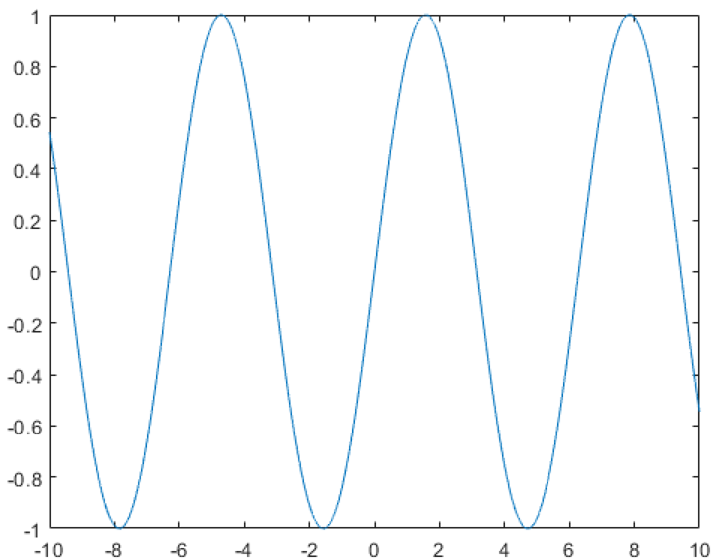
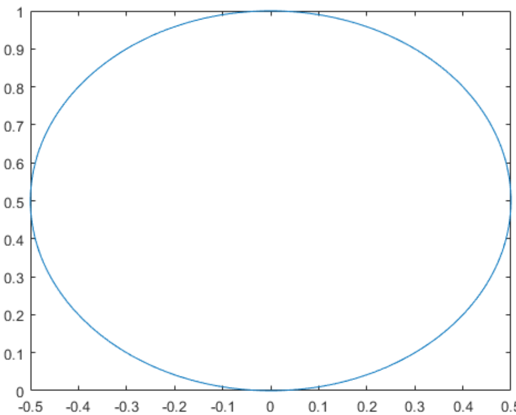
WSTĘP DO OPTYKI FOURIEROWSKIEJ

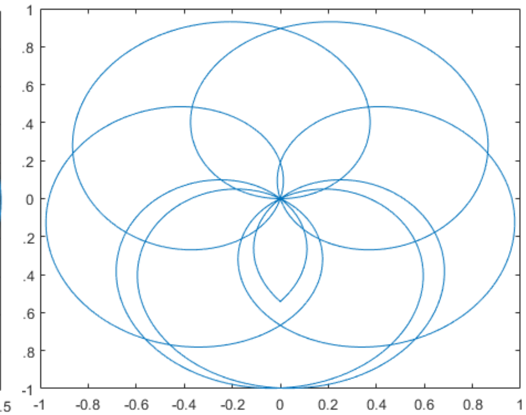
dr hab. Rafał Kasztelanic

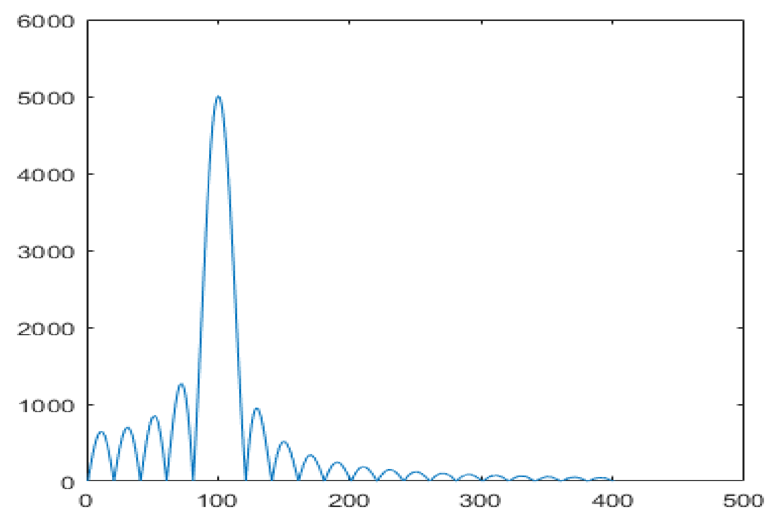
WYKŁAD 3

Analogia z centrum masy









https://www.youtube.com/watch?v=spUNpyF58BY (2:03 – 6:45) FourierMasa.m

Transformacja Fouriera 2D

$$F(\nu_x, \nu_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) exp\left[-i2\pi(x\nu_x + y\nu_y)\right] dx\, dy$$

transformata

$$f(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} F(\nu_x, \nu_y) exp\left[i2\pi(x\nu_x + y\nu_y)\right] d\nu_x\, d\nu_y$$

transformata odwrotna

$$f(x, y) \Leftrightarrow F(\nu_x, \nu_y)$$

Transformacja Fouriera 2D

$$f(x,y) \Leftrightarrow F(\nu_x,\nu_y) \qquad g(x,y) \Leftrightarrow G(\nu_x,\nu_y)$$

Właściwości:

Twierdzenie o liniowości:

$$\mathcal{F}\{af(x,y)+bg(x,y)\} = aF\left(\nu_x,\nu_y\right) + bG(\nu_x,\nu_y)$$

Twierdzenie o podobieństwie (skali):

$$\mathcal{F}\{f(ax,by)\} = \frac{1}{|ab|}F\left(\frac{\nu_x}{a},\frac{\nu_y}{b}\right)$$

Twierdzenie o przesunięciu w przestrzeni położeń:

$$\mathcal{F}\{f(x-x_0,y-y_0)\} = F\left(\nu_x,\nu_y\right)\exp[-i2\pi(x_0\nu_x+y_0\nu_y)]$$

Twierdzenie o przesunięciu w przestrzeni częstości:

$$\mathcal{F}\{f(x,y)\exp[i2\pi(x\nu_1+y\nu_2)\} = F\left(\nu_x-\nu_1,\nu_y-\nu_2\right)$$

Twierdzenie o wzajemności transformat:

$$\mathcal{F}\mathcal{F}\{f(x,y)\} = f(-x,-y) \qquad \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\{f(x,y)\} = f(x,y)$$

Transformacja Fouriera 2D

Twierdzenie o splocie w przestrzeni położeń:

$$\mathcal{F}\{f(x,y) \otimes g(x,y)\} = F\left(\nu_x,\nu_y\right)G(\nu_x,\nu_y)$$

$$f(x,y) \star g(x,y) = \mathcal{F}^{-1}\{F\left(\nu_x,\nu_y\right)G(\nu_x,\nu_y)\}$$

Twierdzenie o splocie w przestrzeni częstości:

$$\mathcal{F}\{f(x,y)g(x,y)\} = F\left(\nu_x,\nu_y\right) \star G(\nu_x,\nu_y)$$

Twierdzenie o korelacji wzajemnej:

$$\mathcal{F}\{f(x,y) \star g^*(x,y)\} = F\left(\nu_x,\nu_y\right)G^*(\nu_x,\nu_y)$$

$$\mathcal{F}\{f(x,y) \star f^*(x,y)\} = \left|F\left(\nu_x,\nu_y\right)\right|^2$$

Twierdzenie o mocy:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} |f(x,y)|^2 dxdy = \iint_{-\infty}^{\infty} \left|F(\nu_x,\nu_y)\right|^2 d\nu_x d\nu_y$$

Transformacja Fouriera 2D

Pary transformat:

$$f(x,y) \Leftrightarrow F(\nu_x,\nu_y)$$

$$sgn(x,y) = sgn(x)sgn(y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{i\pi\nu_x}\frac{1}{i\pi\nu_y}$$

$$\mathrm{rect}(x,y) = \mathrm{rect}(x)\mathrm{rect}(y) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{sinc}(\nu_x)\mathrm{sinc}(\nu_y) = \mathrm{sinc}(\nu_x,\nu_y)$$

$$\Lambda(x,y) = \Lambda(x)\Lambda(y) \quad \Leftrightarrow \quad sinc^2(\nu_x)sinc^2(\nu_y) = sinc^2(\nu_x,\nu_y)$$

$$\delta(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad 1$$

$$\mathrm{comb}(x,y) = \mathrm{comb}(x)\mathrm{comb}(y) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{comb}(\nu_x)\mathrm{comb}(\nu_y) = \mathrm{comb}(\nu_x,\nu_y)$$

$$\exp[i\pi(x+y)] \quad \Leftrightarrow \quad \delta\left(\nu_x - \frac{1}{2}, \nu_y - \frac{1}{2}\right)$$

$$\exp[-\pi(x^2+y^2)] \quad \Leftrightarrow \quad \exp[-\pi({\nu_x}^2+{\nu_y}^2)]$$

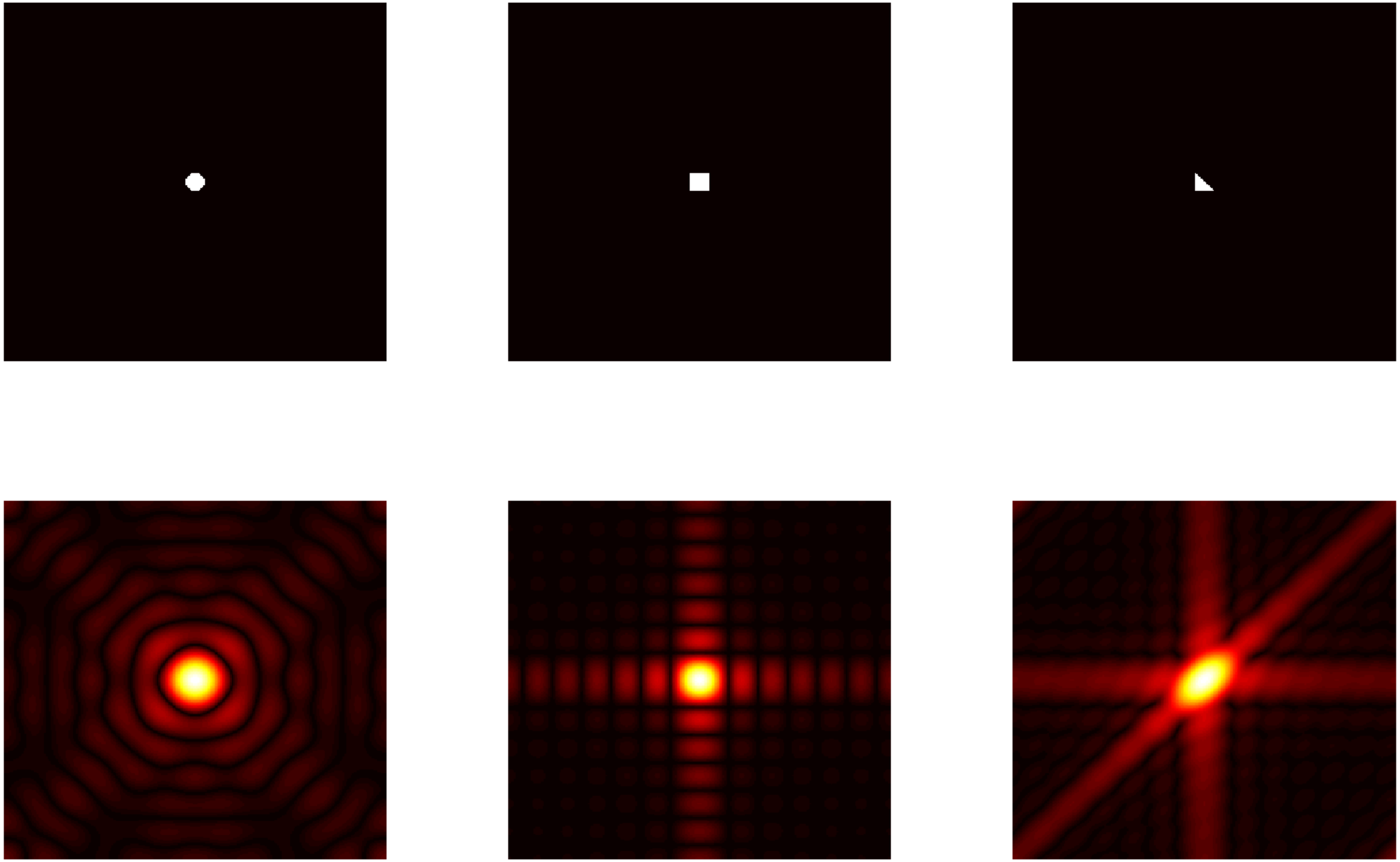
$$\mathrm{circ}(\mathrm{r}) = \mathrm{circ}(\sqrt{x^2+y^2}) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{J_1(2\pi\rho)}{\rho} = \frac{J_1(2\pi\sqrt{{\nu_x}^2+{\nu_y}^2})}{\sqrt{{\nu_x}^2+{\nu_y}^2}}$$

Fourier.m

Układy liniowe

Transformata Fouriera - Twierdzenie o liniowości:

$$\mathcal{F}\{af(x,y) + bg(x,y)\} = aF\left(\nu_x, \nu_y\right) + bG(\nu_x, \nu_y)$$



KoloKwadratTrojk.m, Cw7_1_2punkty.m