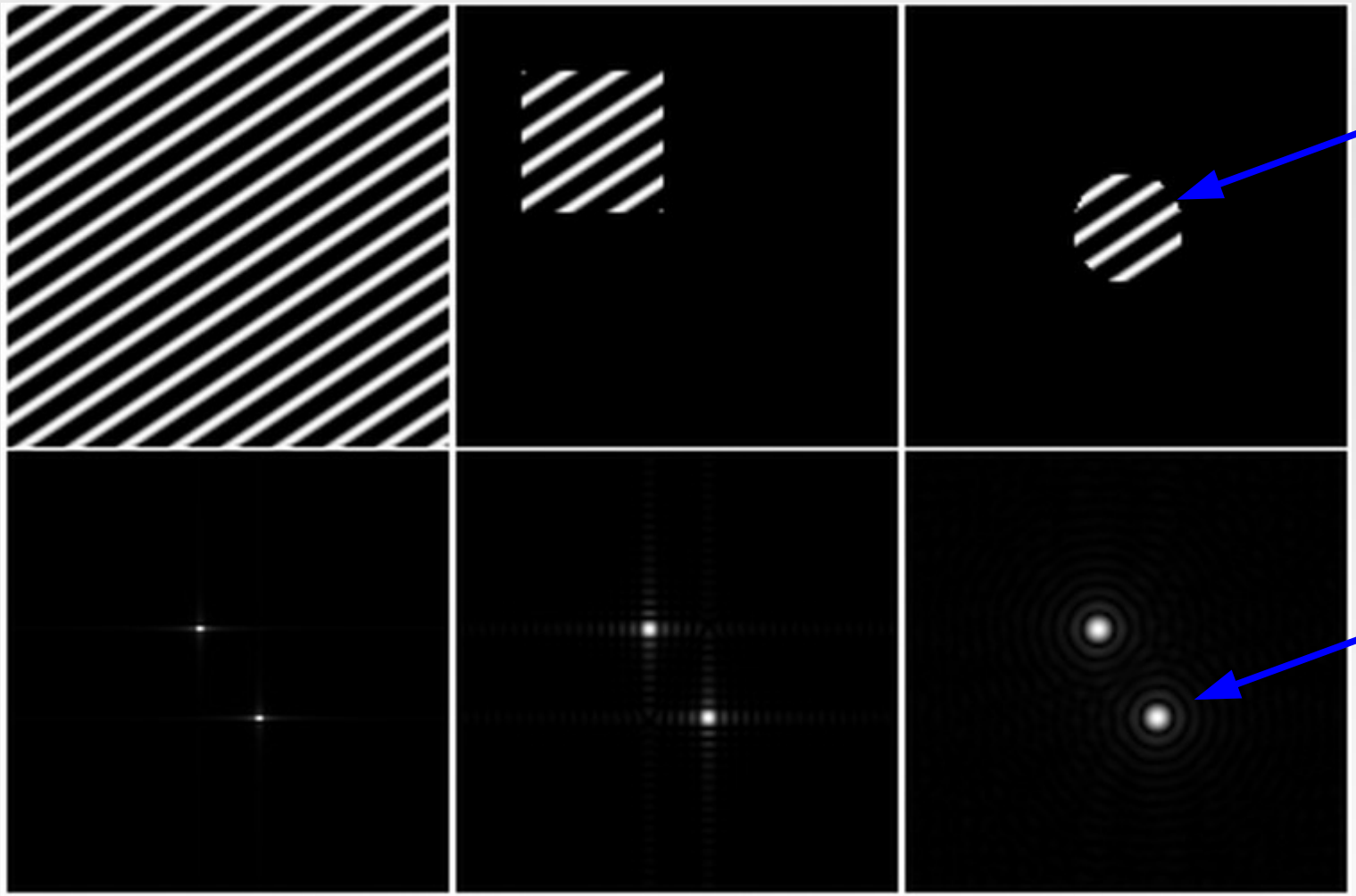
Funkcja rozmycia

$$F_1(\boldsymbol{\nu}) = \frac{\delta(\boldsymbol{\nu} - \nu_0) + \delta(\boldsymbol{\nu} + \nu_0)}{2} \qquad F_2(x, y) = sinc(x) \cdot sinc(y) \qquad F_2(\boldsymbol{\nu}) = \frac{J_1(2\pi|\boldsymbol{\nu}|)}{|\boldsymbol{\nu}|}$$

$$F(\boldsymbol{\nu}) = F_1(\boldsymbol{\nu}) * F_2(\boldsymbol{\nu})$$

Siatka sinusoidalna

$f_1(\boldsymbol{r}) = \cos(2\pi\, \boldsymbol{r}\boldsymbol{\nu}_0)$ $\quad$ $f_2(\boldsymbol{r}) = rect(\boldsymbol{x}) \cdot rect(\boldsymbol{y})$ $\quad$ $f_2(\boldsymbol{r}) = circ(\boldsymbol{r})$



Kształt apertury

Funkcja rozmycia

$$F_1(\boldsymbol{\nu}) = \frac{\delta(\boldsymbol{\nu} - \nu_0) + \delta(\boldsymbol{\nu} + \nu_0)}{2} \qquad F_2(x, y) = sinc(x) \cdot sinc(y) \qquad F_2(\boldsymbol{\nu}) = \frac{J_1(2\pi|\boldsymbol{\nu}|)}{|\boldsymbol{\nu}|}$$

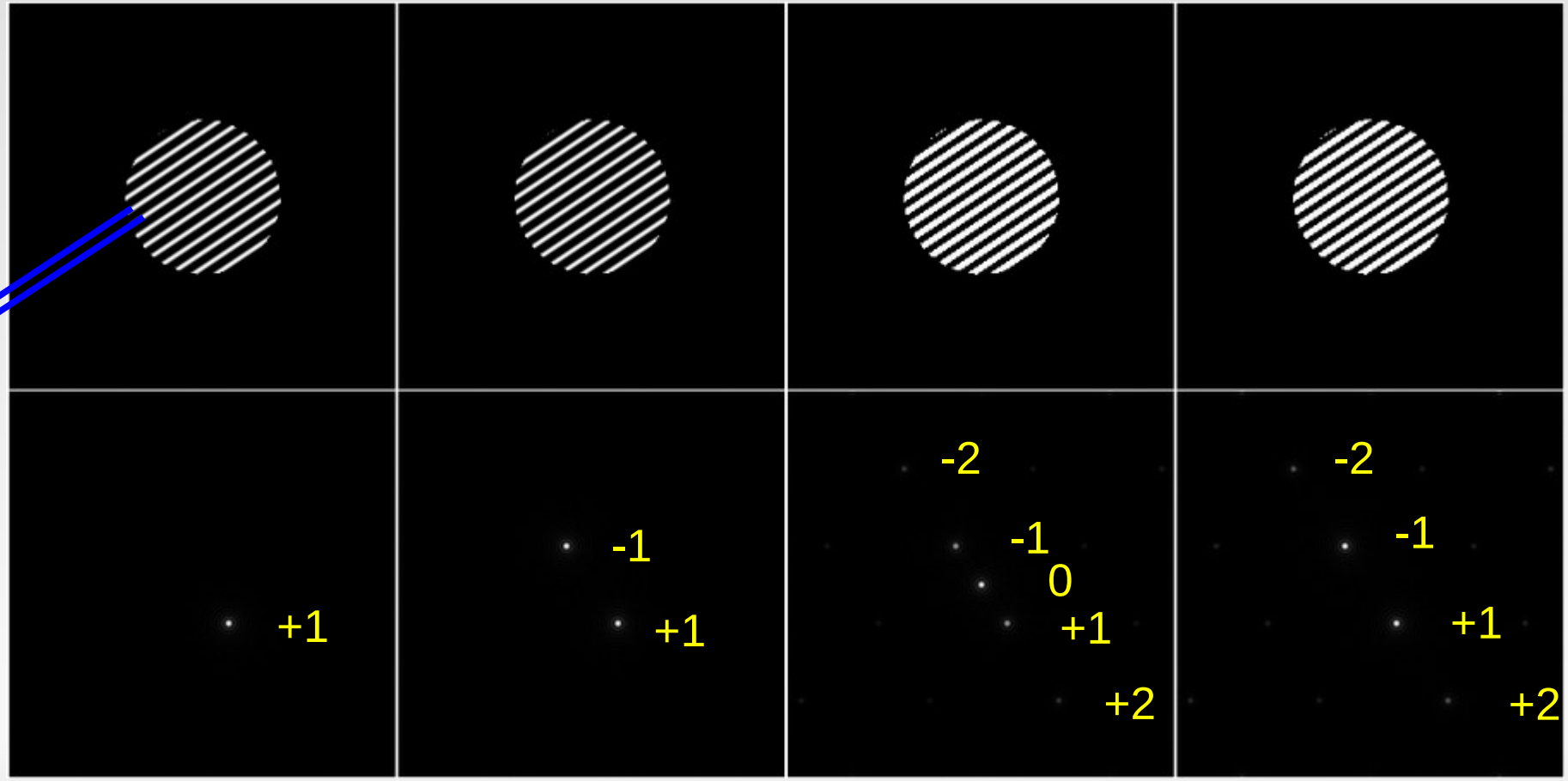
$$F(\boldsymbol{\nu}) = F_1(\boldsymbol{\nu}) * F_2(\boldsymbol{\nu})$$

Rodzaje siatek dyfrakcyjnych

Fazowa	Sinusoidalna	Binarna	Binarna fazowa
$f(\boldsymbol{r})=\exp(2\pi i\,\boldsymbol{r}\boldsymbol{\nu}_0)$	$f(\boldsymbol{r})=\cos(2\pi\,\boldsymbol{r}\boldsymbol{\nu}_0)$	$f(\boldsymbol{r})=H(\cos(2\pi\,\boldsymbol{r}\boldsymbol{\nu}_0))$	$f(\boldsymbol{r})=sgn(\cos(2\pi\,\boldsymbol{r}\boldsymbol{\nu}_0))$

$$f(\boldsymbol{r})=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(2\pi i\, n\boldsymbol{r}\boldsymbol{\nu}_0)$$

$|\boldsymbol{\nu}_0|=1/\Lambda$



$F(\boldsymbol{\nu})=\delta(\boldsymbol{\nu}-\boldsymbol{\nu}_0)$	$F(\boldsymbol{\nu})=\dfrac{\delta(\boldsymbol{\nu}-\boldsymbol{\nu}_0)+\delta(\boldsymbol{\nu}+\boldsymbol{\nu}_0)}{2}$	$F(\boldsymbol{\nu})=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\delta(\boldsymbol{\nu}-\boldsymbol{\nu}_0)$

Gęstość próbkowania i aliasing

Δx | $\Delta x' = \frac{\Delta x}{N'/N}$ | $\Delta x' = \Delta x$

$\Delta v = \frac{1}{N \cdot \Delta x}$ | $\Delta v' = \Delta v$ | $\Delta v' = \frac{\Delta v}{N'/N}$