Fizyka Pogody i Klimatu
Wykład 3

Szymon, Malinowski, Krzysztof Markowicz
Instytut Geofizyki
Uniwersytet Warszawski

Równania dynamiki dla przepływu powietrza:

- równania Naviera–Stokesa (równania ruchu) określające prawo zachowania pędu,
- równanie ciągłości wyrażające prawo zachowania masy,
- równanie dopływu ciepła – prawo zachowania energii,
- równanie transportu wilgoci (zachowanie wody).

Równania Naviera–Stokesa są formą II zasady dynamiki Newtona dla ośrodków ciągłych:

$$\frac{du_i}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} - g\delta_{i3} - 2\varepsilon_{ijk}\Omega_j u_k + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}.$$

W zapisie zastosowano sumowanie po powtarzających się indeksach (konwencja sumacyjna) oraz wykorzystano popularne tensory δ_{ij} (delta Kroneckera) i ε_{ijk} (tensor Levi–Civita). Ze względu na wektorowy charakter prędkości wiatru, $u = (u_1, u_2, u_3)$ (lub w innej notacji: $u = (u, v, w)$), zapis ten zawiera układ 3 równań poszczególnych składowych wiatru ($i = 1, \ldots, 3$).
Pierwszy składnik po prawej stronie oznacza przyspieszenie wywołane siłą gradientu ciśnienia p (ρ – gęstość powietrza); drugi to wpływ przyśpieszenia grawitacyjnego g; trzeci jest wynikiem działania siły Coriolisa powstającej pod wpływem ruchu obrotowego Ziemi ($\Omega = [0, \omega\cdot\sin(\varphi), \omega\cdot\cos(\varphi)]$ – wektor prędkości kątowej, $\omega = 2\pi/24h$, φ – szerokość geograficzna). Ostatni składnik jest wynikiem działania powierzchniowych sił deformacji powstających na skutek tarcia molekularnego.

Wieloskalowość przepływów atmosferycznych

Pogoda związana jest z ruchami (przepływami, cyrkulacjami) powietrza w atmosferze: począwszy od ogólnej cyrkulacji atmosfery, przez wyże i niże, cyklony tropikalne, tornada, cyrkulacje lokalne (jak bryza), szkwały, porywy i podmuchy wiatru. Każdy z tych przepływów występuje na obszarze o określonej wielkości, od tysięcy kilometrów po setki i dziesiątki metrów. Dokładniejsze pomiary szybkimi anemometrami pokazują, że w atmosferze występują też przepływy w mniejszych skalach (nawet pojedynczych milimetrów).

Dopiero w najmniejszych skalach wpływ lepkości powietrza powoduje, że ruch staje się „gładki” i nie można wyróżnić w nim już mniejszych struktur. Przepływy we wszystkich skalach oddziałują ze sobą, wymieniając energię. Mówimy, że przepływy atmosferyczne są **turbulentne** - cyrkulacje rozpadają się na mniejsze zawirowania, energia kinetyczna przepływu transportowana jest w dół skali.

Dopiero w zawirowaniach o skali milimetrów energia kinetyczna ulega dyssypacji (zamienia się w ciepło). Dodatkowo w przepływach atmosferycznych energia kinetyczna może być produkowana w różnych skalach z energii cieplnej (np. nierównomiernego ogrzewania czy przemian fazowych wody) bądź z energii potencjalnej.

Typy przepływów	Skala pozioma (m)	Nazwa skali
	10^{-7}m (0.1 μm)	średnia droga swobodna
przepływy bezwirowe	10^{-3}m (1mm)	
najmniejsze wiry	10^{-2}m (1cm)	turbulencja
małe wiry	10^{-1}m (10cm)	
zawirowania unoszące pył	1-10m	
podmuchy wiatru	10-100m	
tornada, drobne wiry konwekcyjne	100-1000m	
chmury konwekcyjne, chmury Cumulonimbus	10^{3}-10^{4}m (1-10km)	mezoskala
mezoskalowe systemy konwekcyjne, fronty, linie szkwałowe	10^{4}-10^{6}m (10-1000km)	
huragany	10^{5}-10^{6}m (100-1000km)	skala synoptyczna
niże i wyże	10^{6}m (1000km)	
cyrkulacja globalna	10^{7}m (10000km)	skala globalna

Podsumowanie:

Różne wielkości fizyczne: ciepło, wilgoć pęd są unoszone z przepływem.

Unoszenie wielkości ζ opisuje tzw. człon adwekcyjny, $\mathbf{U} \bullet \nabla \zeta$ w rownaniach.

Ruch turbulentny charakteryzuje się fluktuacjami losowymi przyepływu i unoszonych wielkości.

Transport wielkości fizycznych przez te fluktuacje jest wiele rzędów wielkości większy niż przez efekty molekularne (dyfuzję).

Strumień wielkości transportowanej przez te fluktuacje to średnia korelacja fluktuacji prędkości przepływu (w kierunku unoszenia) i fluktuacji tek wielkości:

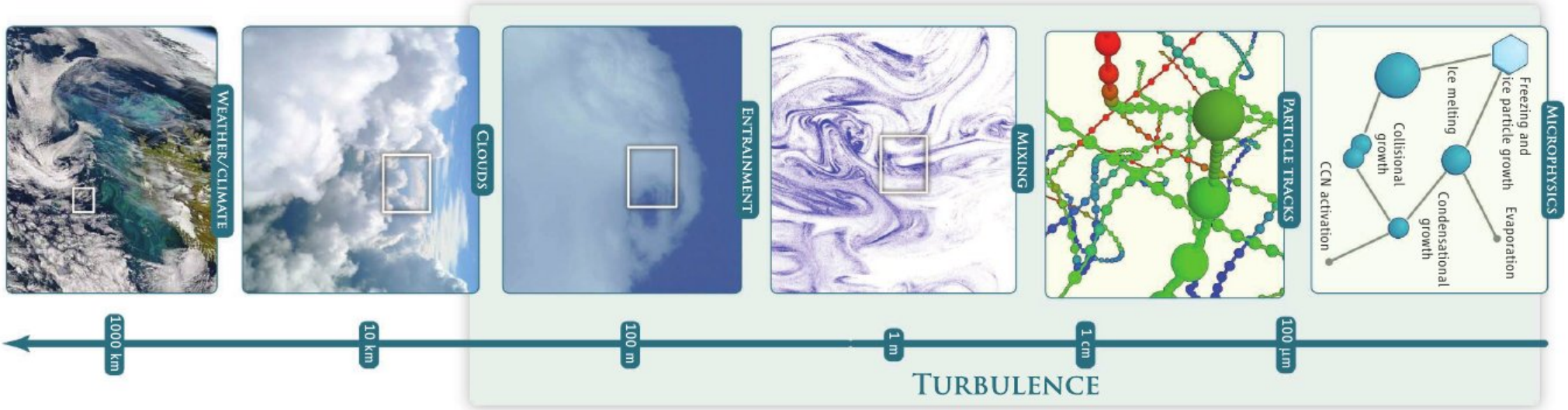
$$< u' \zeta' >$$

ATMOSPHERIC SCIENCE

Can We Understand Clouds Without Turbulence?

Advances at the interface between atmospheric and turbulence research are helping to elucidate fundamental properties of clouds.

E. Bodenschatz,[1,2] S. P. Malinowski,[3] R. A. Shaw,[4] F. Stratmann[5]



WIKIPEDIA:

Turbulencja, przepływ burzliwy - określenie bardzo skomplikowanego, nielaminarnego ruchu płynów. Ogólniej termin ten oznacza złożone zachowanie dowolnego układu fizycznego, czasem zachowanie chaotyczne. Ruch turbulentny płynu przejawia się w występowaniu wirów, zjawisku oderwania strugi, zjawisku mieszania. Dziedzinami nauki, które analizują zjawiska związane z turbulencją, są: hydrodynamika, aerodynamika i reologia. Model matematyczny turbulencji próbuje się tworzyć na bazie teorii układów dynamicznych i teorii chaosu.

ENCYKLOPEDIA PWN:

turbulencja [łac.], burzliwość, zjawisko polegające na występowaniu w przepływie nieuporządkowanych, przypadkowych ruchów elementów płynu.

turbulencja w atmosferze ziemskiej, ruch powietrza, przy którym prędkość przepływu i ciśnienie, a często także np. temperatura i wilgotność powietrza, podlegają przypadkowym fluktuacjom w czasie i przestrzeni;

burzliwość, fiz. → turbulencja.

fraktal [łac. fractus ‘złamany’, ‘cząstkowy’], mat. rodzaj figury geom., płaskiej lub przestrzennej, zazwyczaj charakteryzującej się własnością samopodobieństwa — małe fragmenty f., oglądane w odpowiednim powiększeniu, wyglądają tak samo jak obiekt pierwotny.

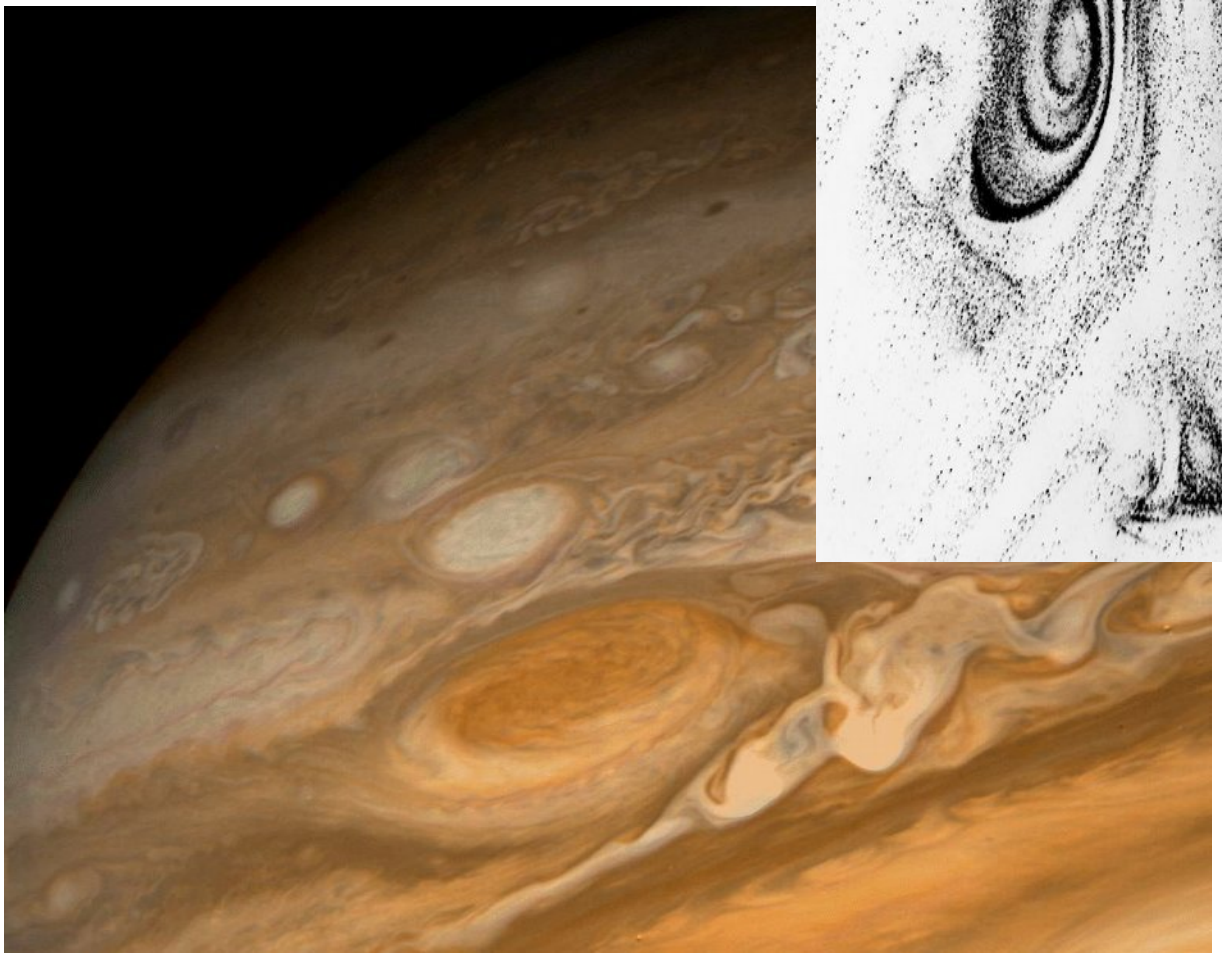
Cechy przepływów turbulentnych:

obejmują wiele skal przestrzennych i czasowych;

istotną rolę odgrywają w nich nieliniowe efekty adwekcyjne;

są nieprzewidywalne;

są nieodwracalne.



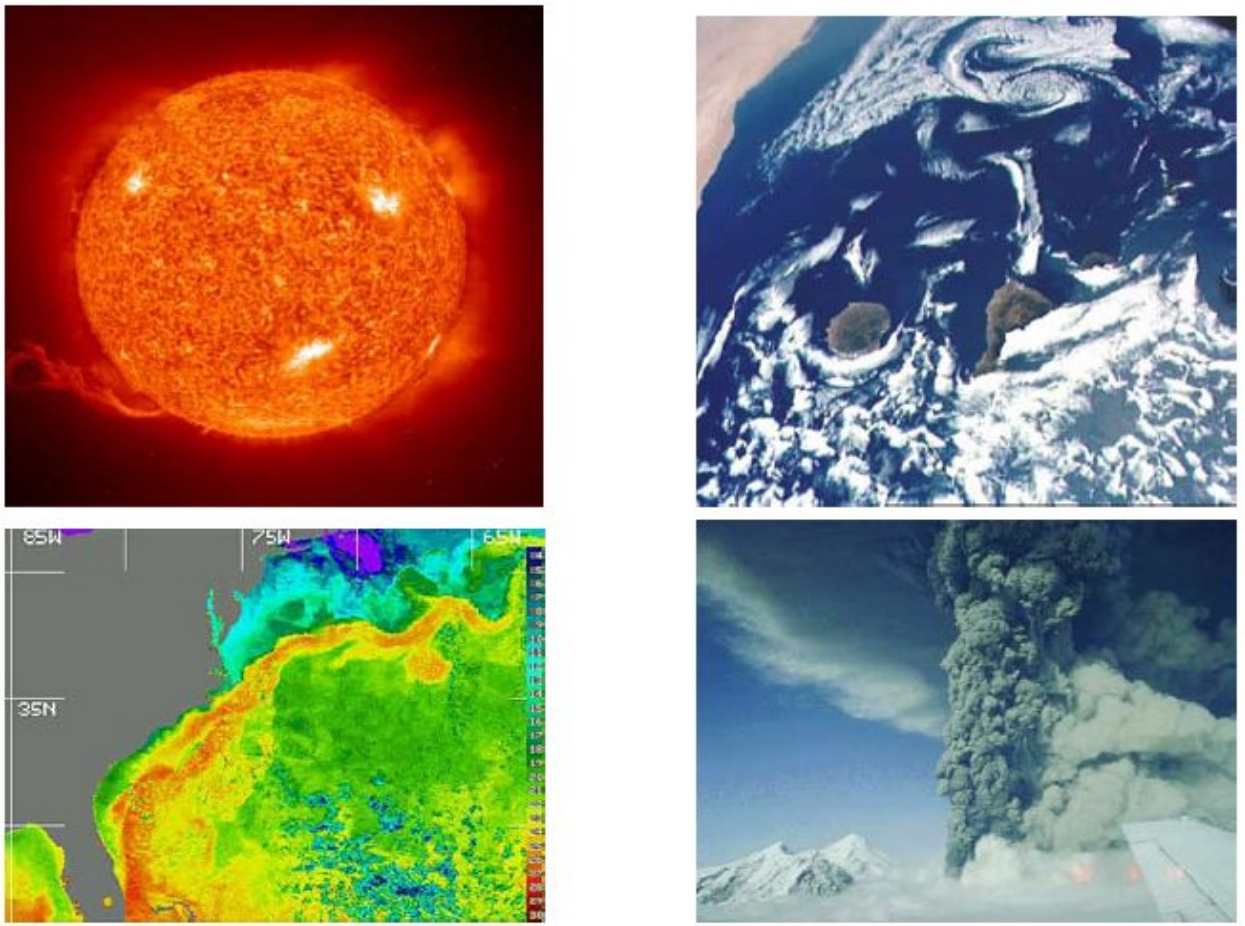


Figure 1.1: Examples of turbulent flows at the surface of the Sun, in the Earth's atmosphere, in the Gulf Stream at the ocean surface, and in a vulcanic eruption.

Wielu autorów zwraca uwagę na istotne cechy przepływów turbulentnych:

występuje w nich gwałtowne rozciąganie wirów;
obserwuje się w nich kaskadę energii: energia kinetyczna fluktuacji pobierana jest z przepływu średniego i przenosi się do coraz mniejszych fluktuacji, a w najmniejszych fluktuacjach, tam gdzie lepkośc zaczyna odgrywać istotna rolę dysypuje: zamienia się w ciepło.

Osborne Reynolds:

ON THE DYNAMICAL THEORY OF INCOMPRESSIBLE VISCOUS FLUIDS AND THE DETERMINATION OF THE CRITERION.

[*From the* "Philosophical Transactions of the Royal Society," 1895.]

(*Read* May 24, 1894.)

In 1850, after Joule's discovery of the Mechanical Equivalent of Heat, Stokes showed, by transforming the equations of motion—with arbitrary stresses—so as to obtain the equations of ("Vis-viva") energy, that this equation contained a definite function, which represented the difference between the work done on the fluid by the stresses and the rate of increase of the energy, per unit of volume, which function, he concluded, must, according to Joule, represent the Vis-viva converted into heat.

This conclusion was obtained from the equations irrespective of any particular relation between the stresses and the rates of distortion. Sir G. Stokes, however, translated the function into an expression in terms of the rates of distortion, which expression has since been named by Lord Rayleigh the *Dissipation-Function.*

2. In 1883 I succeeded in proving, by means of experiments with colour bands—the results of which were communicated to the Society*—that when water is caused by pressure to flow through a uniform smooth pipe, the motion of the water is *direct, i.e.*, parallel to the sides of the pipe, or *sinuous, i.e.*, crossing and re-crossing the pipe, according as U_m, the mean velocity of the water, as measured by dividing Q, the discharge, by Δ, the area of the section of the pipe, is below or above a certain value given by

$$K\mu/D\rho,$$

where D is the diameter of the pipe, ρ the density of the water, and K a numerical constant, the value of which according to my experiments, and, as I was able to show, to all the experiments by Poiseuille and Darcy, is for pipes of circular section between

1900 and 2000,

or, in other words, steady direct motion in round tubes is stable or unstable according as

$$\rho\frac{DU_m}{\mu} > 1900 \text{ or } < 2000,$$

the number K being thus a criterion of the possible maintenance of sinuous or eddying motion.

3. The experiments also showed that K was equally a criterion of the law of the resistance to be overcome—which changes from a resistance proportional to the velocity, and in exact accordance with the theoretical results obtained from the singular solution of the equation, when direct motion changes to sinuous, *i.e.*, when

$$\rho\frac{DU_m}{\mu} = K.$$

4. In the same paper I pointed out that the existence of this sudden change in the law of motion of fluids between solid surfaces when

$$DU_m = \frac{\mu}{\rho}K$$

proved the dependence of the manner of motion of the fluid on a relation between the product of the dimensions of the pipe multiplied by the velocity of the fluid, and the product of the molecular dimensions multiplied by the molecular velocities which determine the value of

$$\mu$$

for the fluid, also that the equations of motion for viscous fluid contained evidence of this relation.

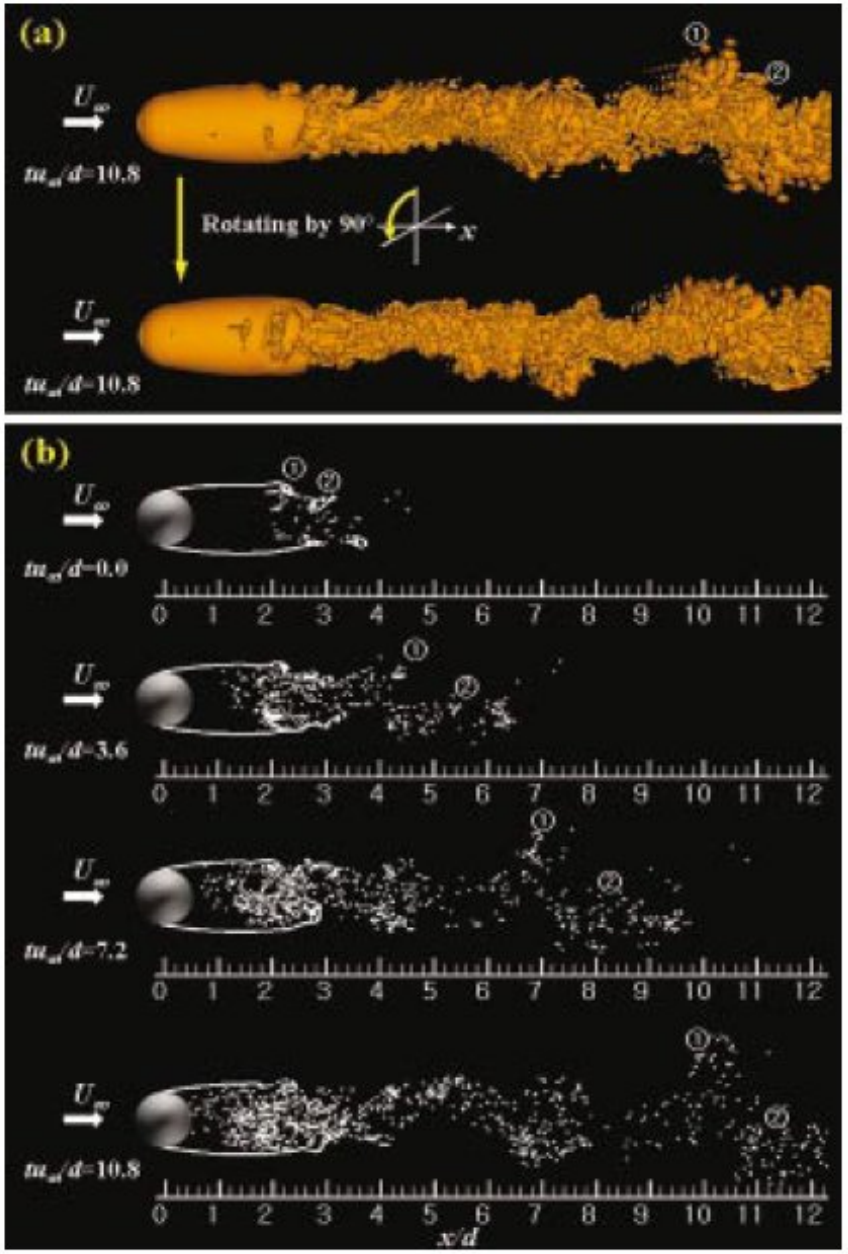


FIG. 3. Re=3700.

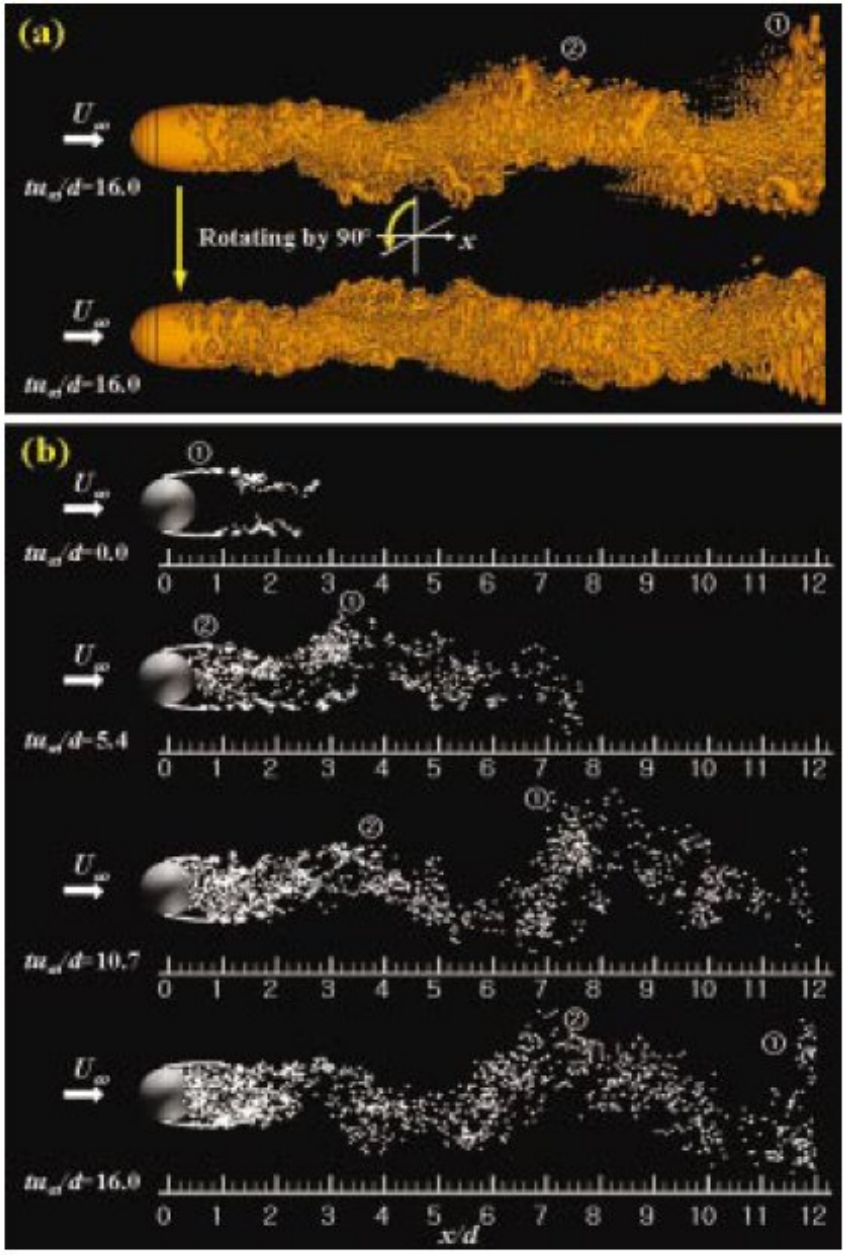


FIG. 4. Re=10^4.

$$R_e = \frac{UL}{\nu}$$

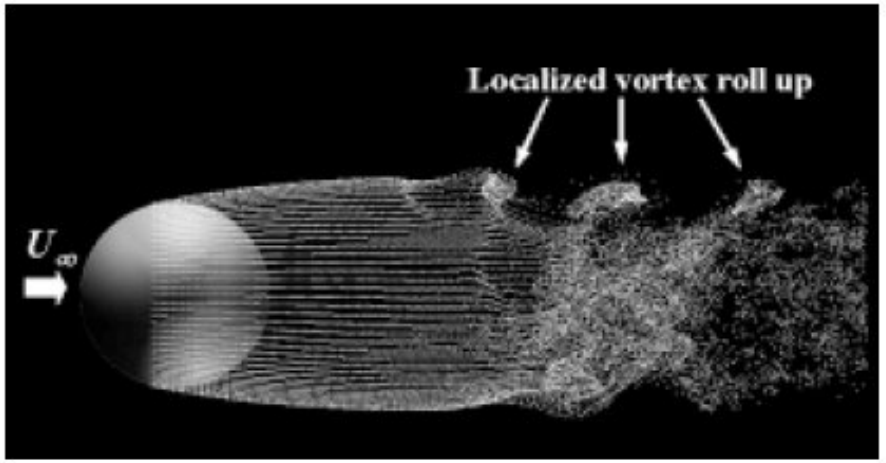


FIG. 1. Re=3700.

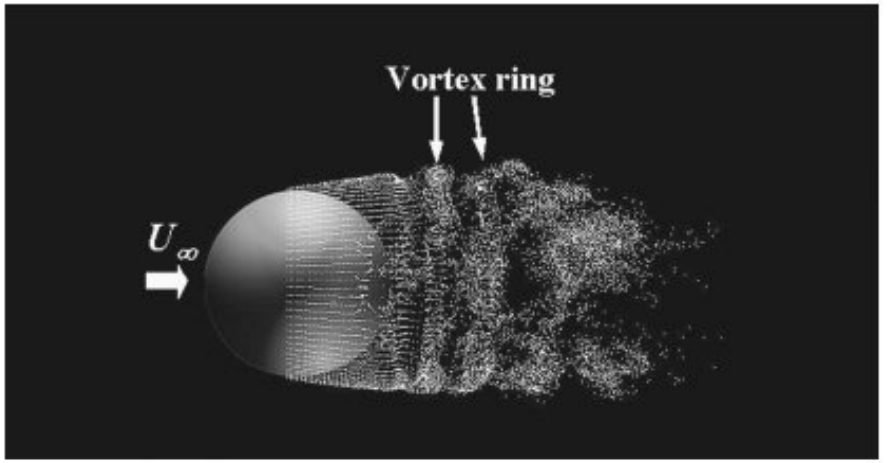
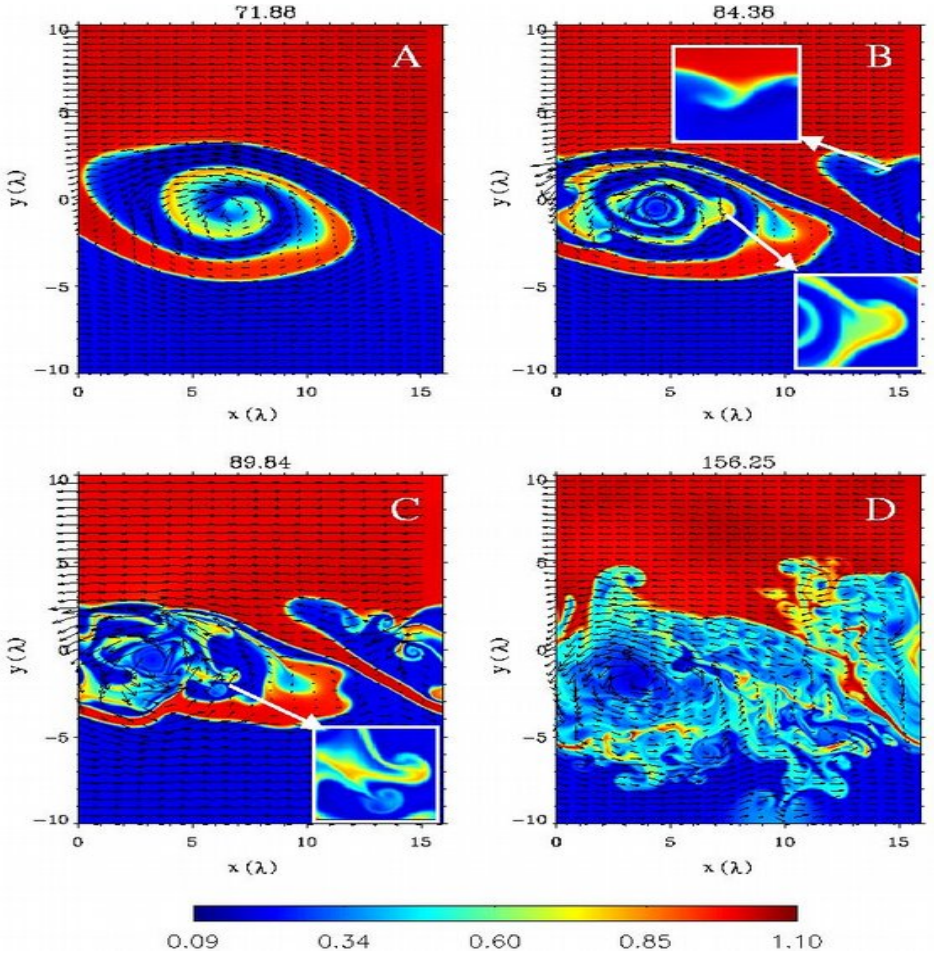
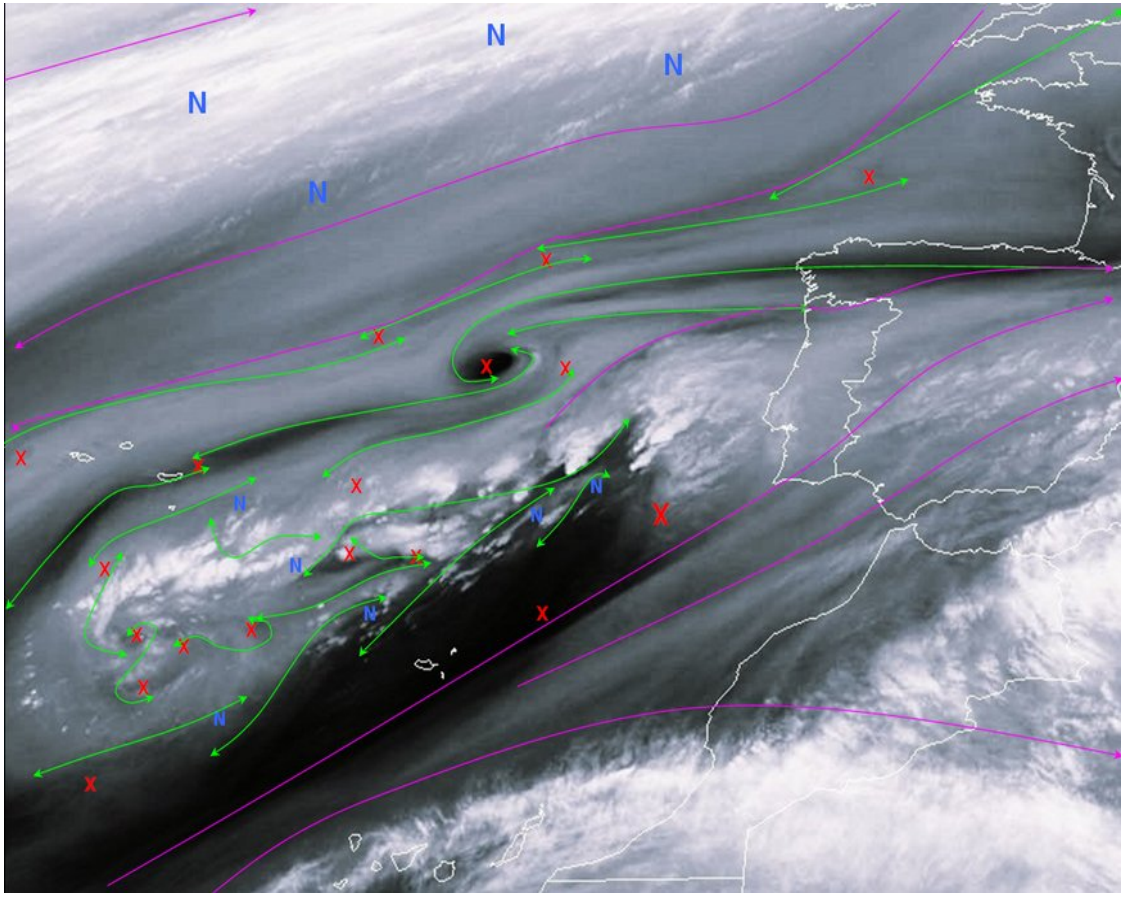


FIG. 2. Re=10^4.

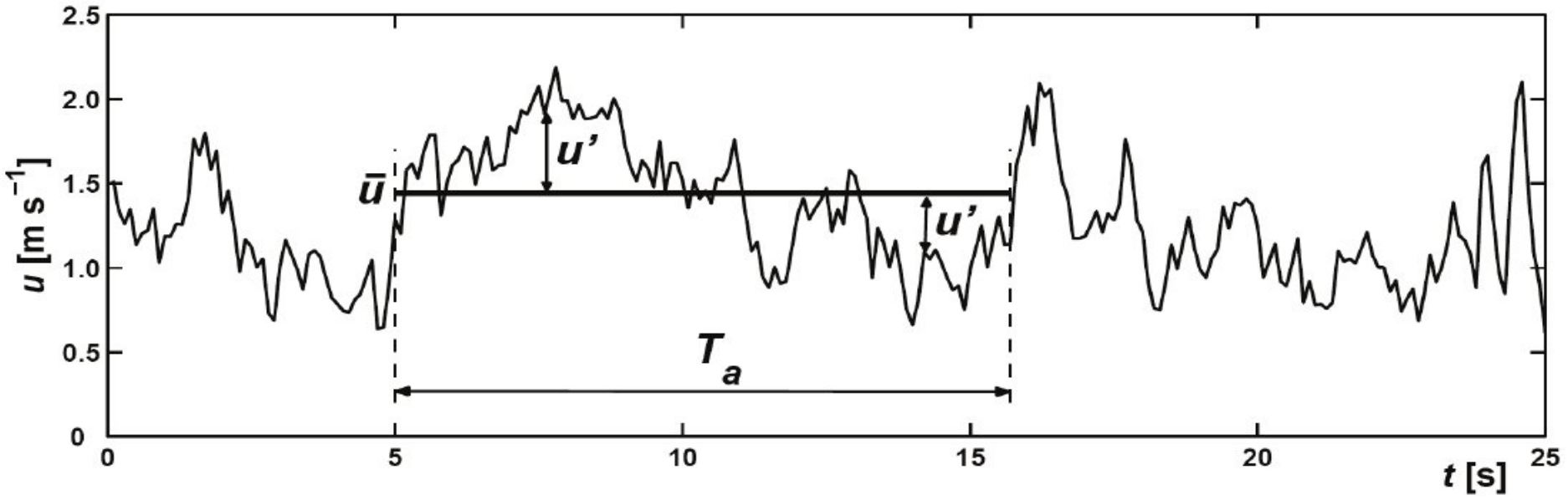




Ze względu na turbulencyjny charakter ruchu w atmosferze wartości dowolnej wielkości ξ można uznać za superpozycję stosunkowo powolnych zmian wynikających z jej dobowej zmienności lub czynników synoptycznych i burzliwych fluktuacji (pulsacji) mających losowy charakter:

$$\xi = \bar{\xi} + \xi'$$

czyli dla podstawowych parametrów:
$u = \bar{u} + u'$, $v = \bar{v} + v'$, $w = \bar{w} + w'$ – składowe prędkości wiatru
$\theta = \bar{\theta} + \theta'$ – temperatura potencjalna
$q = \bar{q} + q'$ – wilgotność właściwa.



Rozkład np. prędkości na wartość średnią (niezależną od czasu, ale mogącą zmieniać się w przestrzeni) i fluktuacje (odchylenia od tej średniej):

$$u(\mathbf{x},t) = \bar{u}(\mathbf{x}) + u'(\mathbf{x},t)$$ [3]

Reguły uśredniania Reynoldsa:

$$\overline{\bar{f}} = \bar{f}$$
$$\overline{f+g} = \bar{f} + \bar{g}$$
$$\overline{\bar{f}g} = \bar{f}\bar{g}$$
$$\overline{fg} \neq \bar{f}\bar{g}$$
$$\overline{\frac{\partial f}{\partial s}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial s}$$

Notes

1. ^ The true time average ($\bar{X}$) of a variable (x) is defined by,

$$\bar{X} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x \, dt$$

Problem: w atmosferze daleko od granicy....

In general for a time-average to be useful quantity, it is required that the average ($\bar{X}$) be independent of the starting time (t_0). This constraint is important for otherwise using time-averaging would be meaning less. This implies that the average value ($\bar{X}$) is independent of time (t). Since it is not possible to integrate over an infinte time period, it is necessary to restict the integration to some finite, yet large time interval. This interval is so selected that the term $\bar{X}$ is independent of the length of the interval (T). However, the independence from t_0 can no longer be ensured. Only in case of steady flows will $\bar{X}$ be independent of both t_0 and T. Thus,

$$\bar{X}(t_0) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x \, dt$$

2. ^ By definition, the mean of the fluctuating quantity is zero($\bar{u'} = 0$).
3. ^ Some authors prefer using U instead of $\bar{u}$ for the mean term (since an overbar is used to represent a vector). Also it is common practice to represent the fluctuating term u' by u, even though u refers to the instantaneous value. This is possible because the two terms do not appear simultaneously in the same equation. to avoid confusion we will use $u, \bar{u},$ and u' to represent the instantaneous, mean and fluctuating term.
4. ^ The equations are expressed in tensor notation, which greatly simplifies the maths.

Rozkład pól parametrów meteorologicznych na część średnią i fluktuacje zaproponowany przez Reynoldsa w końcu XIX w. (Reynolds 1894) ma kluczowe znaczenie dla badania dynamiki atmosfery. W praktyce bowiem nie jest możliwy ani dokładny pomiar wielkości chwilowych (każdy przyrząd pomiarowy cechuje się pewną bezwładnością czasową) ani ich numeryczna analiza (konieczność stosowania bardzo gęstej siatki dla dużego obszaru przekraczająca możliwości obliczeniowe komputerów).

Aby równania dynamiki atmosfery mogły być efektywnie wykorzystane muszą być przepisane dla wartości średnich. Kwestia uśredniania i określenia fluktuacji jest umowna i zależy od badanych skal przepływu.

Absolutne (zupełne) pochodne pojawiające się w równaniach są dla dowolnej wielkości ξ sumą zmian indywidualnych i adwekcyjnych (unoszenia przez przepływ):

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + u_i \frac{\partial \xi}{\partial x_i} .$$

Wstawiają $\xi = \bar{\xi} + \xi'$ i uśredniając wykorzystując równanie ciągłości dostajemy:

$$\overline{\frac{d\xi}{dt}} = \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\xi'}}{\partial t} + \overline{u_i} \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x_i} + \overline{u_i} \frac{\partial \overline{\xi'}}{\partial x_i} + \overline{u_i'} \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{u_i' \xi'}}{\partial x_i} ,$$

i dalej, korzystając z reguł uśredniania Reynoldsa (następny slajd) mamy:

$$\frac{d\bar{\xi}}{dt} = \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial t} + \overline{u_i} \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{u_i' \xi'}}{\partial x_i}$$

Widać, że procedura uśredniania Reynoldsa prowadzi do pojawienia się w równaniach dodatkowych czynników:

$$\partial \overline{u_i' \xi'} / \partial x_i$$

W równaniach dla wartości średnich zapisywane są one po prawej stronie i po dodatkowych uproszczeniach równania te przyjmują postać:

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \overline{u}_j \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\overline{\rho}} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} - g\delta_{i3} - f_C \varepsilon_{ij3} \overline{u}_j - \frac{\partial \overline{u_j' u_i'}}{\partial x_j},$$

$$\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_j} = 0,$$

$$\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial t} + \overline{u}_j \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\overline{\rho}\, c_p} \frac{\partial \overline{Q_j^*}}{\partial x_i} - \frac{\partial \overline{u_j' \theta'}}{\partial x_j},$$

$$\frac{\partial \overline{q}}{\partial t} + \overline{u}_j \frac{\partial \overline{q}}{\partial x_j} = -\frac{\partial \overline{u_j' q'}}{\partial x_j},$$

$$\overline{p} = \overline{\rho}\, \overline{T_v}\, R.$$

Wielkości $\overline{u_j'u_i'}$, $\overline{u_j'\theta'}$, $\overline{u_j'q'}$ opisują turbulencyjny transport pędu, ciepła i wilgoci (statystycznie są to kowariancje składowych prędkości wiatru z analizowanymi zmiennym).

Są to składowe **turbulencyjnych strumieni pędu, ciepła i wilgoci** wyrażone w tzw. formie kinematycznej.

Jeżeli za strumień danej wielkości uznamy jej ilość przepływającą w jednostce czasu przez jednostkę powierzchni, to strumienie kinematyczne będą powiązane z tak zdefiniowanymi strumieniami pędu, M_i, (w $kg \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}$), ciepła Q_H (w $W \cdot m^{-2}$) i wilgoci, E (w $kg_{H2O} \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}$) zależnościami:

$$\mathbf{M}_i = \rho \cdot \left[\overline{u'u_i'}, \quad \overline{v'u_i'}, \quad \overline{w'u_i'}\right],$$

$$\mathbf{Q_H} = \rho \cdot c_p \cdot \left[\overline{u'\theta'}, \quad \overline{v'\theta'}, \quad \overline{w'\theta'}\right],$$

$$\mathbf{E} = \rho \cdot \left[\overline{u'q'}, \quad \overline{v'q'}, \quad \overline{w'q'}\right].$$

Kinematyczna forma strumieni sugeruje prostą metodę pomiarów strumieni jako iloczynów fluktuacji (kowariancji) odpowiednich wielkości.
Dodatkowo turbulencyjne strumienie pędu definiują tzw. tensor naprężeń Reynoldsa, τ_R:

$$\boldsymbol{\tau}_R = -\rho \cdot \begin{bmatrix} \overline{u'u'} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{v'u'} & \overline{v'v'} & \overline{v'w'} \\ \overline{w'u'} & \overline{w'v'} & \overline{w'w'} \end{bmatrix}$$

Strumienie takie jak <u'w'>, <v'w'>, <w'θ'>, <w'q'> mierzy się przy horyzontalnie jednorodnym przeplywie.

Opisują one oddziaływanie powierzchni ziemi z atmosfera swobodną.

SIEBERT ET AL.

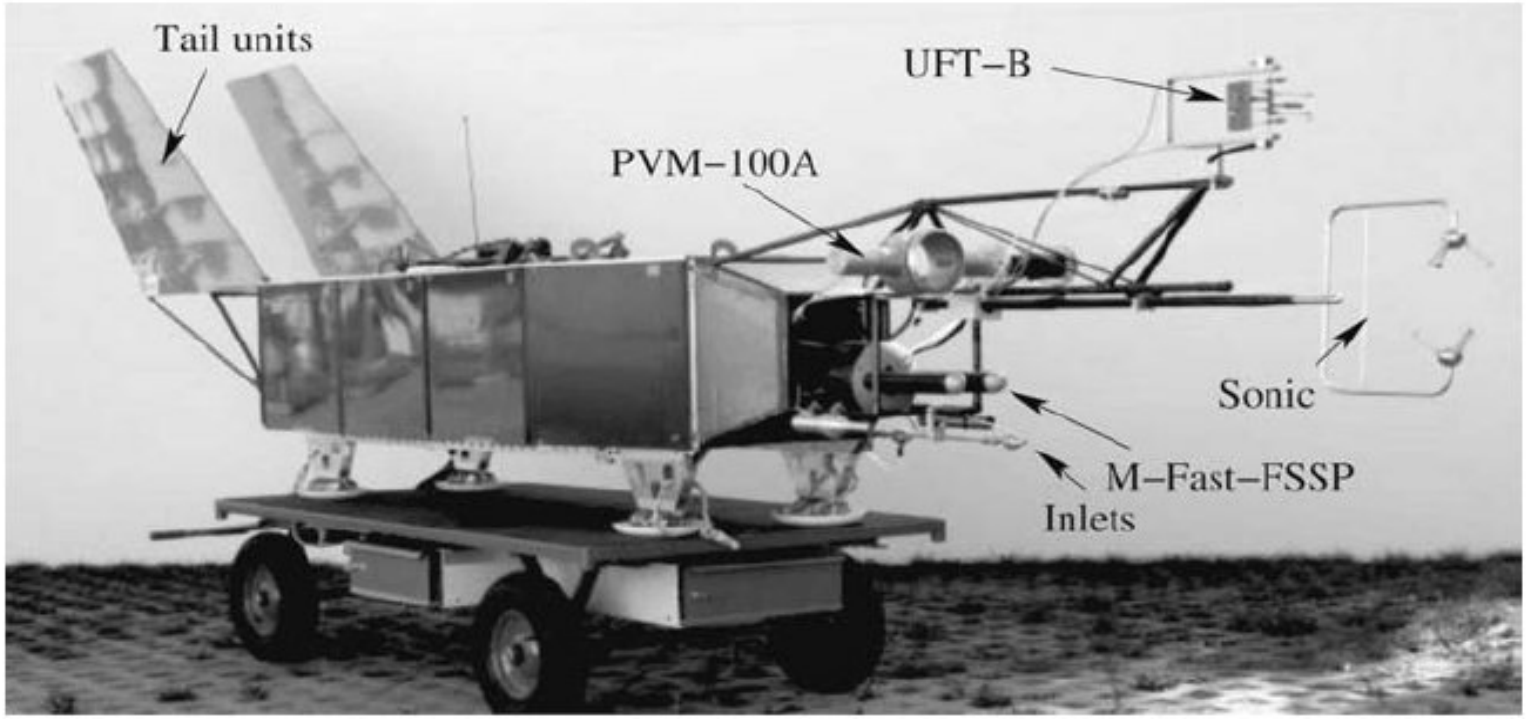


FIG. 1. The turbulence payload ACTOS with sonic, UFT-B, PVM-100A, and M-Fast-FSSP. Also shown are the inlets for humidity and aerosol particle measurements.

Przykłady pomiarów z platformy ACTOS. Korelacje fluktuacji u i w opisują strumienie pędu czyli wymianę pedu między warstwami turbulentnej atmosfery.

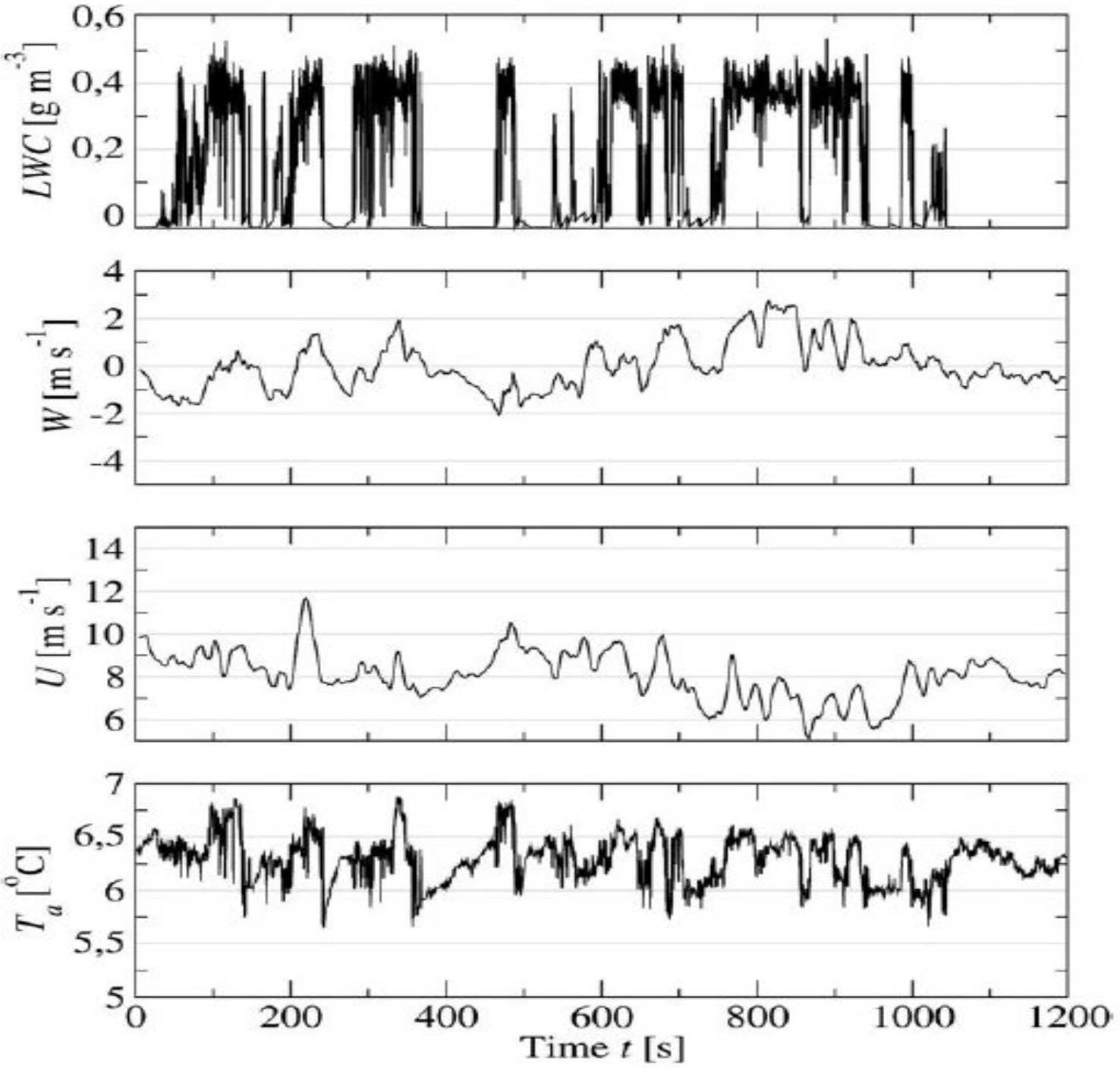
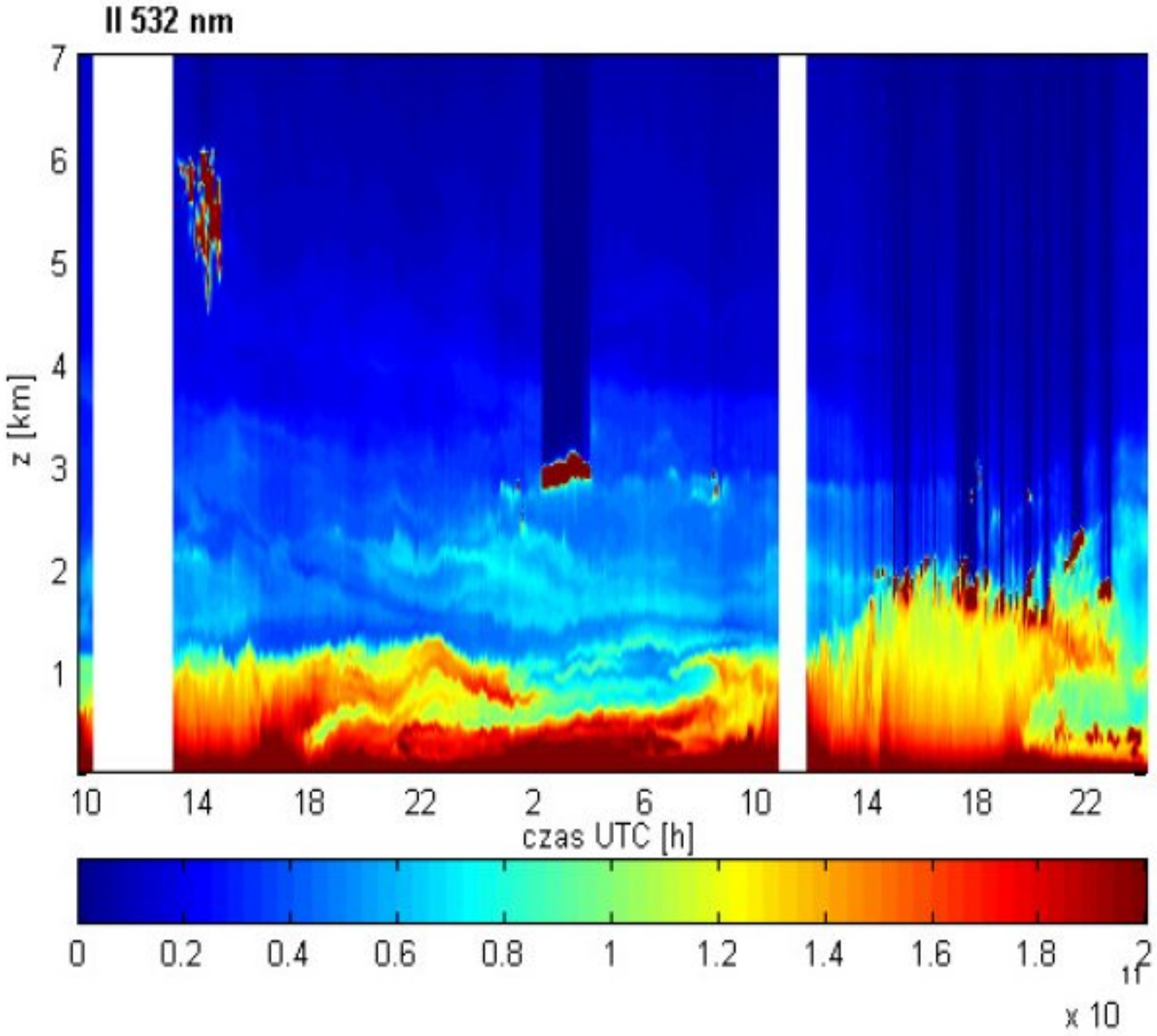
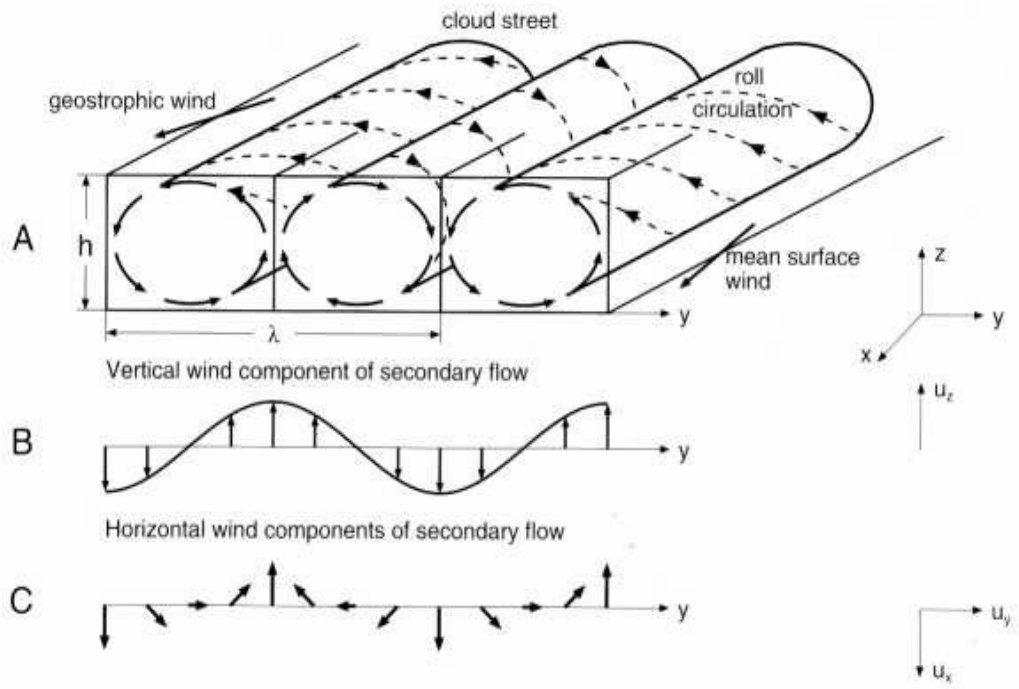


FIG. 3. Time series of LWC, vertical wind velocity W, horizontal wind velocity U, and temperature T_a as measured with ACTOS at a height of around 760 m AGL on 21 May 2003 during the BBC2 campaign.

Obszar w ciepłych kolorach to obszar gdzie pyły emitowane Z powierzchni ziemi unoszone są z przepływem turbulentnym w górę: w dzień wyżej (obszar turbulencji związany z konwekcją, w nocy nisko (wąski obszar turbulencji blisko ziemi)

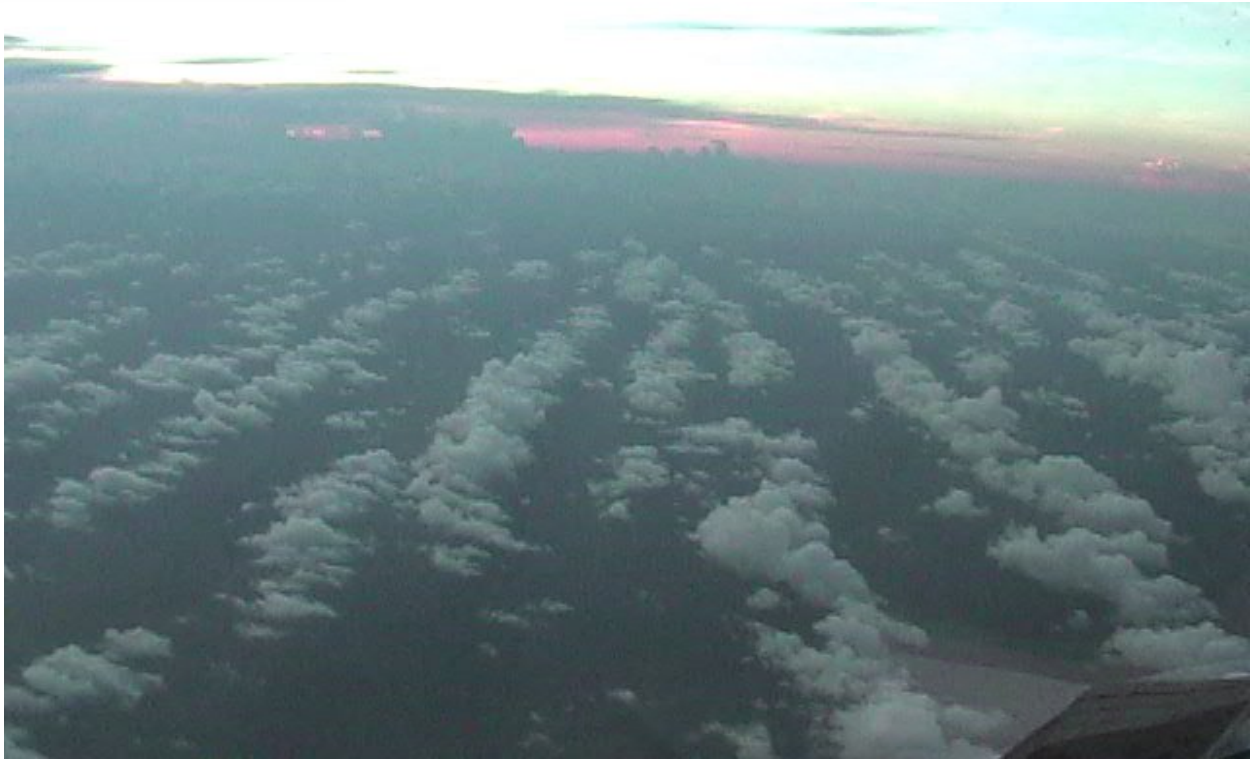


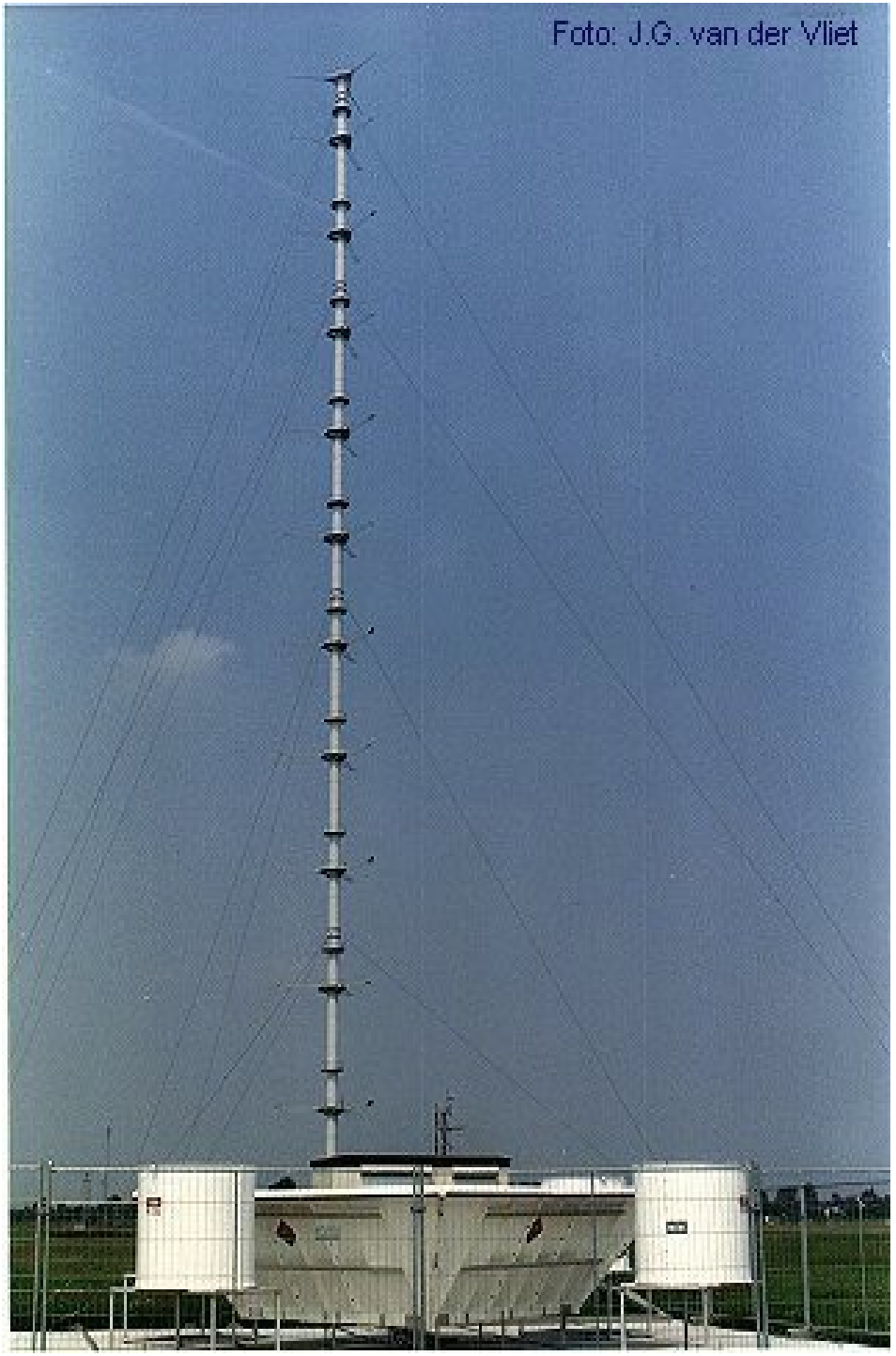
Rys. 8.7: Sygnały zarejestrowane przez Teramobile Profler w dniach 13-14.04, kanał 532 nm, polaryzacja równoległa do polaryzacji wiązki emitowanej (natężenie w jednostkach umownych, zaznaczone kolorami).



Przykład zorganizowanego transportu konwekcyjnego: turbulencja + zorganizowane rolki konwekcyjne. Para wodna unoszona od powierzchni ziemi z przepływem kondensuje w górnej części prądów wstępujących i powstają chmury.

Rolki konwekcyjne





Maszt pomiarowy w Cabauw w Holandii. Dane pomiarowe pochodzące z tego masztu wykorzystywane są w ćwiczeniu do wykładu.

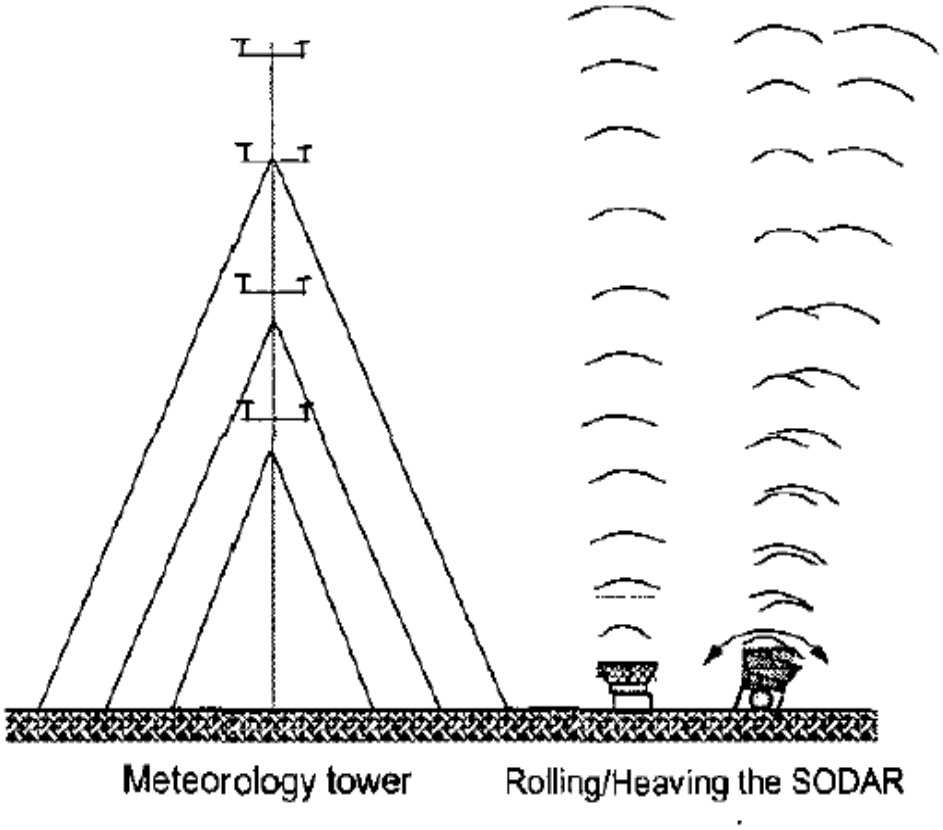


Fig.4 Comparison of wind data measured by the SODAR and a meteorology tower

Inne platformy pomiarowe używane do badania strumieni. Przyrządy pomiarowe umieszczone są daleko od siebie co utrudnia interpretacje pomiarów i obliczanie korelacji.

Przykłady pomiarów temperatury i wody w oddalonych przyrządach. W rzeczywistości skoki temperatury i wody są w tym samym miejscu.

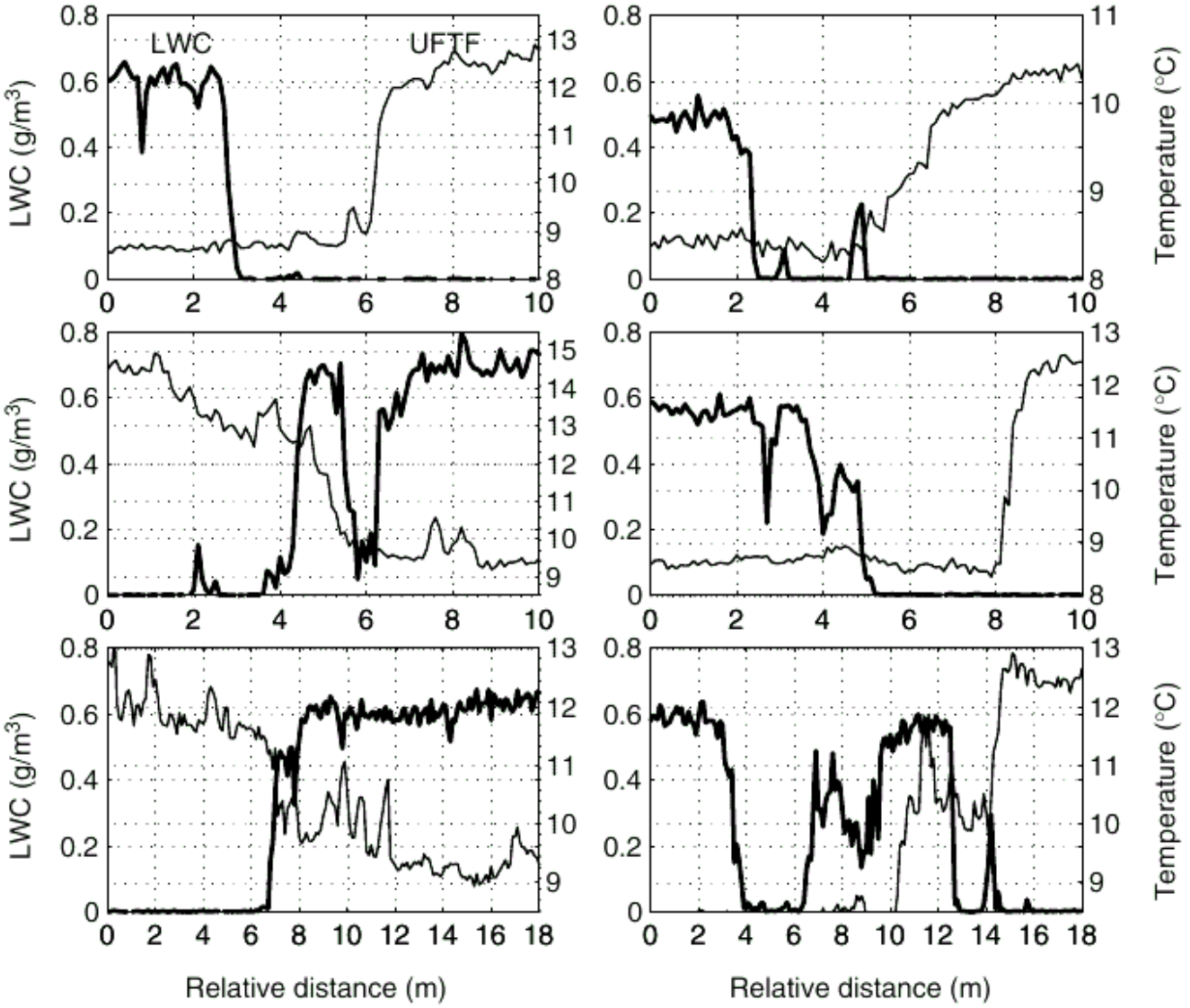


Figure 4. Examples of the cloud edge in 1000 Hz temperature (thin line) and LWC (thick line) records. Sharp jumps in LWC and temperature at distances of the order of 10 cm (data resolution) are currently observed. Notice a shift between the temperature and LWC records resulting from the 6 m separation between the instruments and the low pitch angle of the aircraft with respect to the cloud clear air interface.

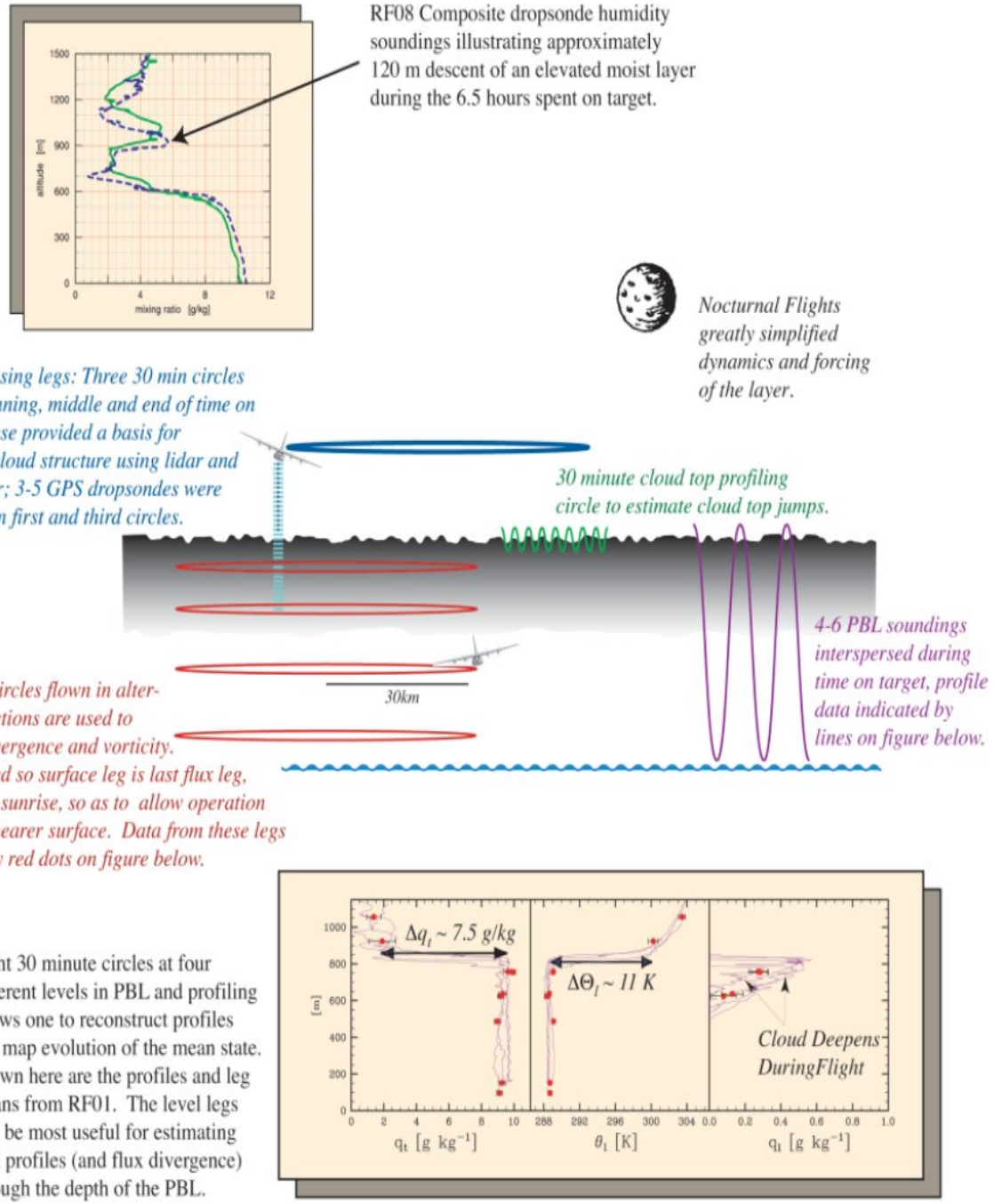


FIG. 2. DYCOMS-II flight strategy. Symbols in bottom panel refer to total water mixing ratio q_t; its change across cloud top, Δq_t; liquid water potential temperature, θ_l; its change across cloud top, $\Delta\theta_l$; and liquid water mixing ratio q_l.

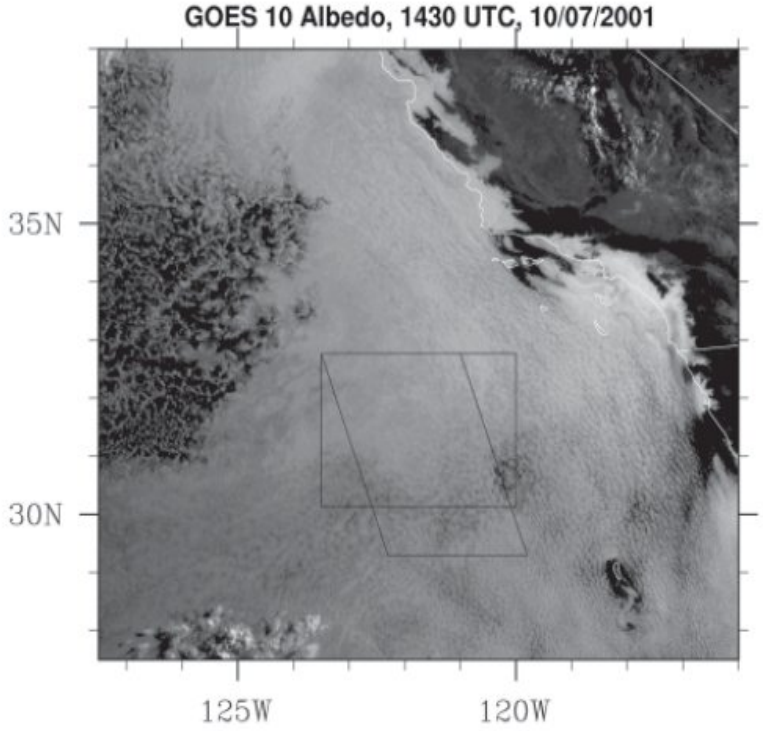


FIG. 3. *GOES-10* channel 1 (visible) image for conditions near the end of RF01. Note widespread region of uniform marine stratocumulus cloud cover surrounding the target area. The preliminary target area is boxed; the actual region in which almost all of the flight hours were spent is bounded by the rhomboid.

Pomiary strumieni na różnych wysokościach pozwalają zrozumieć procesy transportu w atmosferze.

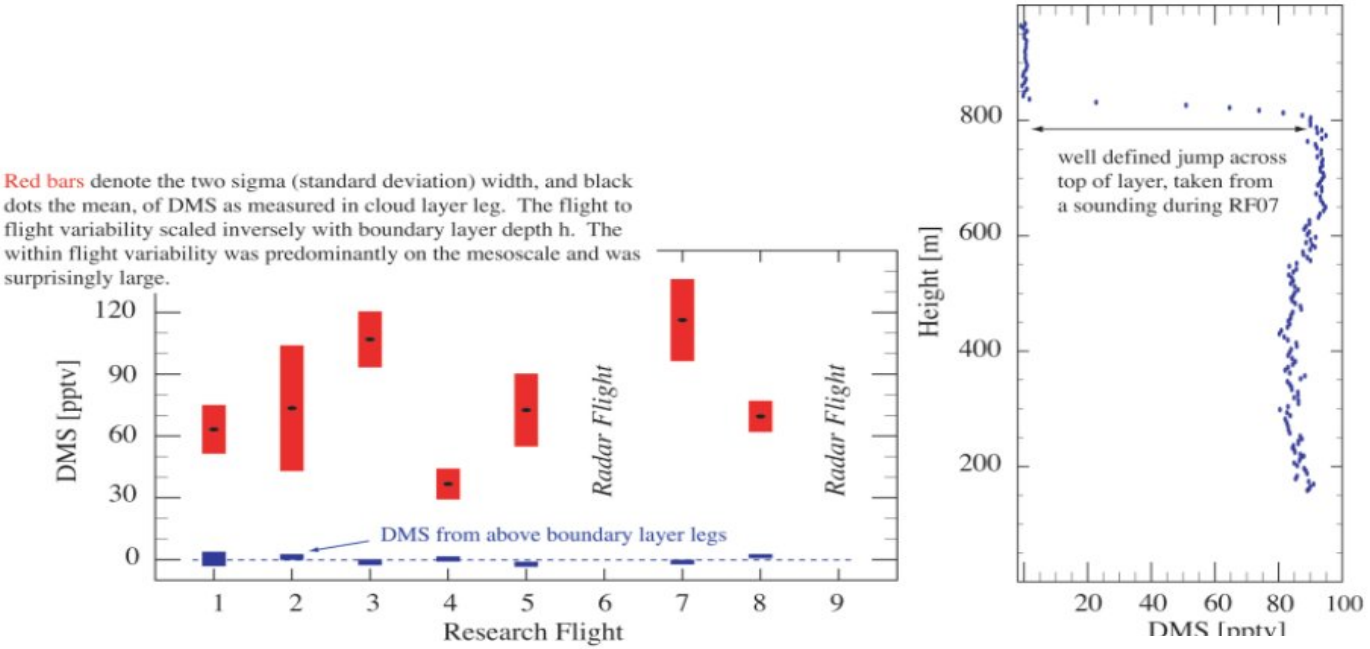


FIG. 4. DMS concentrations from entrainment flights.

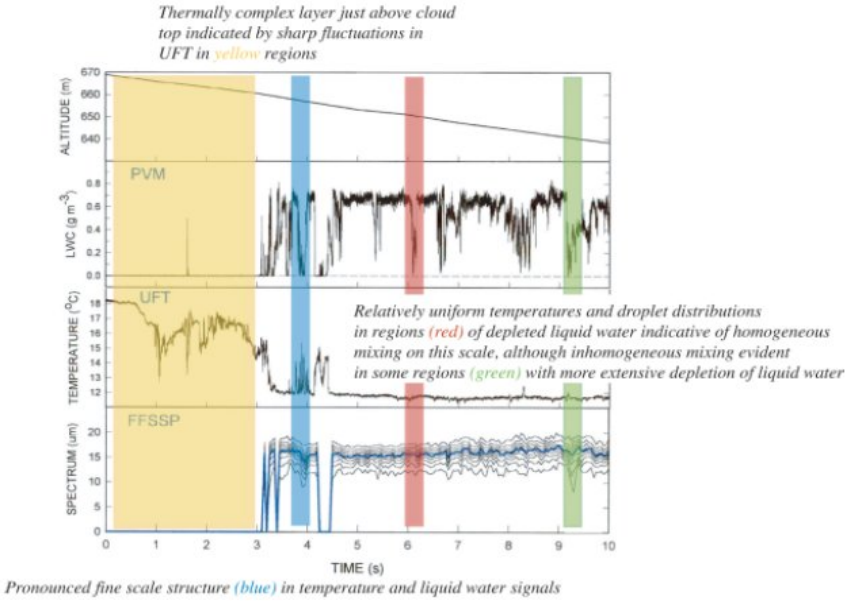


FIG. 7. Comparison of PVM, UFT, and FFSSP ultra-high-rate measurements during the flight of the NSF/NCAR C130 through the top of an unbroken layer of stratocumulus on 12 Jul (start of the 10-s interval is 12:05:38 UTC).

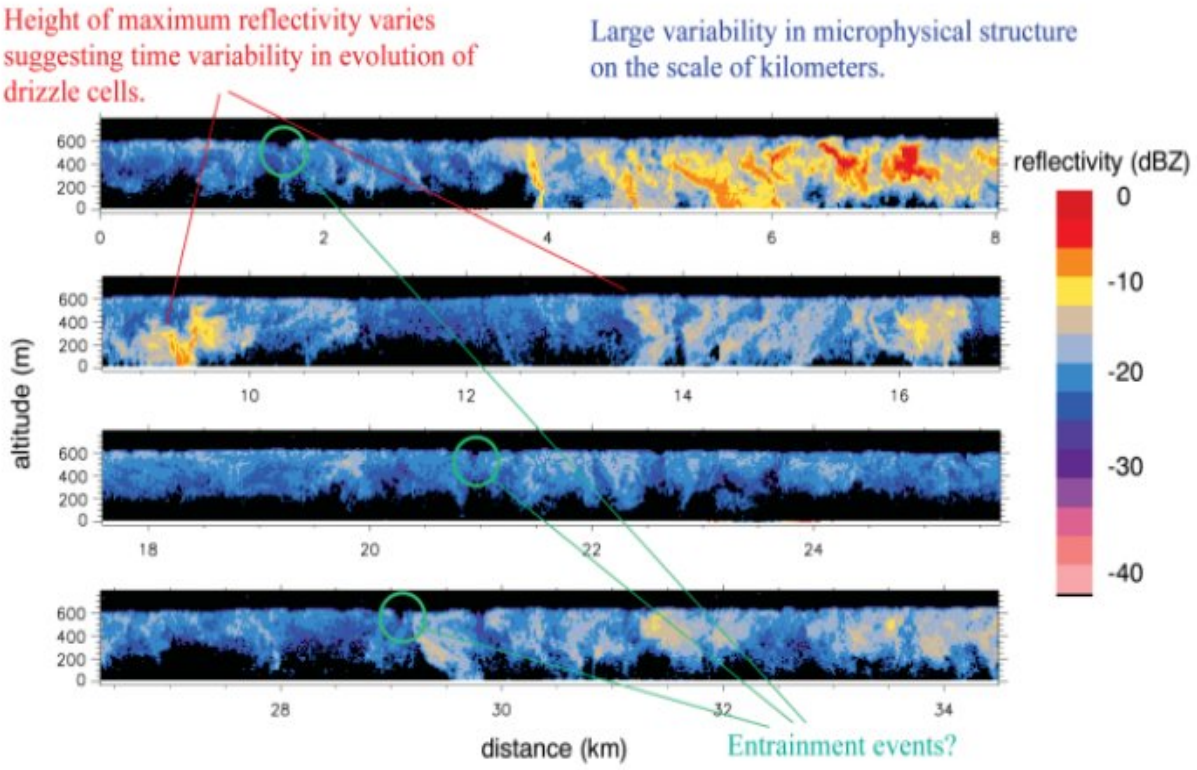


FIG. 5. Radar reflectivity for a segment of RF03. The axis scales are 1:1.

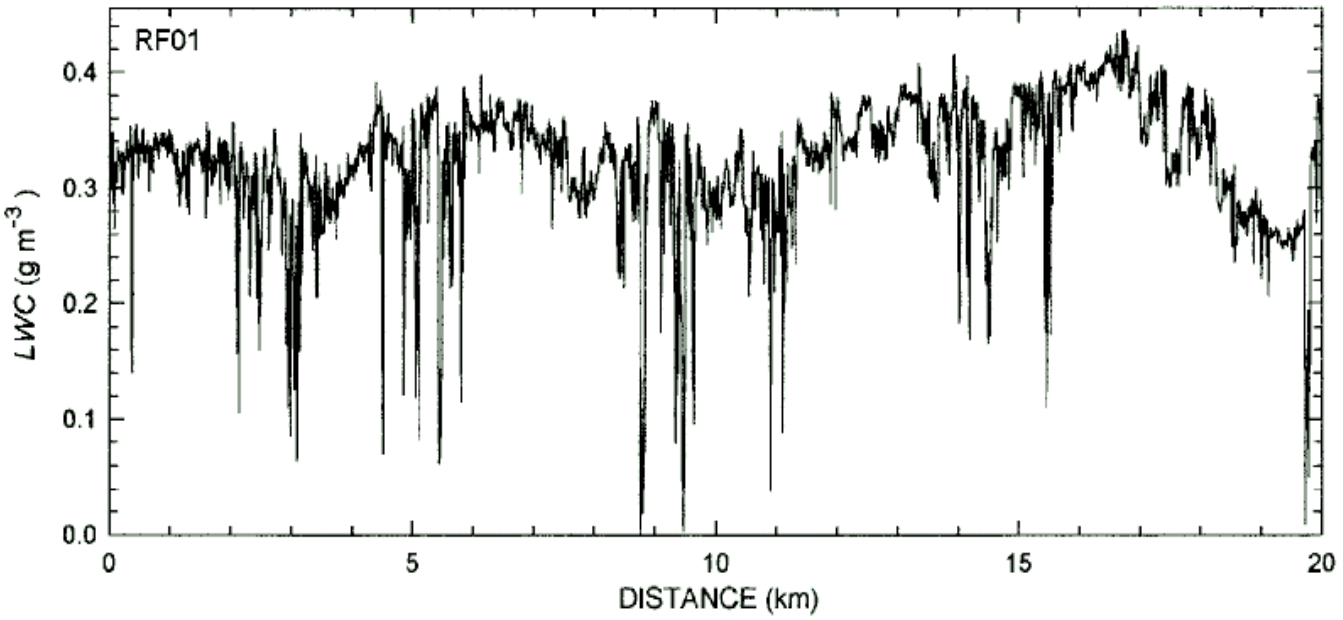


FIG. 1. LWC measured at 4-m resolution during horizontal flight of the NCAR C-130 aircraft 100 m below Sc top on flight RF01 of the DYCOMS-II study. Narrow regions of reduced LWC are interpreted as holes caused by the entrainment of air at cloud top.

Dziury w chmurach powodowane transportem suchego powietrza sponad wierzchołka chmur w dół.

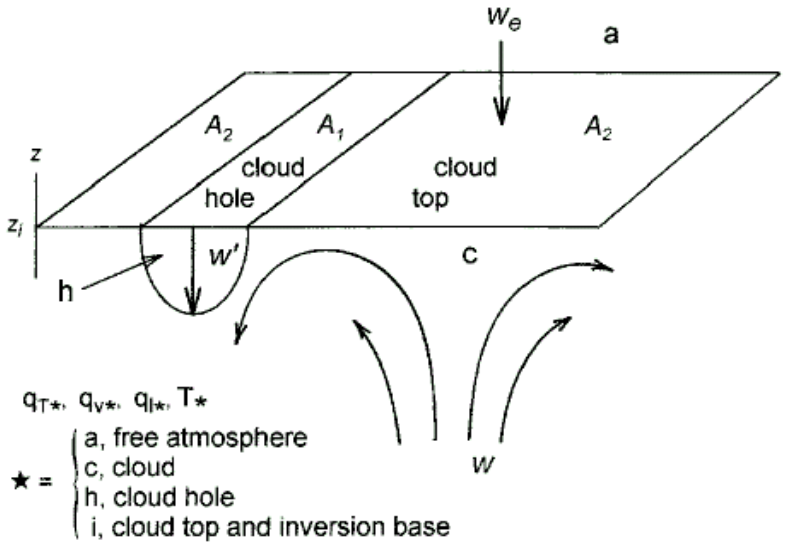
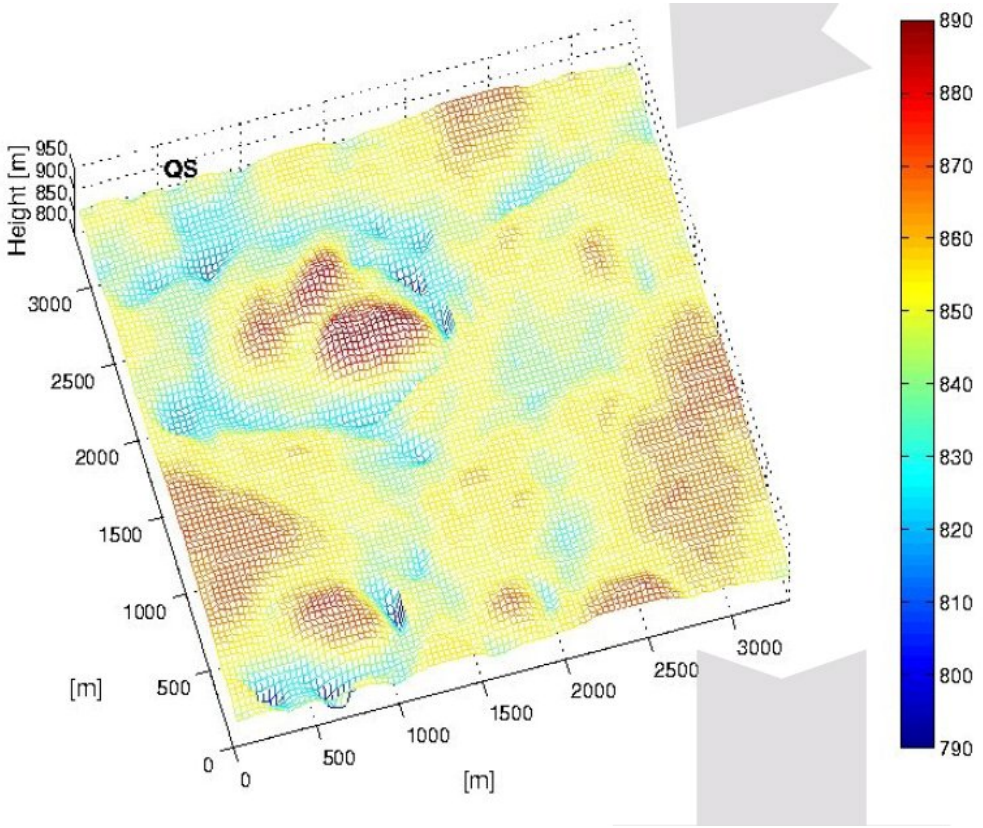
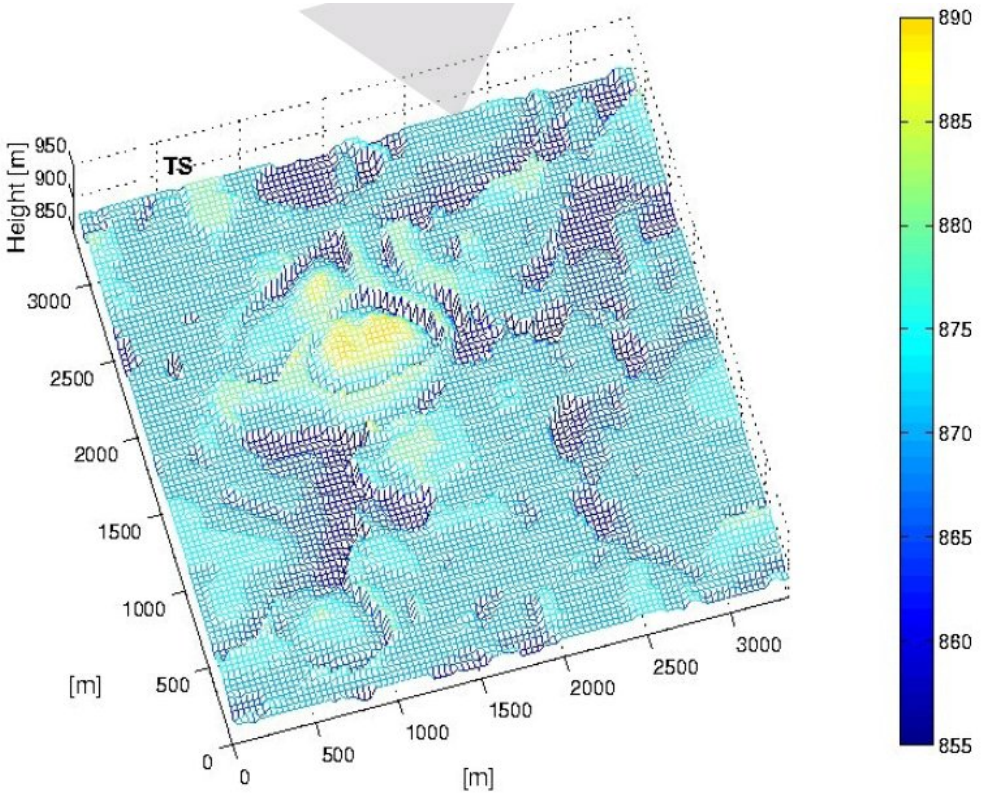
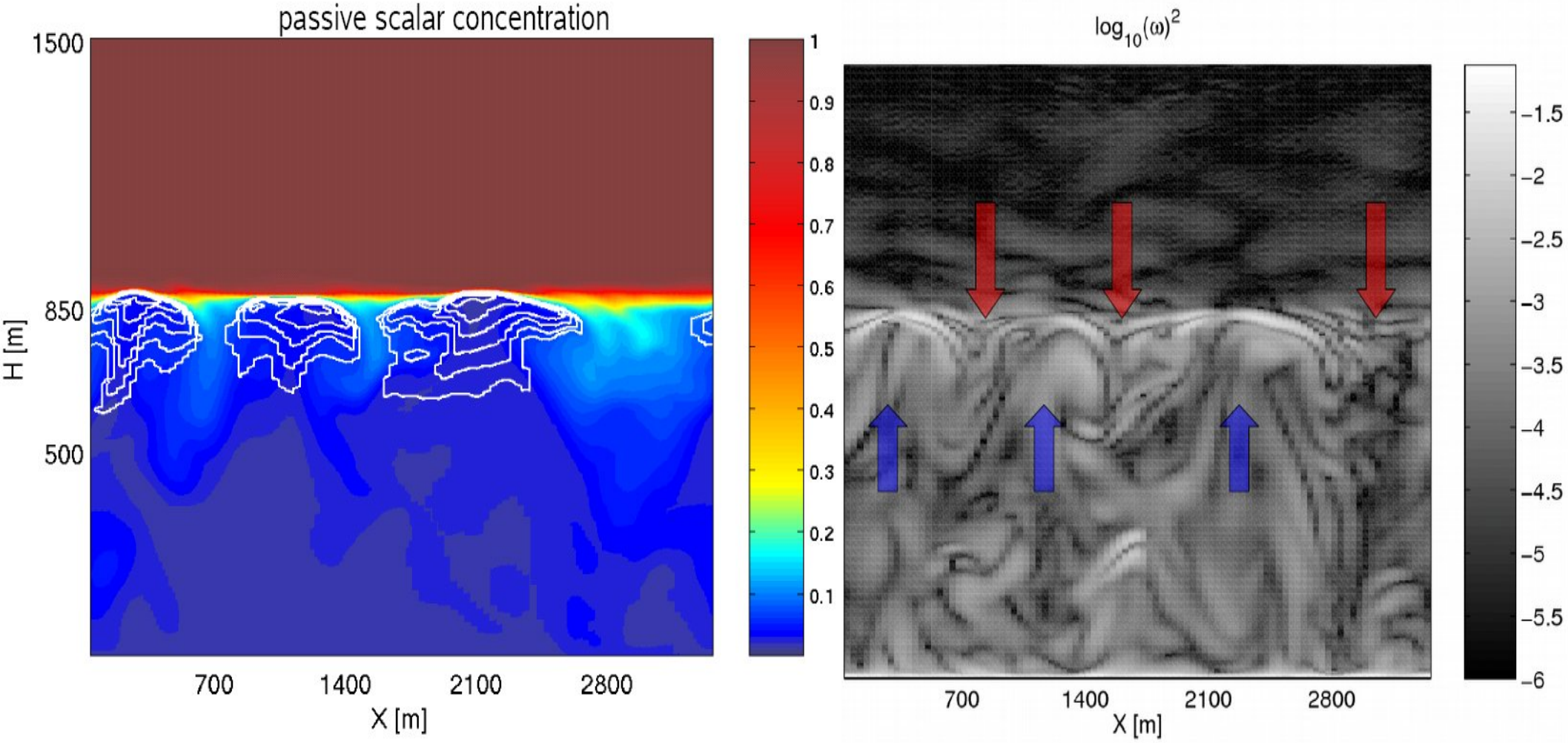


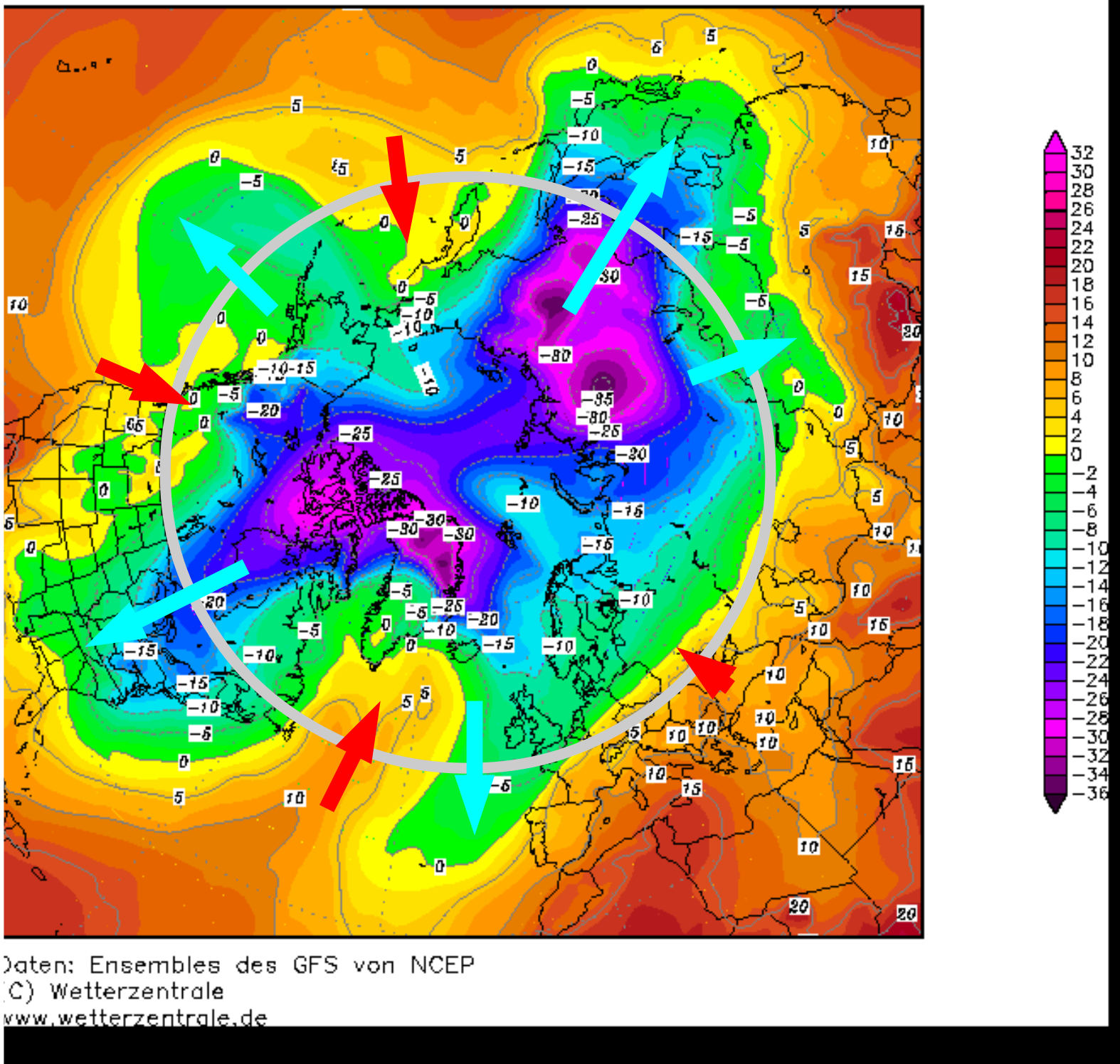
FIG. 2. Simplified schematic of a hole with depleted LWC′ at the Sc top, and associated vertical velocities w, water mixing ratios q, and temperature T.





Dziury w chmurach modelowane numerycznie.



W wirtualnej rzeczywistości modelu możemy wpuścić dodatkowy składnik unoszony z przepływem po to aby śledzić jak jest unoszony z płynem.

Transport ciepła od równika do biegunów to też korelacja fluktuacja południkowej składowej prędkości wiatru z fluktuacja temperatury scałkowany wokół południka Przez który ten transport obliczamy.