1100-1BO15, rok akademicki 2020/21

# OPTYKA GEOMETRYCZNA I INSTRUMENTALNA

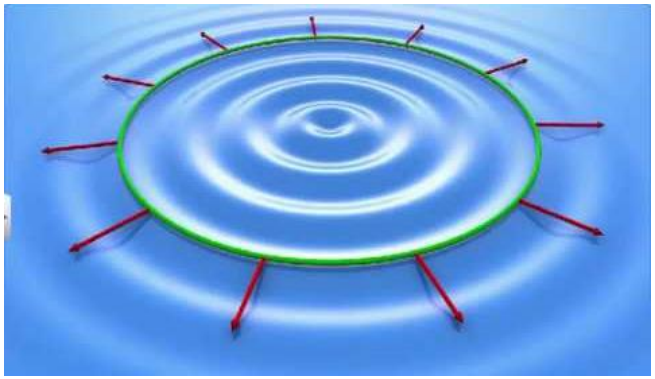
dr hab. Rafał Kasztelanic

Wykład 3

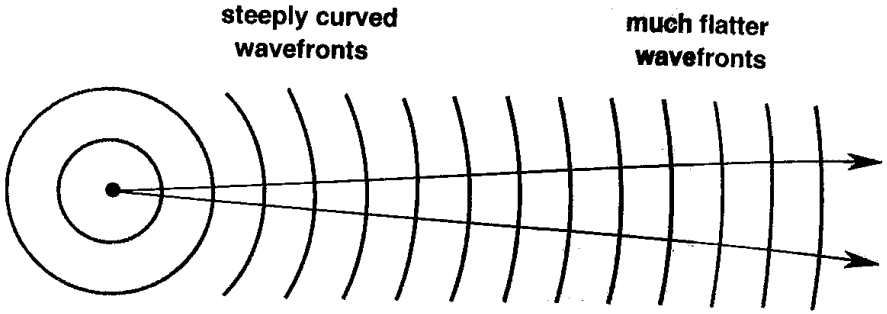
# Propagacja światła

**Zasada Huygensa**

- Każdy punkt ośrodka, do którego dotarło czoło fali można uważać za źródło nowej fali kulistej.



*CBSE Class 12 Physics, Wave Optics – 1*

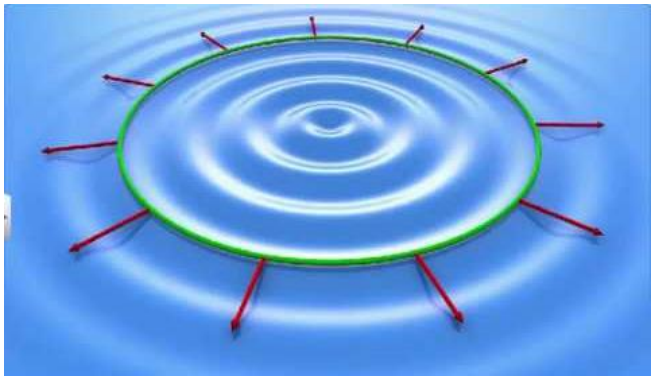



*www.slideshare.net*

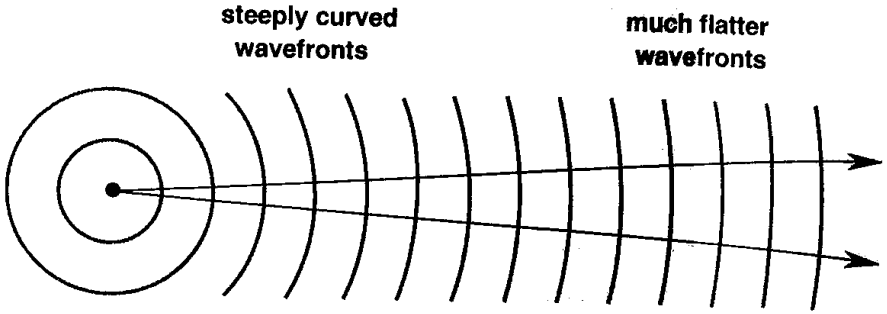
# Propagacja światła

**Zasada Huygensa**

- Każdy punkt ośrodka, do którego dotarło czoło fali można uważać za źródło nowej fali kulistej.

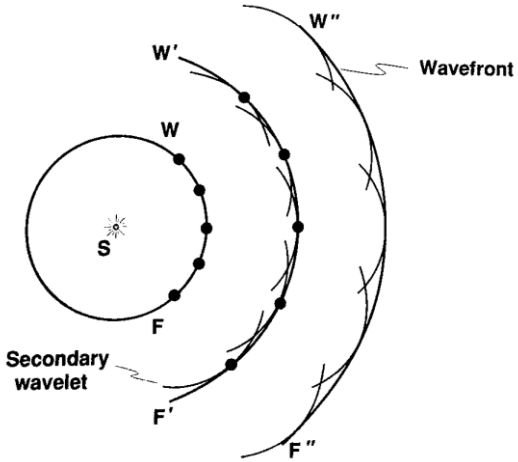


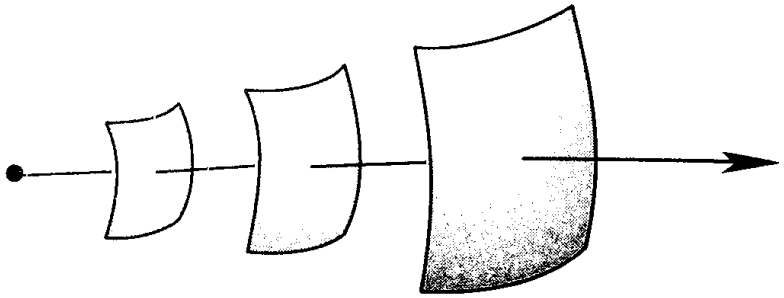
*CBSE Class 12 Physics, Wave Optics – 1*




*www.slideshare.net*

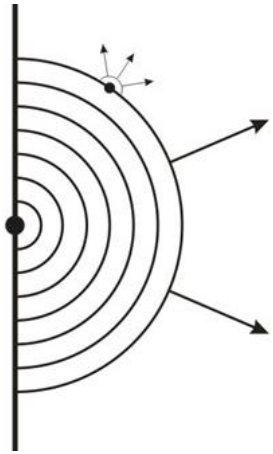
- Fale te (fale cząstkowe) interferują ze sobą, tworząc wypadkową powierzchnię falową

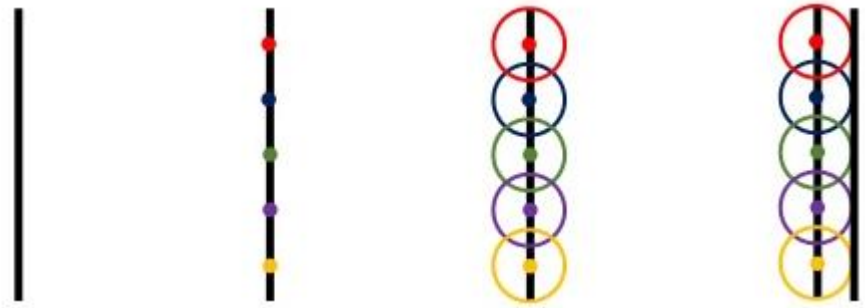


# Propagacja światła

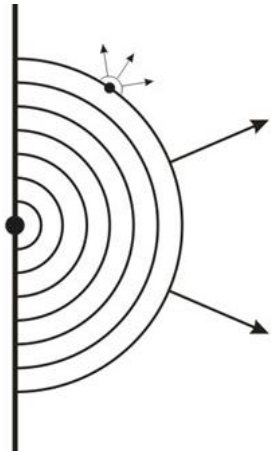
**Zasada Huygensa**

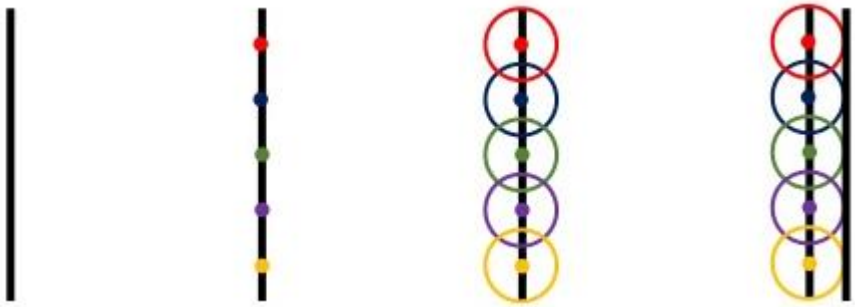


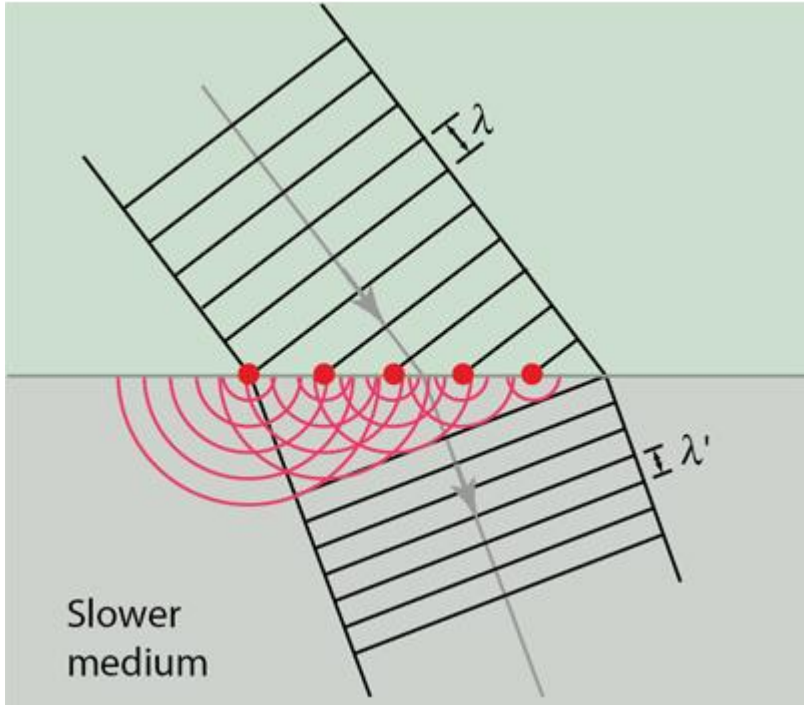


# Propagacja światła

**Zasada Huygensa**



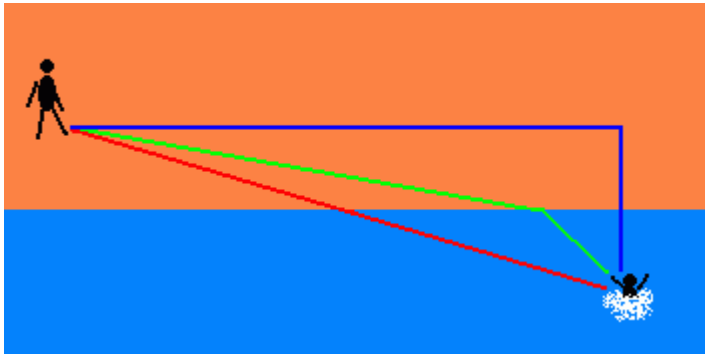





*hyperphysics.phy-astr.gsu.edu*

# Propagacja światła

**Zasada Fermata**

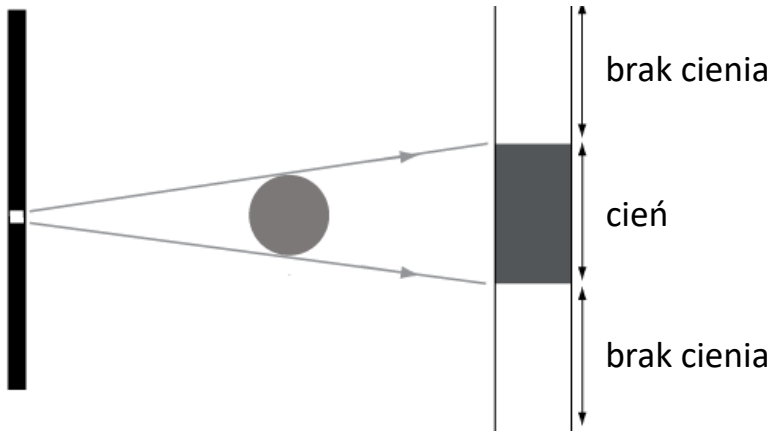


*www.quora.com*

Promień świetlny poruszając się między dwoma punktami przebywa najkrótszą możliwie drogę optyczną, czyli taką, na której przebycie potrzebuje minimalnego czasu.

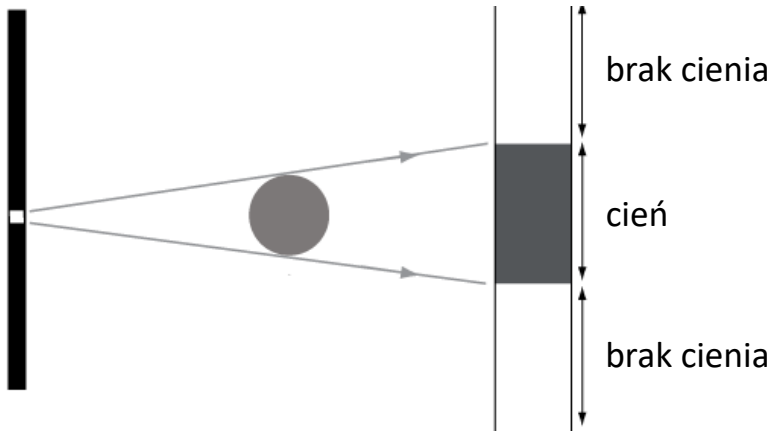
**Powstawanie cienia**

punktowe źródło światła

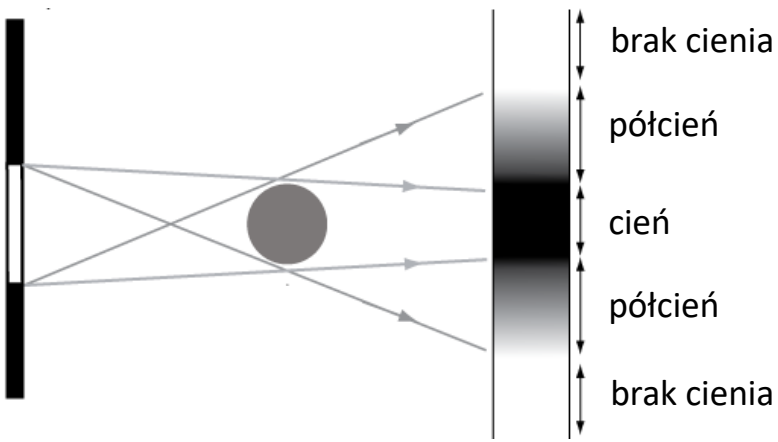


**Powstawanie cienia**

punktowe źródło światła




rozciągłe źródło światła

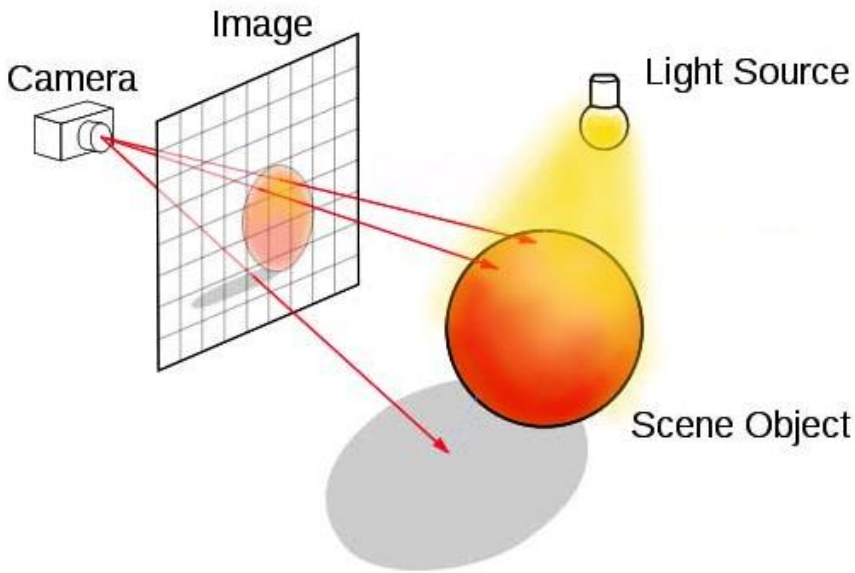




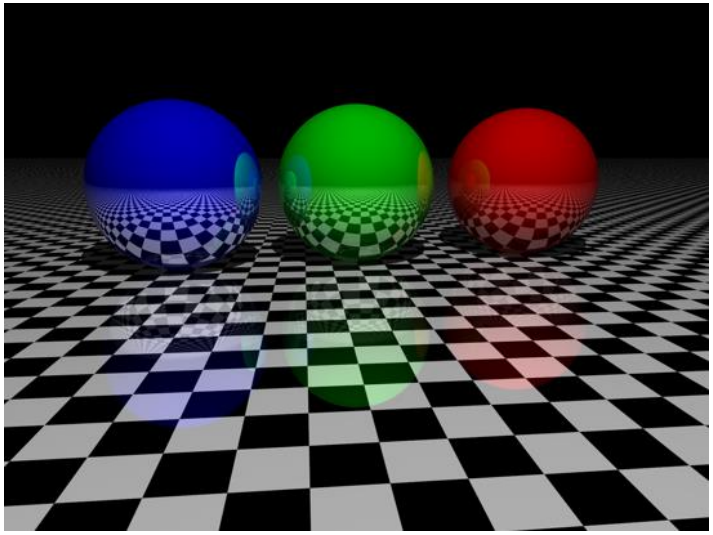

*www.animations.physics.unsw.edu.au*

# Propagacja światła

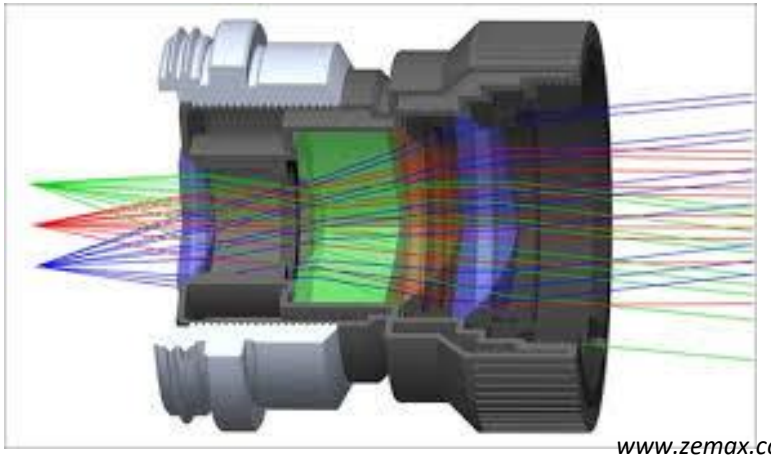
## Optyka promieni – ray tracing




*sites.google.com/site/tiffanycinglis/fun-stuff/cs-girls-ray-tracing-workshop*



*pl.wikipedia.org*



*www.zemax.com*

# Propagacja światła

**Optyka promieni**

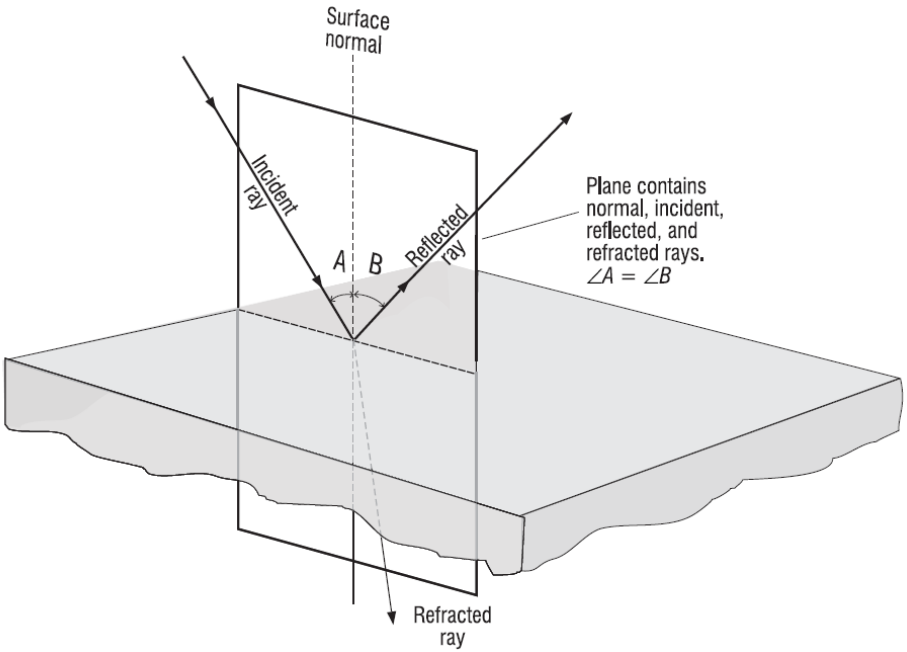
- Promień — linia wskazująca kierunek rozchodzenia się energii promieniowania, prostopadła do *powierzchni falowej*
- Wiele zjawisk optycznych nie wymaga analizy światła jako fali elektromagnetycznej i do ich opisu wystarcza operowanie pojęciem promienia świetlnego, który jest odbijany lub załamywany na różnych powierzchniach
- W optyce geometrycznej zwykle zaniedbujemy zjawiska pochłaniania fali
- Zakładamy, że długość fali e-m jest bardzo mała w porównaniu z rozmiarami elementów tworzących analizowany układ optyczny
- Wiązka światła jest obiektem rzeczywistym. Analiza propagacji wiązki polega na analizie biegu promieni ją tworzących
- Pęk promieni — wiązka promieni wychodząca (przechodząca) z jednego punktu
- Droga optyczna $L = n \cdot \textit{droga geometryczna}$

$$L = \int n \, ds$$

równanie eikonału

# Załamanie i odbicie światła

**Promień padający i promień odbity/załamany leżą w jednej płaszczyźnie**

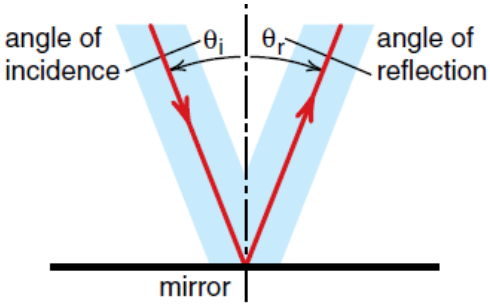


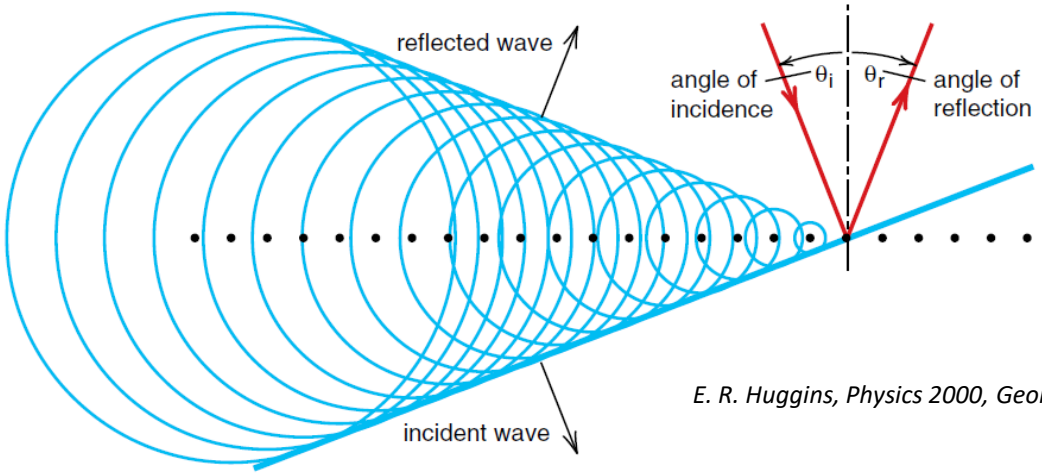



*L.S. Pedrotti, Fundamentals of Photonics*

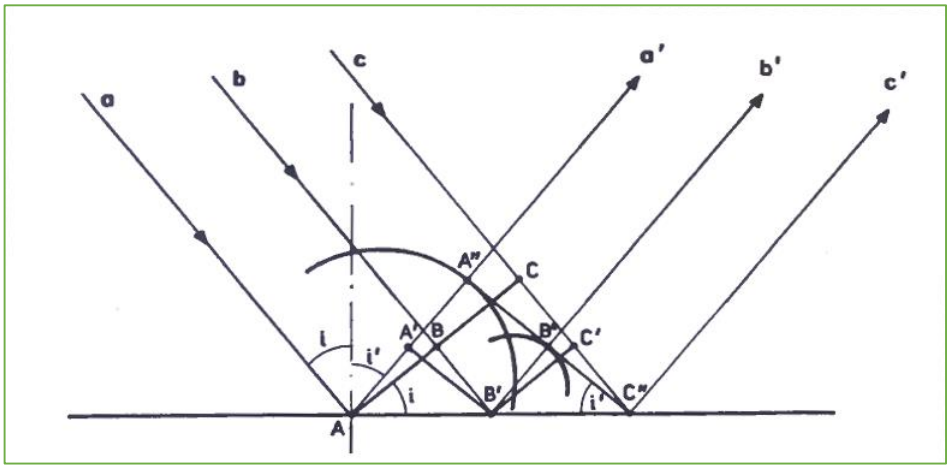
# Załamanie i odbicie światła

## Odbicie światła – z zasady Huygensa




*E. R. Huggins, Physics 2000, Geometrical Optics*



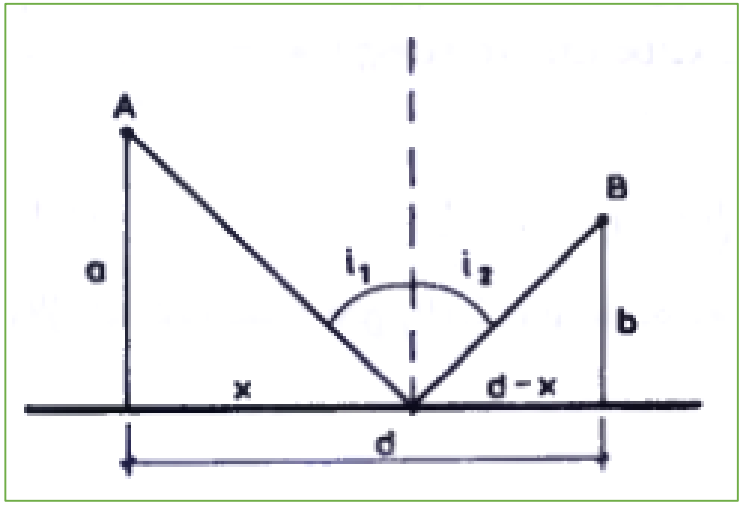

$i$ = CAC'' = AC''A'' = $i$'

*J. Nowak, M. Zając, Optyka kurs elementarny*

# Załamanie i odbicie światła

**Odbicie światła – z zasady Fermata**

Spośród wielu możliwych dróg, światło biegnie po takiej, aby czas poruszania się po niej był ekstremalny (zwykle najkrótszy)




*J. Nowak, M. Zając, Optyka kurs elementarny*

$$\delta L = \delta \int_A^B n\, ds = 0$$

$$L = n\left(\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (d-x)^2}\right)$$

$$\frac{dL}{dx} = n\left[\frac{1}{2\sqrt{a^2+x^2}}2x + \frac{1}{2\sqrt{b^2+(d-x)^2}}2(d-x)(-1)\right] = 0$$

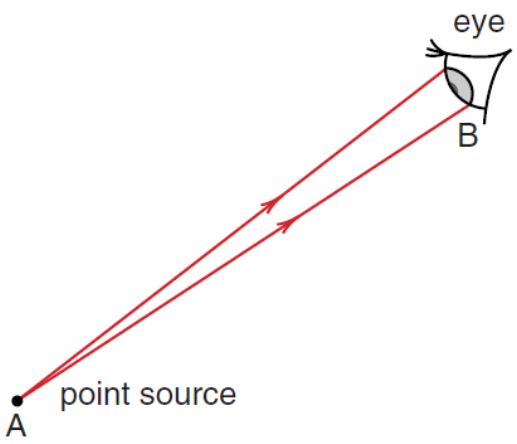
$$\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}$$

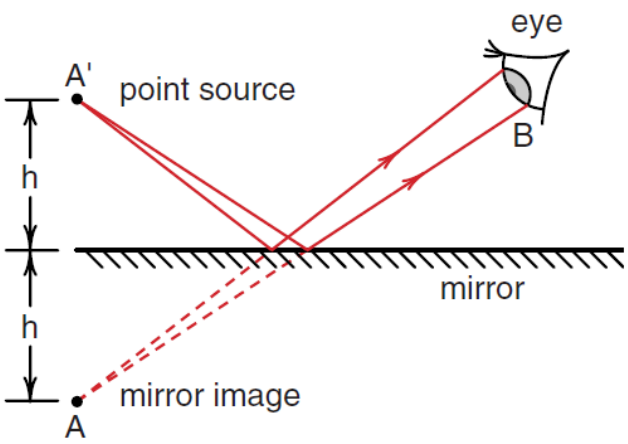
$$\sin(i_1) = \sin(i_2)$$

$$i_1 = i_2$$

# Załamanie i odbicie światła

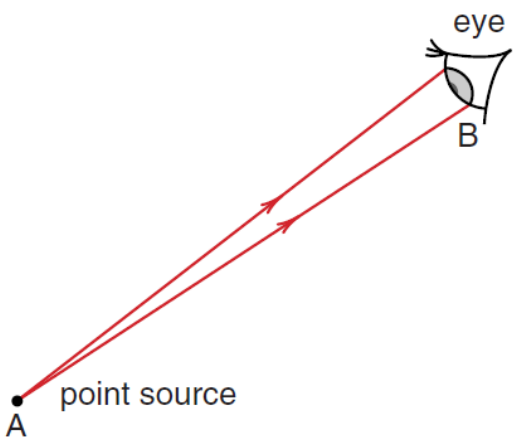
**Odbicie światła**

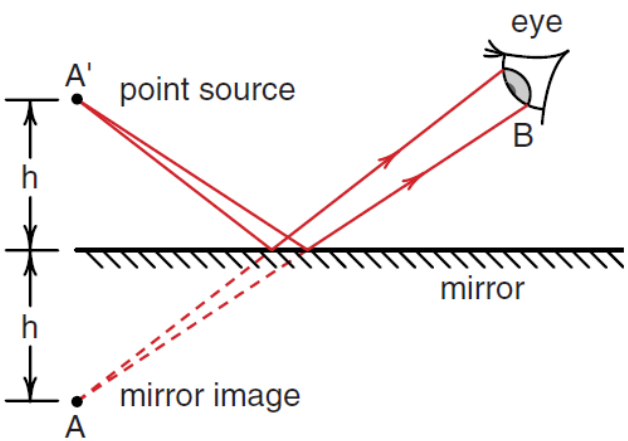


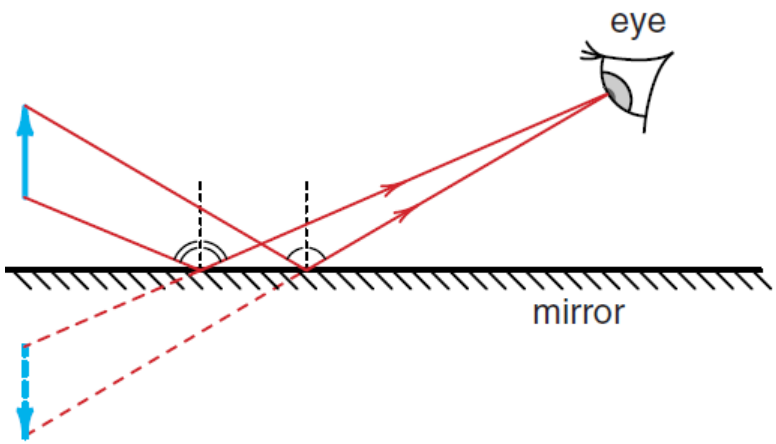



# Załamanie i odbicie światła

**Odbicie światła**




góra-dół

# Załamanie i odbicie światła

**Odbicie światła**

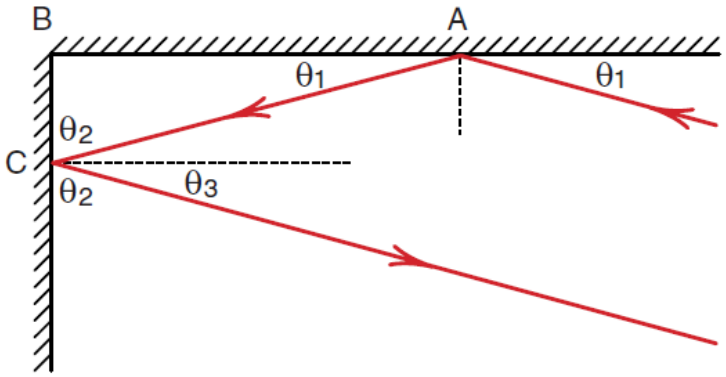
góra – dół

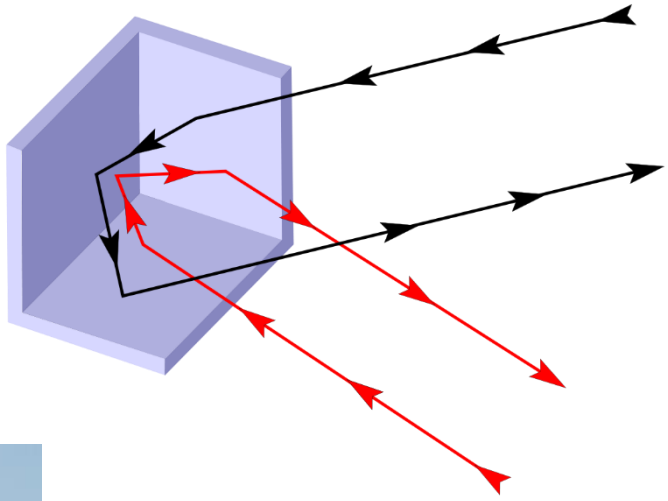
lewo – prawo

przód – tył

# Załamanie i odbicie światła

**Odbicie światła – corner reflector**

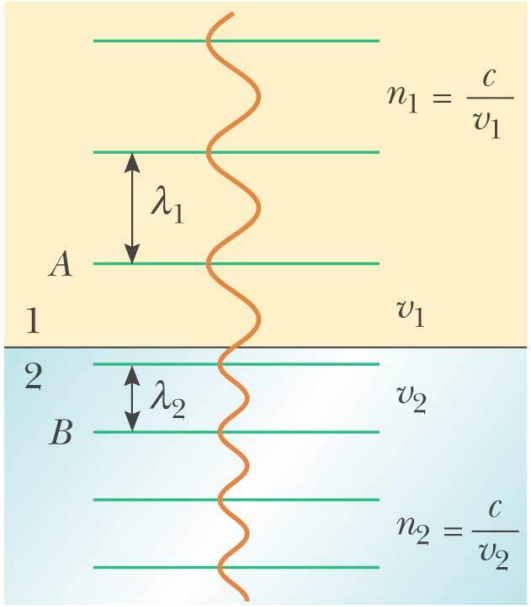


*en.wikipedia.org/wiki/Corner_reflector*

# Załamanie i odbicie światła

## Światło na granicy ośrodków

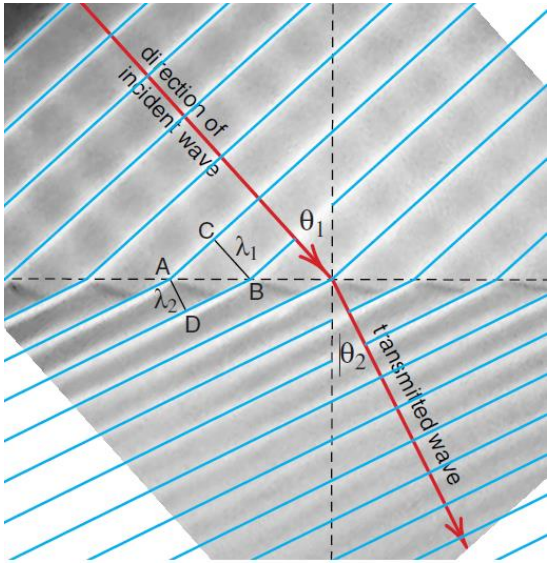


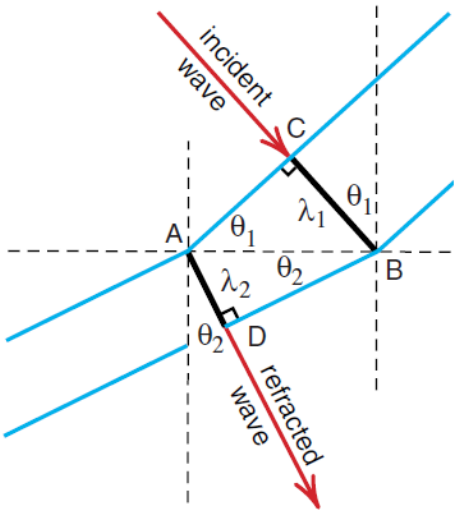

*icecube.wisc.edu*

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{c/n_1}{c/n_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

# Załamanie i odbicie światła

**Załamania światła – z zasady Huygensa**




$$\lambda_1 = \overline{AB}\,\sin(\theta_1) = \frac{\lambda_0}{n_1}$$

$$\lambda_2 = \overline{AB}\,\sin(\theta_2) = \frac{\lambda_0}{n_2}$$

**Prawo Snella**

$$\frac{\sin(\theta_1)}{\sin(\theta_2)} = \frac{n_2}{n_1}$$

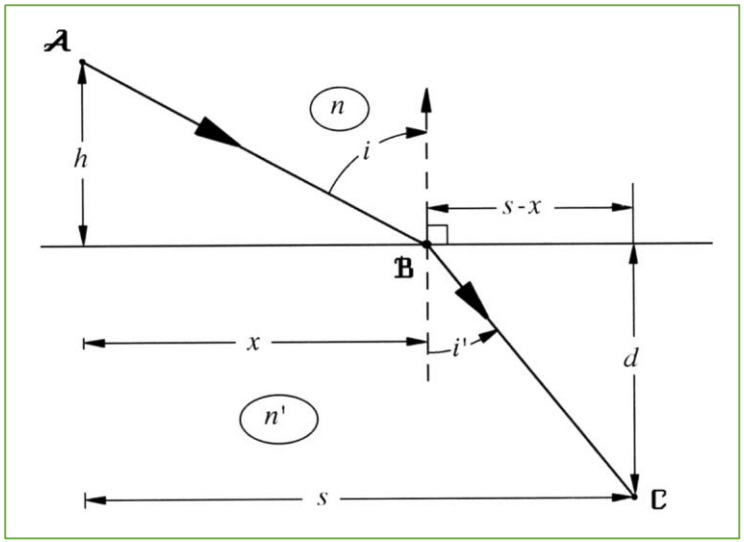
$$n_1\,\sin(\theta_1) = n_2\,\sin(\theta_2)$$



*E. R. Huggins, Physics 2000, Geometrical Optics*

# Załamanie i odbicie światła

**Załamanie światła – z zasady Fermata**




*J. Nowak, M. Zając, Optyka kurs elementarny*

$$S = vt \quad \rightarrow \quad t = \frac{S}{v}$$

$$t = \frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{v} + \frac{\sqrt{d^2 + (s-x)^2}}{v'}$$

$$t = \frac{n\sqrt{h^2 + x^2} + n'\sqrt{d^2 + (s-x)^2}}{c}$$

$$dt/dx = 0$$

$$\frac{nx}{\sqrt{h^2 + x^2}} - \frac{n'(s-x)}{\sqrt{d^2 + (s-x)^2}} = 0$$

$$\sin(i) = \frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}}; \quad \sin(i') = \frac{(s-x)}{\sqrt{d^2 + (s-x)^2}}$$

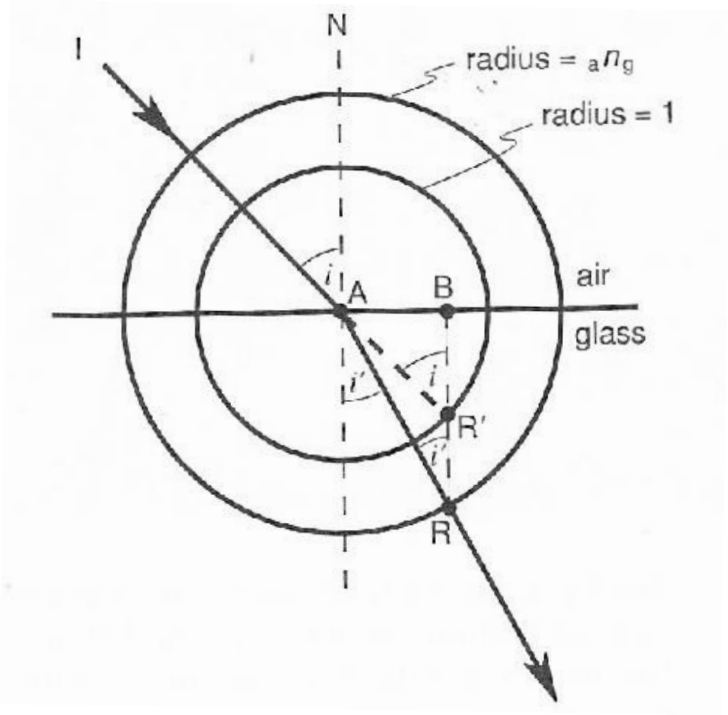
**Prawo Snella**

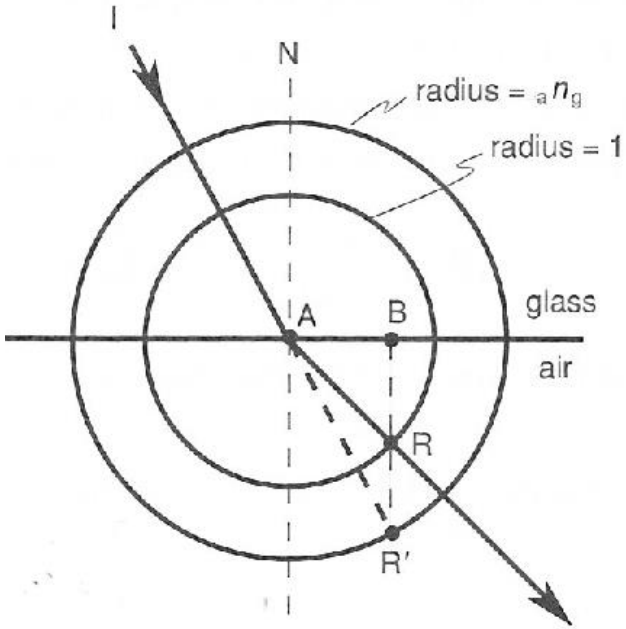
$$\frac{\sin(i)}{\sin(i')} = \frac{n'}{n}$$

$$n \sin(i) = n' \sin(i')$$

# Załamanie i odbicie światła

**Załamanie światła – metoda Younga**




**Prawo Snella**

$$\frac{\sin(i)}{\sin(i')} = \frac{AB/AR'}{AB/AR} = \frac{AR}{AR'} = \frac{n_g}{1} = n_g$$

# Załamanie i odbicie światła

**Optyka geometryczna - aksjomaty**

- Światło w ośrodku jednorodnym propaguje się po liniach prostych – promieniach
- Bezwzględny współczynnik załamania $n = \frac{c}{v}$, gdzie *v* – prędkość światła w danym ośrodku
- Gdy promień przechodzi z ośrodka o bezwzględnym współczynniku załamania $n_1$ do ośrodka o bezwzględnym współczynniku załamania $n_2$ *to ulega załamaniu:*
  - Promień padający i promień załamany leżą w jednej płaszczyźnie
  - Spełnione jest prawo Snella: $n_1 \sin(\alpha) = n_2 \sin(\beta)$
- Przy odbiciu obowiązuje prawo odbicia:
  - Promień padający i promień odbity leżą w jednej płaszczyźnie
  - Kąt odbicia równy jest kątowi padania: $\alpha = \beta$

# Załamanie i odbicie światła

## Optyka geometryczna - aksjomaty

- Światło w ośrodku jednorodnym propaguje się po liniach prostych – promieniach
- Bezwzględny współczynnik załamania $n = \frac{c}{v}$, gdzie *v* – prędkość światła w danym ośrodku
- Gdy promień przechodzi z ośrodka o bezwzględnym współczynniku załamania $n_1$ do ośrodka o bezwzględnym współczynniku załamania $n_2$ *to ulega załamaniu:*
  - Promień padający i promień załamany leżą w jednej płaszczyźnie
  - Spełnione jest prawo Snella: $n_1 \sin(\alpha) = n_2 \sin(\beta)$
- Przy odbiciu obowiązuje prawo odbicia:
  - Promień padający i promień odbity leżą w jednej płaszczyźnie
  - Kąt odbicia równy jest kątowi padania: $\alpha = \beta$

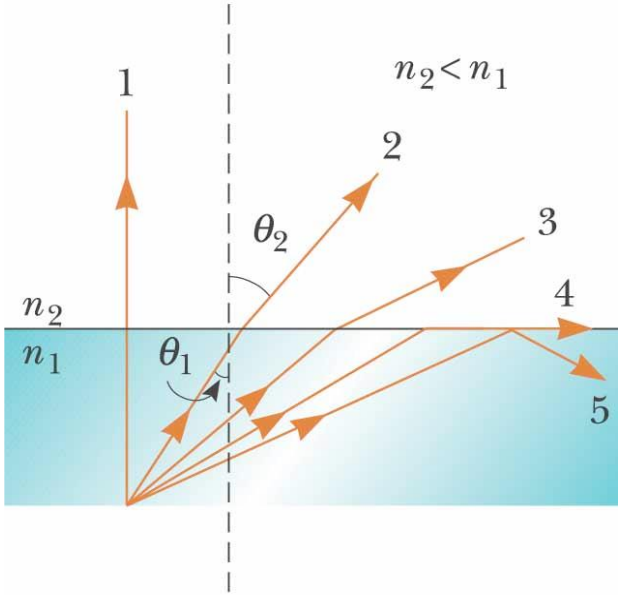
## Optyka geometryczna – ograniczenia

- Brak zależności od długości fali – dyspersja
- Z promieniem nie jest związana moc światła – podział mocy na granicy ośrodków
- Nie wyjaśnia zjawisk dyfrakcji, interferencji, polaryzacji

# Załamanie i odbicie światła

**Całkowite wewnętrzne odbicie (TIR)**

- Przy przechodzeniu światła z ośrodka o większym $n_1$ do ośrodka o mniejszym $n_2$, może nastąpić sytuacja, gdy kąt załamania jest równy lub większy niż $90^0$, co znaczy, że światło nie może przedostać się przez granicę ośrodków.
- Zjawisko to nazywa się **całkowitym wewnętrznym odbiciem** i jest powszechne w przyrodzie oraz szeroko wykorzystywane w technice.
- TIR (ang. *Total Internal Reflection*)




$$\frac{\sin(\theta_1)}{\sin(\theta_2)} = \frac{n_2}{n_1}$$

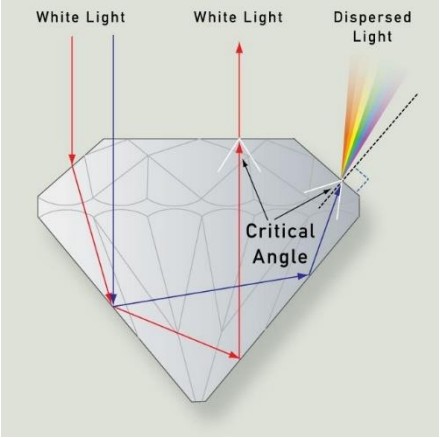
$$\sin(\theta_2) = \frac{n_1}{n_2}\sin(\theta_1) > 1$$

Promień 4 – kąt graniczny

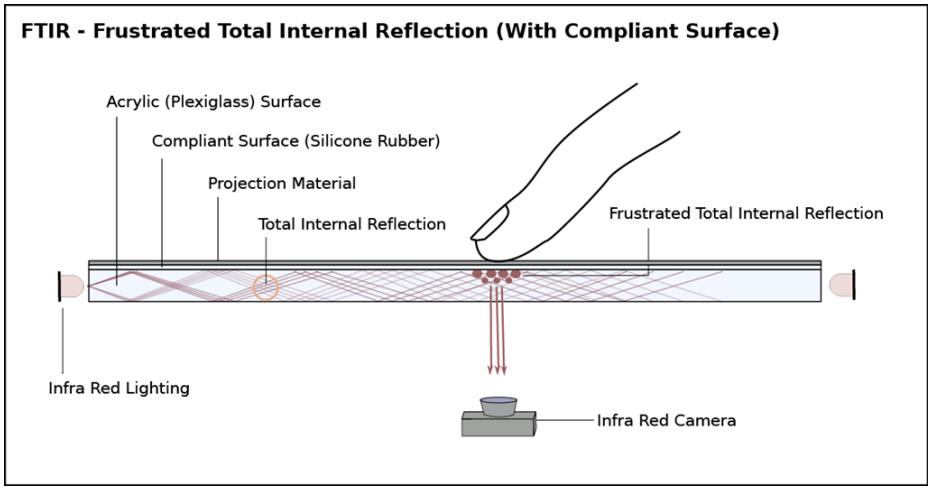
# Załamanie i odbicie światła

## Całkowite wewnętrzne odbicie (TIR)

*blogs.cisco.com*



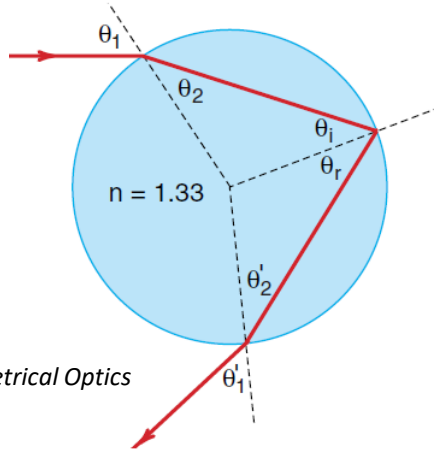

*www.askiitians.com*



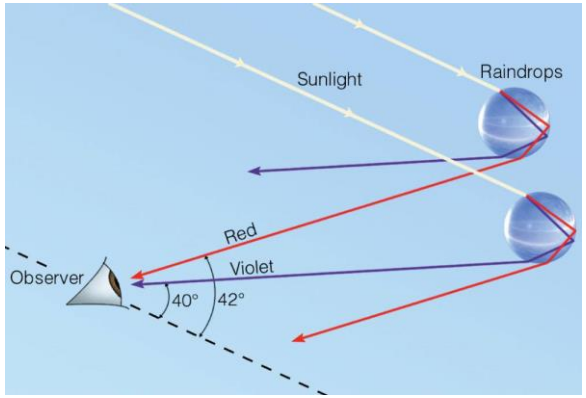
*sethsandler.com*

# Załamanie i odbicie światła

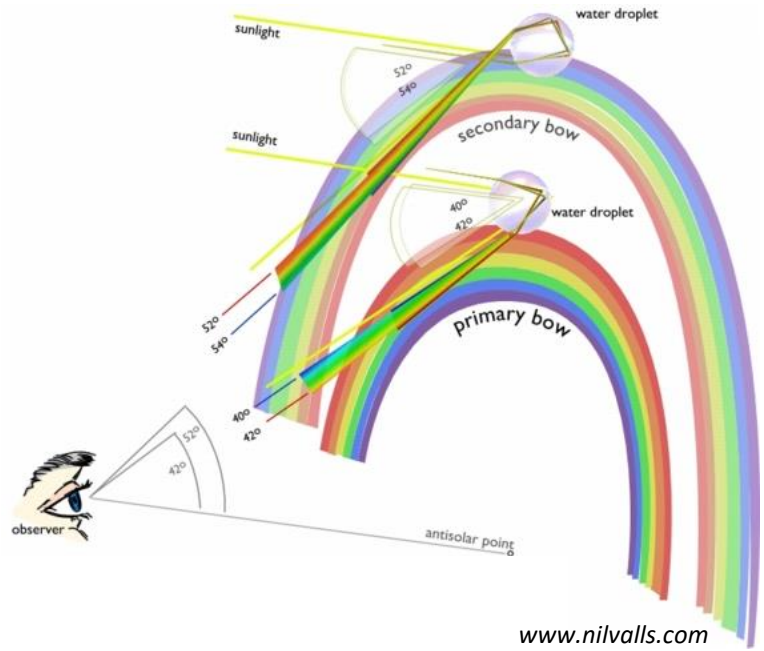
## Całkowite wewnętrzne odbicie (TIR)




*E. R. Huggins, Physics 2000, Geometrical Optics*




*esfsciencenew.wordpress.com*

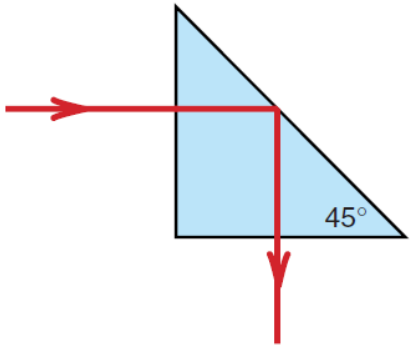



*www.nilvalls.com*

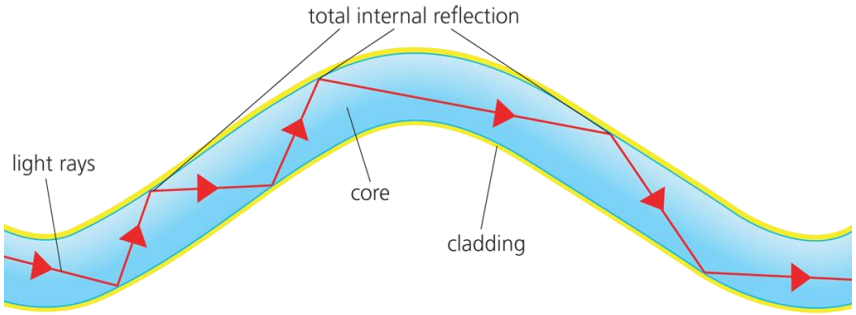
*www.tapeciarnia.pl*

# Załamanie i odbicie światła

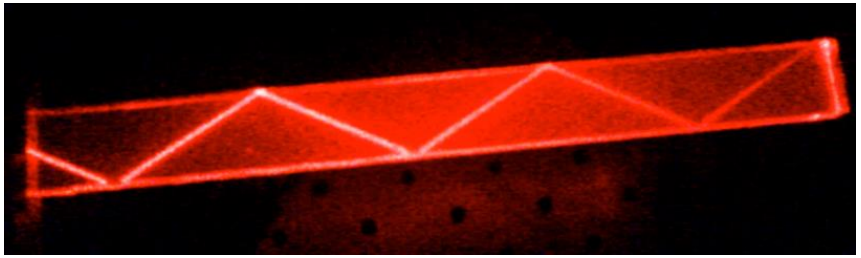
## Całkowite wewnętrzne odbicie (TIR)



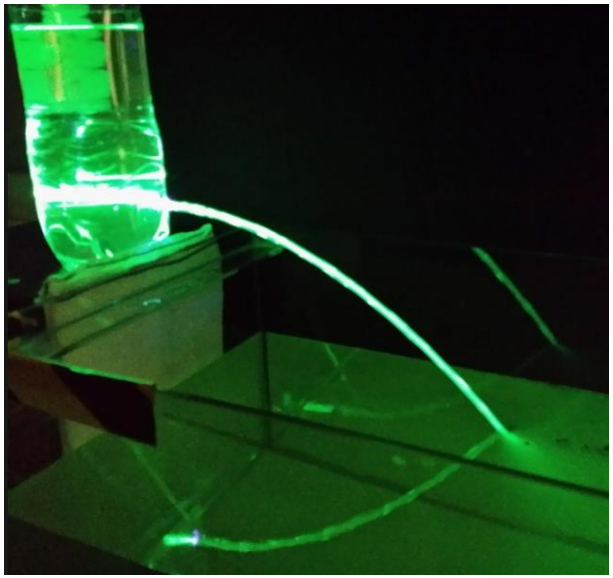

*E. R. Huggins, Physics 2000, Geometrical Optics*




*connect.collins.co.uk*



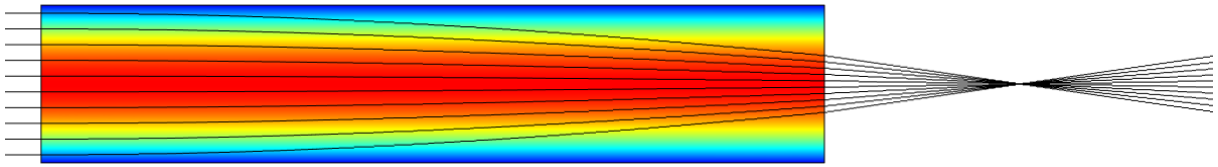
*intl.siyavula.com*

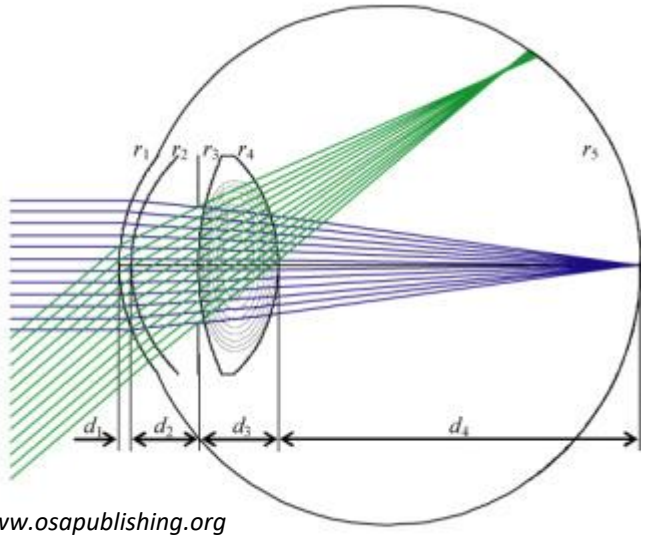


*steemit.com*

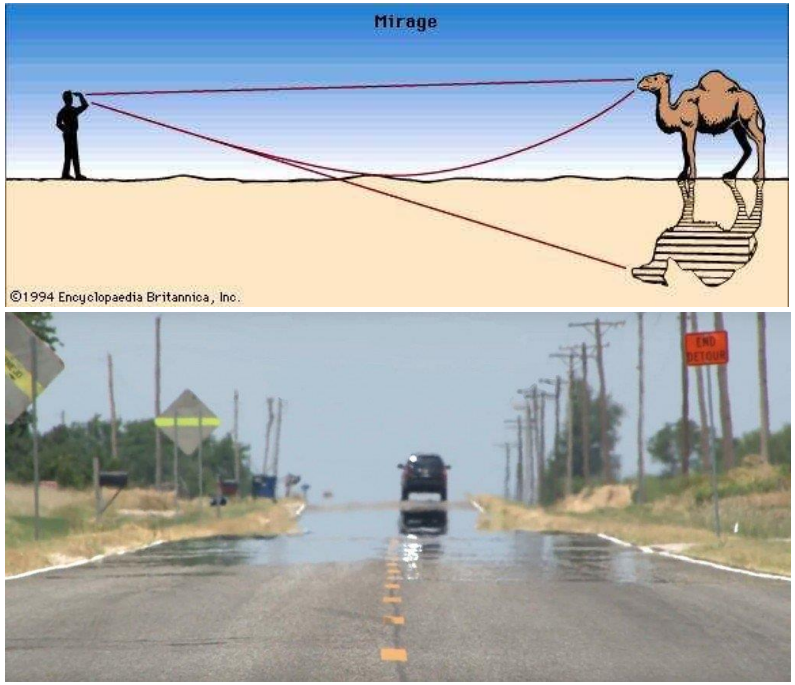
# Propagacja światła w ośrodku niejednorodnym

**GRIN – GRadient INdex optics**






*www.osapublishing.org*

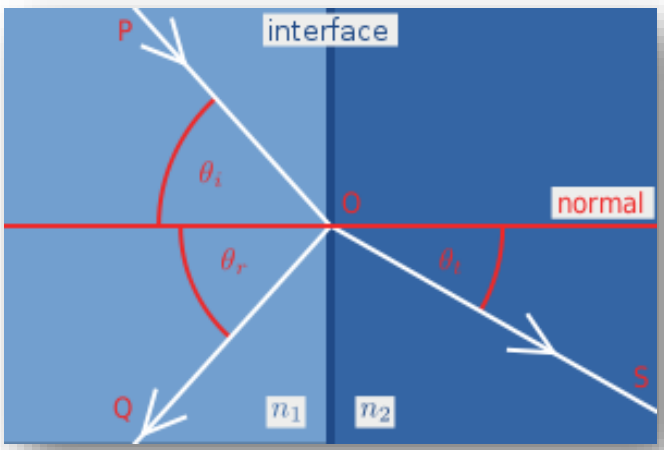


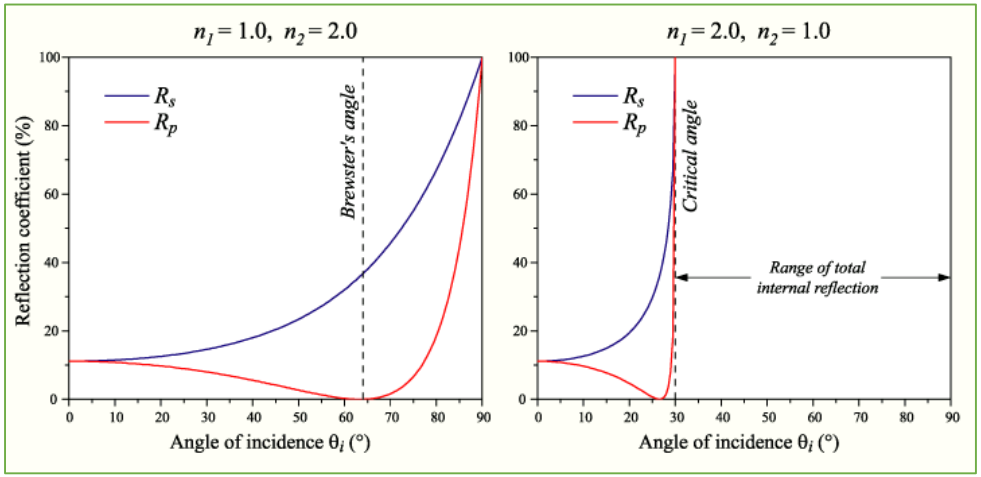

*www.scienceabc.com*

# Załamanie i odbicie światła

**Odbicie światła na granicy ośrodków – wzory Fresnela**

- Wzory Fresnela wskazują, jaka część energii padającej fali światła jest odbita na granicy ośrodków o różnym współczynniku załamania.
- Współczynniki odbicia $R_s$ i $R_p$ zależą od polaryzacji światła.




$$R_s = \left[\frac{\sin(\theta_t - \theta_i)}{\sin(\theta_t + \theta_i)}\right]^2 = \left(\frac{n_1 \cos\theta_i - n_2 \cos\theta_t}{n_1 \cos\theta_i + n_2 \cos\theta_t}\right)^2 = \left[\frac{n_1 \cos\theta_i - n_2\sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_i\right)^2}}{n_1 \cos\theta_i + n_2\sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_i\right)^2}}\right]^2$$

$$R_p = \left[\frac{\tan(\theta_t - \theta_i)}{\tan(\theta_t + \theta_i)}\right]^2 = \left(\frac{n_1 \cos\theta_t - n_2 \cos\theta_i}{n_1 \cos\theta_t + n_2 \cos\theta_i}\right)^2 = \left[\frac{n_1\sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_i\right)^2} - n_2 \cos\theta_i}{n_1\sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_i\right)^2} + n_2 \cos\theta_i}\right]^2$$

# Załamanie i odbicie światła

**Odbicie światła na granicy ośrodków – wzory Fresnela dla małych kątów**

- Łatwo zauważyć, że dla małych kątów różnica współczynnika odbicia dla różnych polaryzacji staje się mała, czyli obie polaryzacje są odbijane niemal jednakowo.
- Im większa różnica współczynników załamania, tym większe odbicie.

$$R = \left[\frac{(n_1 - n_2)}{(n_1 + n_2)}\right]^2$$

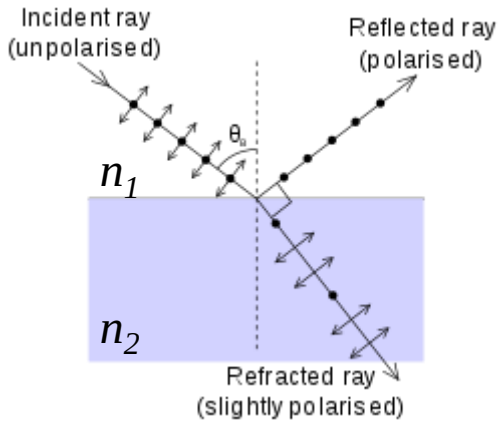
$$\left.\begin{aligned} n_1 &= 1.0 \\ n_2 &= 1.5 \end{aligned}\right\} \rightarrow R = 0{,}04$$

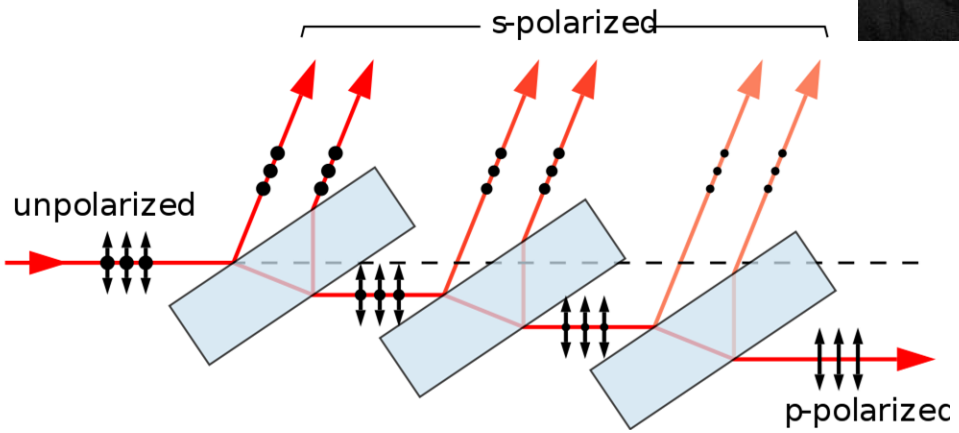
$$\left.\begin{aligned} n_1 &= 1.0 \\ n_2 &= 1.9 \end{aligned}\right\} \rightarrow R = 0{,}096 \approx 10\%$$

# Załamanie i odbicie światła

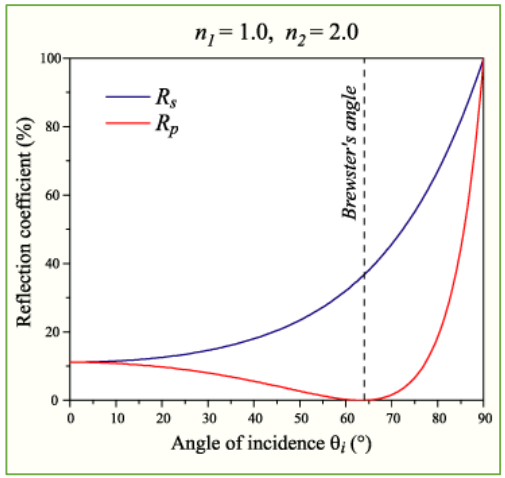
**Odbicie światła na granicy ośrodków – kąt Brewstera**

Kat pomiędzy promieniem odbitym i załamanym wynosi =2π




$$tg\theta = \frac{n_2}{n_1}$$



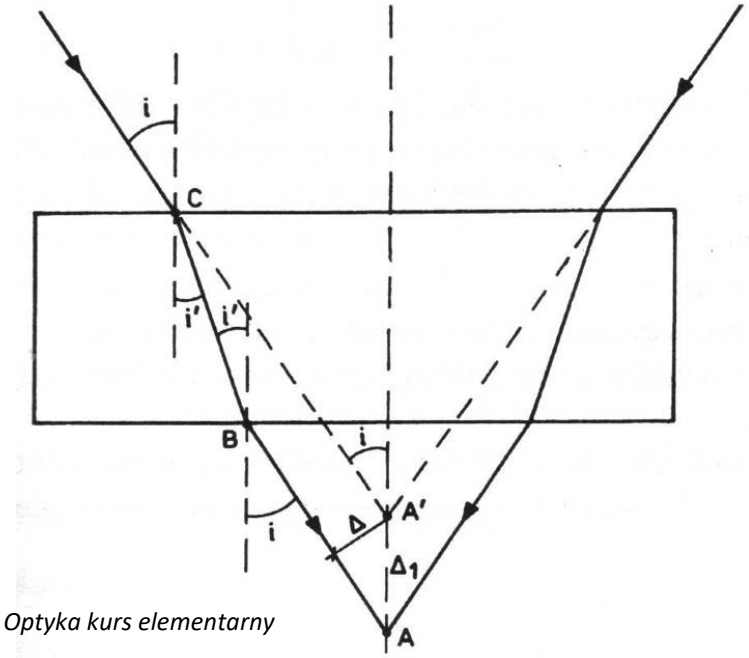



commons.wikimedia.org

# Płytka płasko-równoległa

**Płytka płasko-równoległa:**

- najprostszy element optyczny
- wprowadza przesunięcie promienia światła Δ, bez zmiany kierunku propagacji
- Przesunięcie Δ zależy od współczynnika załamania materiału, z którego jest wykonana płytka
- Dla światła polichromatycznego następuje dodatkowo rozszczepienie światła, spowodowane dyspersją




$$\Delta = d \sin i \left( 1 - \frac{\cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} \right)$$

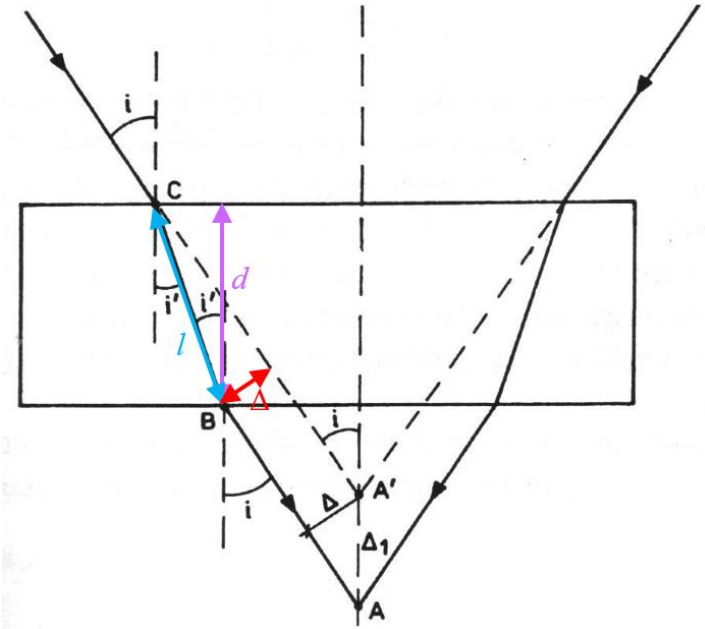
$$\Delta_1 = d \left( 1 - \frac{\cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} \right)$$

Dla malych $i$: $\boxed{\Delta_1 \approx d \left( 1 - \frac{1}{n} \right)}$

Podniesienie obrazu

*J. Nowak, M. Zając, Optyka kurs elementarny*

# Płytka płasko-równoległa



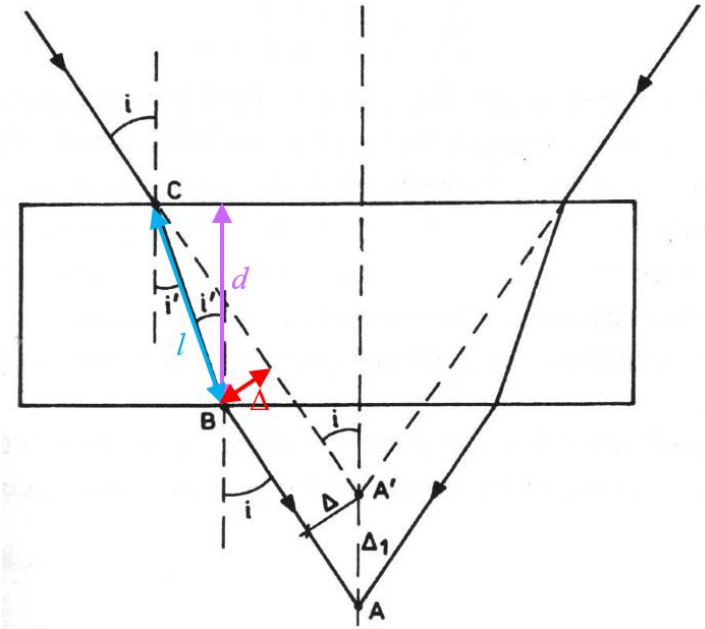

z prawa załamania:

$$\sin\alpha = n\sin\beta \Rightarrow \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n}$$

$$i \equiv \alpha$$

$$i' \equiv \beta$$

# Płytka płasko-równoległa




z prawa załamania:

$$\sin\alpha = n\sin\beta \Rightarrow \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n}$$

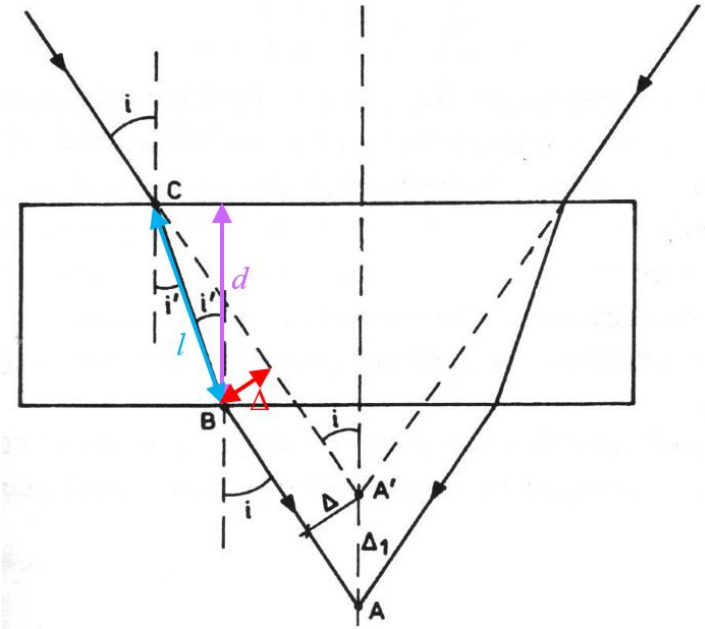
z „jedynki trygonometrycznej”:

$$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-\frac{\sin^2\alpha}{n^2}} = \sqrt{\frac{n^2}{n^2}-\frac{\sin^2\alpha}{n^2}} = \frac{1}{n}\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}$$

$$i \equiv \alpha$$

$$i' \equiv \beta$$

# Płytka płasko-równoległa




$$i \equiv \alpha$$

$$i' \equiv \beta$$

z prawa załamania:

$$\sin\alpha = n\sin\beta \Rightarrow \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n}$$

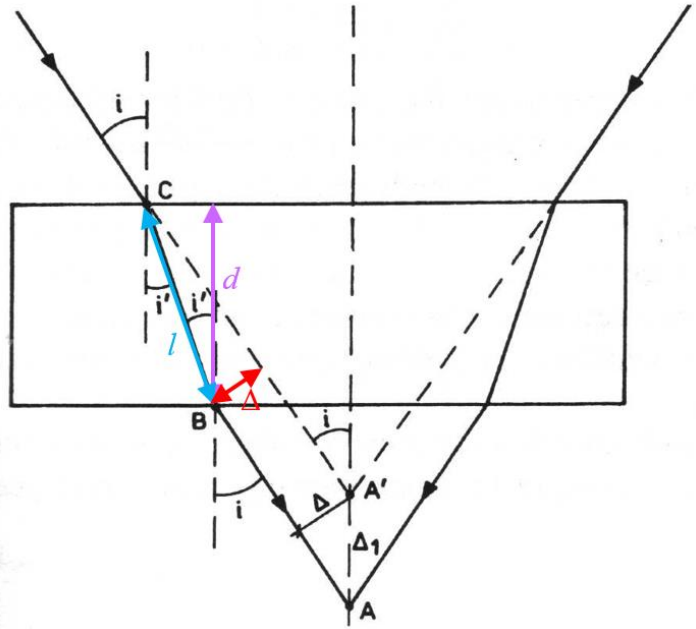
z „jedynki trygonometrycznej”:

$$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-\frac{\sin^2\alpha}{n^2}} = \sqrt{\frac{n^2}{n^2}-\frac{\sin^2\alpha}{n^2}} = \frac{1}{n}\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}$$

z trójkątów:

$$\frac{d}{l} = \cos\beta \Rightarrow l = \frac{d}{\cos\beta}$$

# Płytka płasko-równoległa




$$i \equiv \alpha$$

$$i' \equiv \beta$$

z prawa załamania:

$$\sin\alpha = n\sin\beta \Rightarrow \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n}$$

z „jedynki trygonometrycznej”:

$$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-\frac{\sin^2\alpha}{n^2}} = \sqrt{\frac{n^2}{n^2}-\frac{\sin^2\alpha}{n^2}} = \frac{1}{n}\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}$$

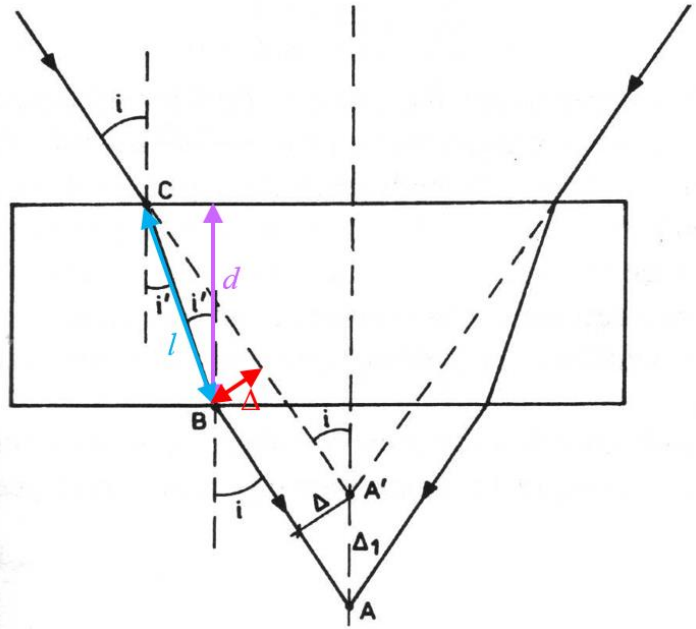
z trójkątów:

$$\frac{d}{l} = \cos\beta \Rightarrow l = \frac{d}{\cos\beta}$$

$$\frac{\Delta}{l} = \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\Delta = \frac{d}{\cos\beta}(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)$$

# Płytka płasko-równoległa




$$i \equiv \alpha$$

$$i' \equiv \beta$$

z prawa załamania:

$$\sin\alpha = n\sin\beta \Rightarrow \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n}$$

z „jedynki trygonometrycznej”:

$$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-\frac{\sin^2\alpha}{n^2}} = \sqrt{\frac{n^2}{n^2}-\frac{\sin^2\alpha}{n^2}} = \frac{1}{n}\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}$$

z trójkątów:

$$\frac{d}{l} = \cos\beta \Rightarrow l = \frac{d}{\cos\beta}$$

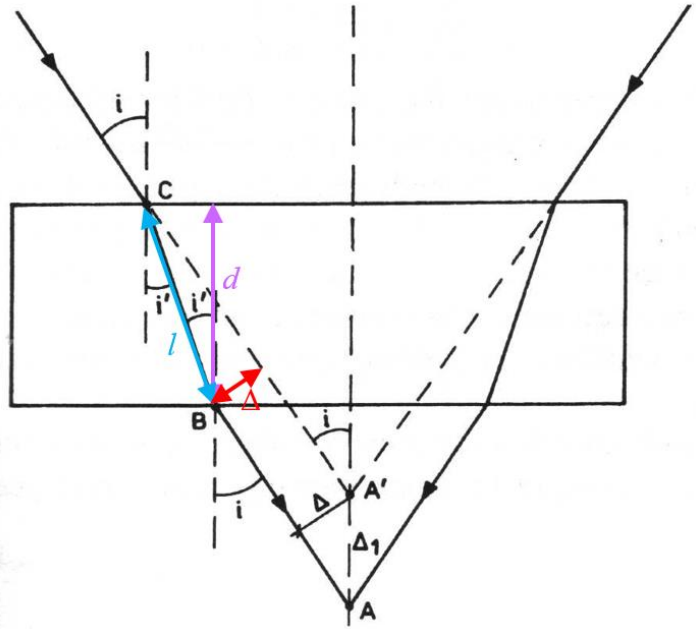
$$\frac{\Delta}{l} = \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\Delta = \frac{d}{\cos\beta}(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)$$

$$\Delta = d\sin\alpha - \frac{d\cos\alpha\sin\beta}{\cos\beta} = d\sin\alpha - \frac{d\cos\alpha\frac{\sin\alpha}{n}}{\frac{1}{n}\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}} = d\sin\alpha\left(1-\frac{\cos\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}\right)$$

PRZESUNIĘCIE

# Płytka płasko-równoległa




$$i \equiv \alpha$$

$$i' \equiv \beta$$

z prawa załamania:

$$\sin\alpha = n\sin\beta \Rightarrow \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n}$$

z „jedynki trygonometrycznej”:

$$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-\frac{\sin^2\alpha}{n^2}} = \sqrt{\frac{n^2}{n^2}-\frac{\sin^2\alpha}{n^2}} = \frac{1}{n}\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}$$

z trójkątów:

$$\frac{d}{l} = \cos\beta \Rightarrow l = \frac{d}{\cos\beta}$$

$$\frac{\Delta}{l} = \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\Delta = \frac{d}{\cos\beta}(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)$$

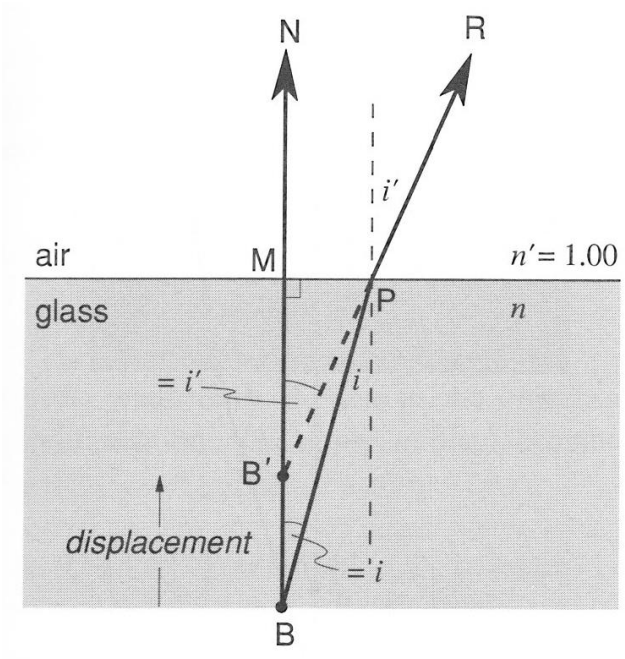
$$\Delta = d\sin\alpha - \frac{d\cos\alpha\sin\beta}{\cos\beta} = d\sin\alpha - \frac{d\cos\alpha\frac{\sin\alpha}{n}}{\frac{1}{n}\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}} = d\sin\alpha\left(1-\frac{\cos\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}\right)$$

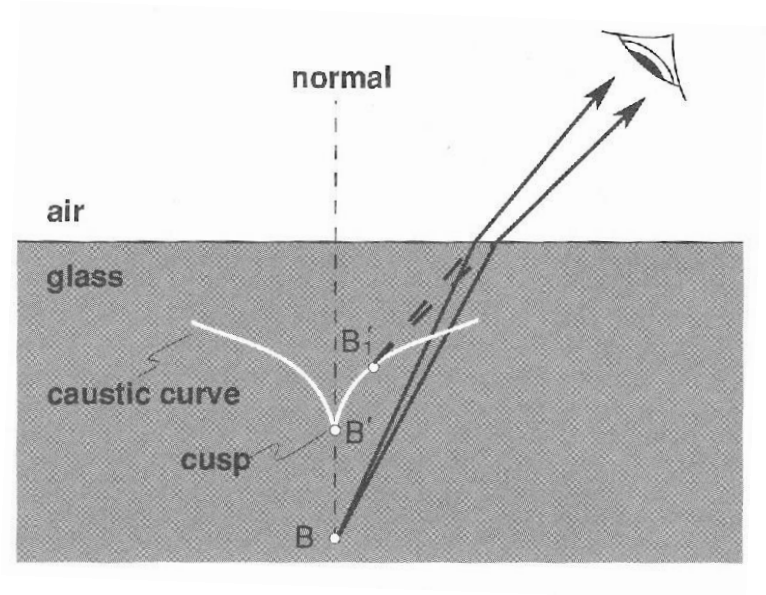
PRZESUNIĘCIE

$$\frac{\Delta}{\Delta_1} = \sin\alpha \Rightarrow \Delta_1 = \frac{\Delta}{\sin\alpha} \Rightarrow \Delta_1 = d\left(1-\frac{\cos\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}\right) \xrightarrow{\alpha\to 0} d\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

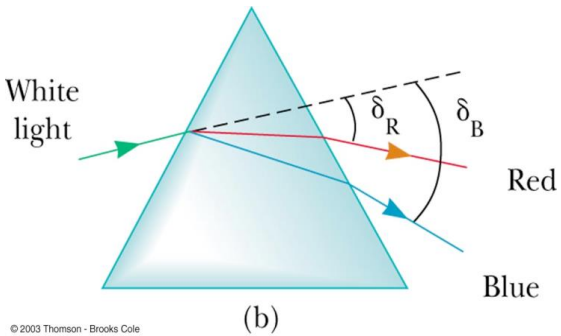
PODNIESIENIE

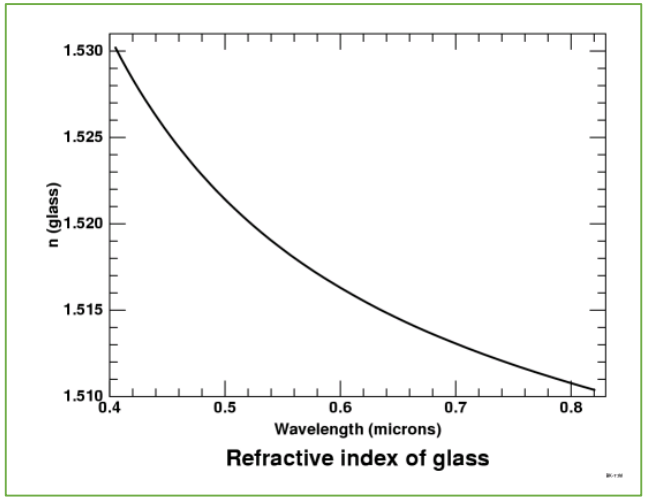
# Płytka płasko-równoległa



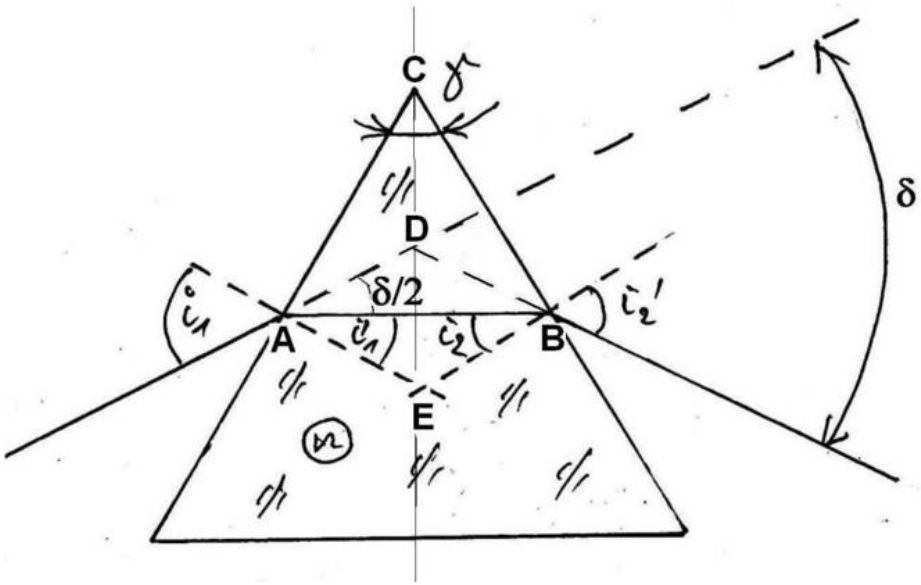
# Pryzmat




- Pryzmat – ośrodek ograniczony dwiema nierównoległymi płaszczyznami.
- Krawędź łamiąca – prosta powstała z przecięcia obu płaszczyzn.
- Kąt łamiący – kąt między płaszczyznami.

# Pryzmat



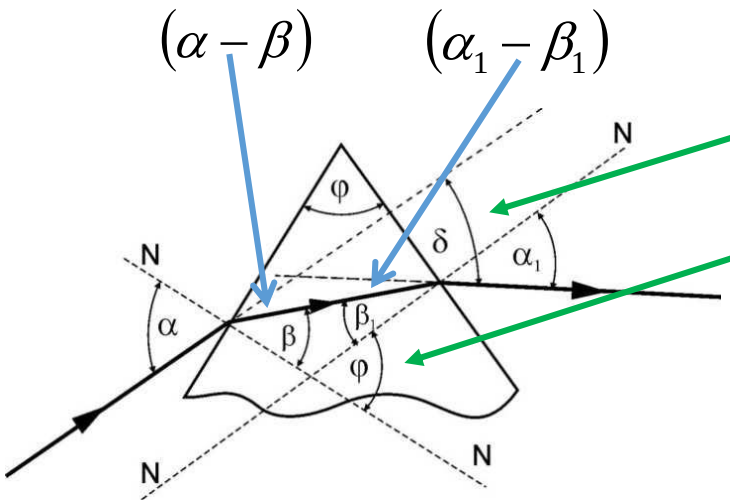

Odchylenie promienia δ jest najmniejsze, gdy światło biegnie przez pryzmat symetrycznie

$$n = \frac{\sin\left(\frac{\delta_{\min} + \gamma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}$$

Klin – gdy mały kąt łamiący

$$\delta_k = (n-1)\gamma$$

# Pryzmat

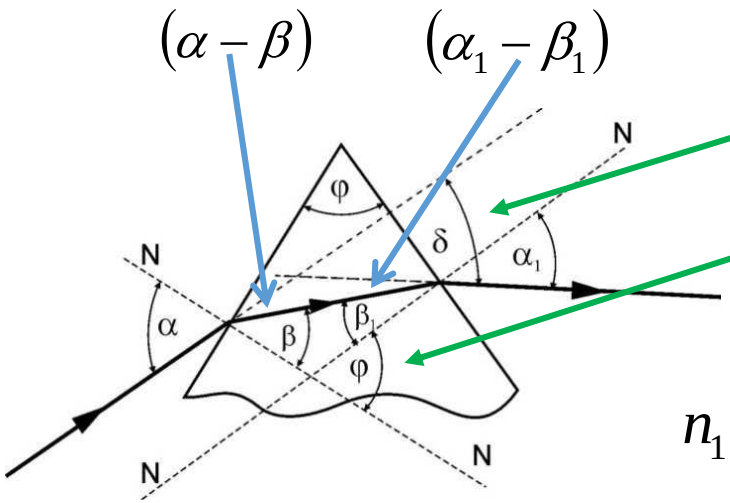



z trójkątów:

$$\delta = (\alpha - \beta) + (\alpha_1 - \beta_1)$$

$$\varphi = \beta + \beta_1 \Rightarrow \beta_1 = \varphi - \beta$$

# Pryzmat




z trójkątów:

$$\delta = (\alpha - \beta) + (\alpha_1 - \beta_1)$$

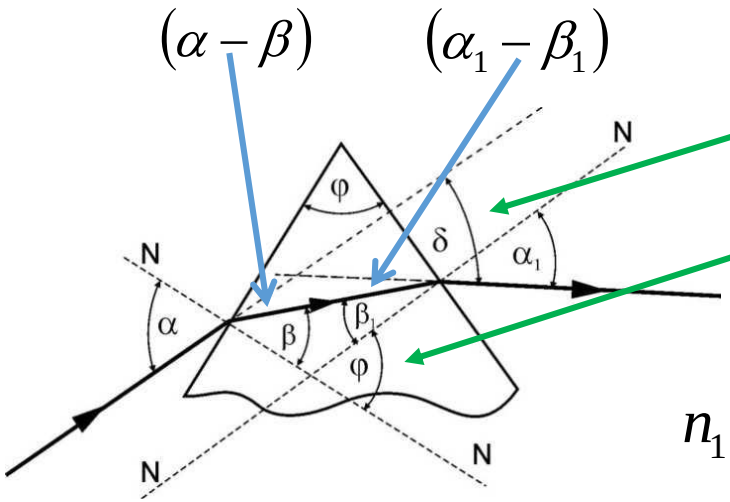
$$\varphi = \beta + \beta_1 \Rightarrow \beta_1 = \varphi - \beta$$

z prawa Snella:

$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta \Rightarrow \beta = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\alpha\right)$$

$$n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\beta_1 \Rightarrow \alpha_1 = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\sin\beta_1\right)$$

# Pryzmat




z trójkątów:

$$\delta = (\alpha-\beta)+(\alpha_1-\beta_1)$$

$$\varphi = \beta+\beta_1 \Rightarrow \beta_1 = \varphi-\beta$$

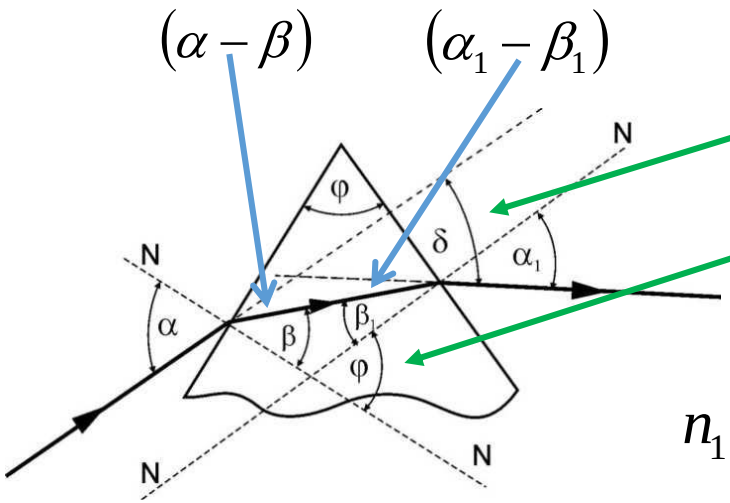
z prawa Snella:

$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta \Rightarrow \beta = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\alpha\right)$$

$$n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\beta_1 \Rightarrow \alpha_1 = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\sin\beta_1\right)$$

$$\delta = \left(\alpha-\arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\alpha\right)\right)+\left(\arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\sin\left(\varphi-\arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\alpha\right)\right)\right)\right)-\left(\varphi-\arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\alpha\right)\right)$$

# Pryzmat




z trójkątów:

$$\delta=(\alpha-\beta)+(\alpha_1-\beta_1)$$

$$\varphi=\beta+\beta_1 \Rightarrow \beta_1=\varphi-\beta$$

z prawa Snella:

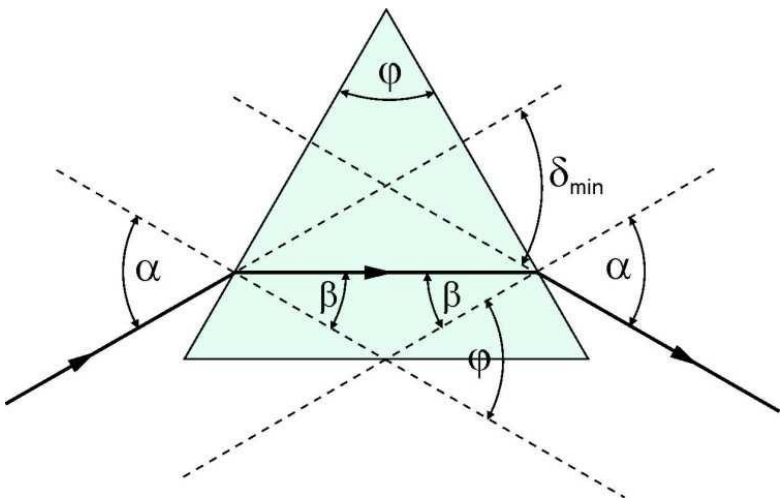
$$n_1\sin\alpha=n_2\sin\beta \Rightarrow \beta=\arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\alpha\right)$$

$$n_1\sin\alpha_1=n_2\sin\beta_1 \Rightarrow \alpha_1=\arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\sin\beta_1\right)$$

$$\delta=\left(\alpha-\underbrace{\arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\alpha\right)}\right)+\left(\arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\sin\left(\varphi-\arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\alpha\right)\right)\right)\right)-\left(\varphi-\underbrace{\arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\alpha\right)}\right)$$

$$\delta=(\alpha-\varphi)+\arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\sin\left(\varphi-\arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\alpha\right)\right)\right)$$

# Pryzmat




Przypadek symetryczny:

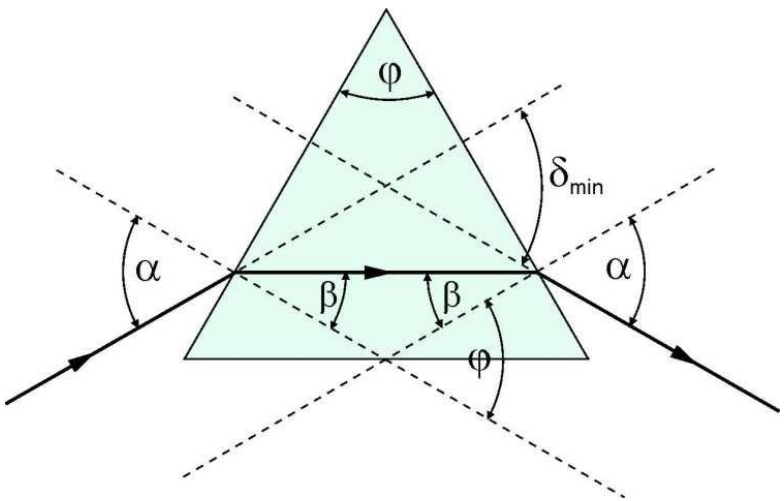
$$\varphi = 2\beta \Rightarrow \beta = \frac{\varphi}{2}$$

$$\delta_{\min} = (\alpha - \beta) + ([\alpha_1 = \alpha] - [\beta_1 = \beta])$$

$$\delta_{\min} = 2\alpha - 2\beta$$

$$\alpha = \frac{\delta_{\min} + \varphi}{2}$$

# Pryzmat




Przypadek symetryczny:

$$\varphi = 2\beta \Rightarrow \beta = \frac{\varphi}{2}$$

$$\delta_{\min} = (\alpha - \beta) + ([\alpha_1 = \alpha] - [\beta_1 = \beta])$$

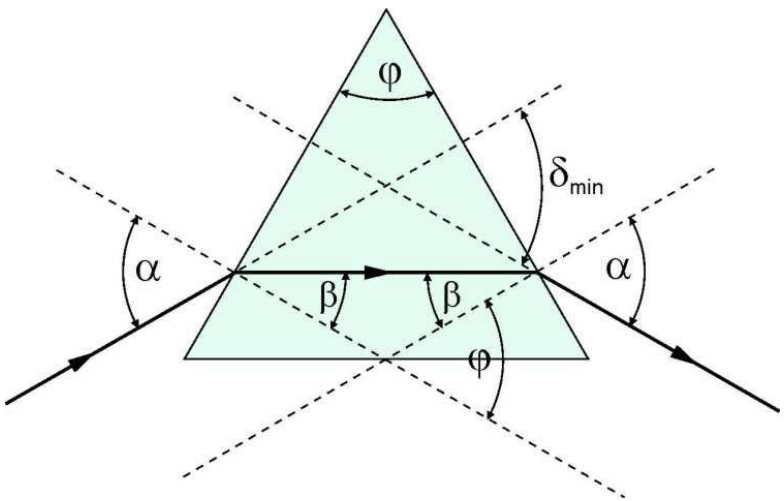
$$\delta_{\min} = 2\alpha - 2\beta$$

$$\alpha = \frac{\delta_{\min} + \varphi}{2}$$

$$\sin\alpha = n\sin\beta \Rightarrow n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

$$\boxed{n = \frac{\sin\left(\frac{\delta_{\min} + \varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}}$$

# Pryzmat




Przypadek symetryczny:

$$\varphi = 2\beta \Rightarrow \beta = \frac{\varphi}{2}$$

$$\delta_{\min} = (\alpha - \beta) + ([\alpha_1 = \alpha] - [\beta_1 = \beta])$$

$$\delta_{\min} = 2\alpha - 2\beta$$

$$\alpha = \frac{\delta_{\min} + \varphi}{2}$$

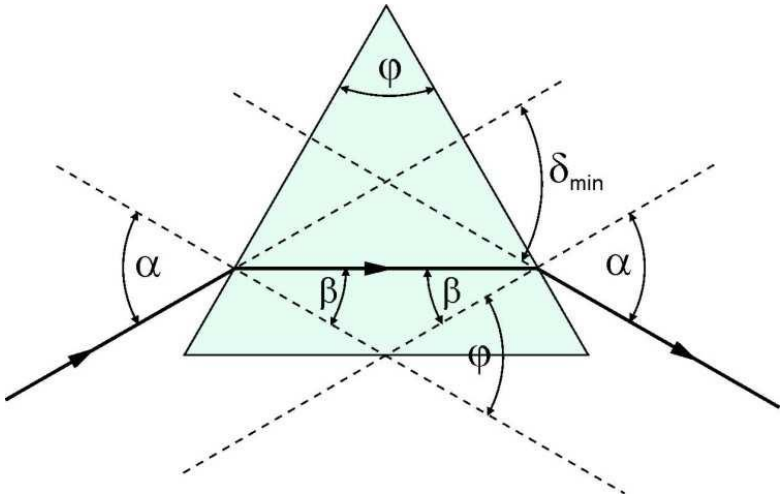
$$\sin\alpha = n\sin\beta \Rightarrow n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

$$\boxed{n = \frac{\sin\left(\frac{\delta_{\min} + \varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}}$$

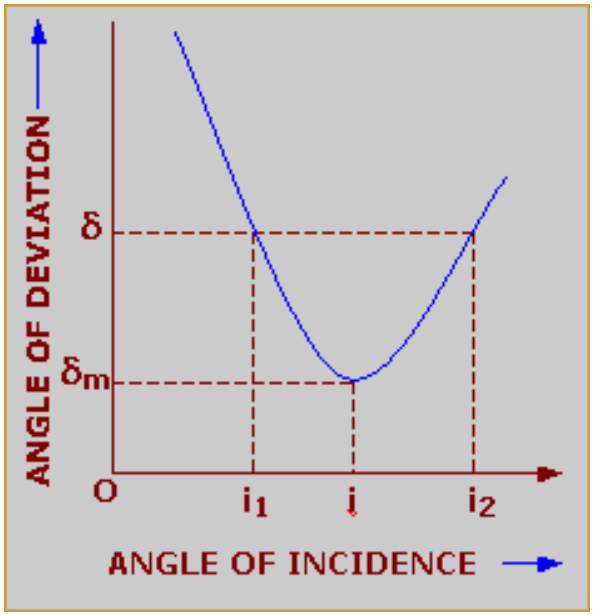
Dla klina - $\varphi$ małe: $sin\theta \approx \theta$

$$n = \frac{\frac{\delta_{\min} + \varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}} = \frac{\delta_{\min} + \varphi}{\varphi} \Rightarrow \boxed{\delta_{\min} = \varphi(n-1)}$$

# Pryzmat




$$n = \frac{\sin\left(\frac{\delta_{\min} + \varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$




*www.ques10.com*