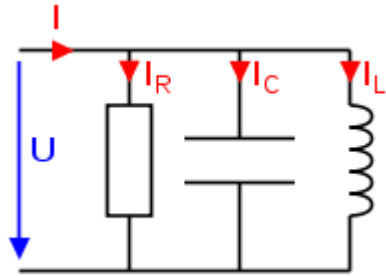


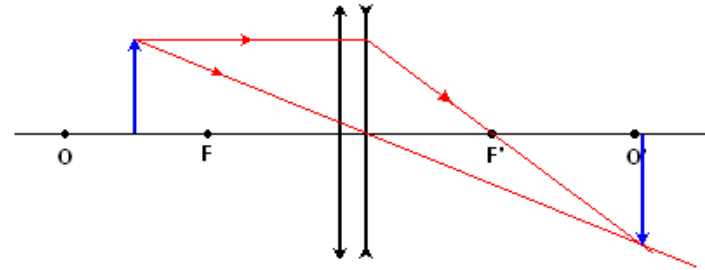
WSTĘP DO OPTYKI FOURIEROWSKIEJ

dr hab. Rafał Kasztelan

Układy liniowe

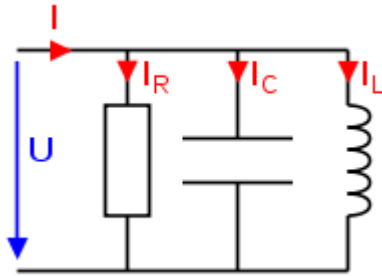


pl.wikipedia.org

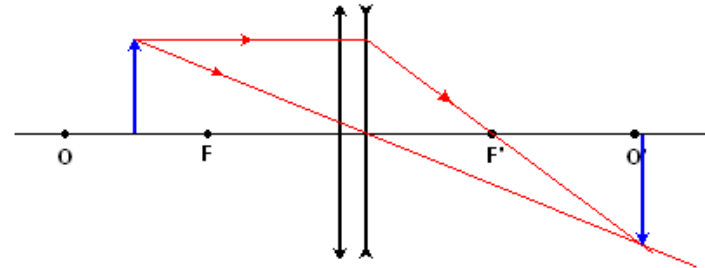


fizyka.edu.pl

Układy liniowe



pl.wikipedia.org



fizyka.edu.pl

$$g(x_2, y_2) = \mathcal{L}\{f(x_1, y_1)\}$$

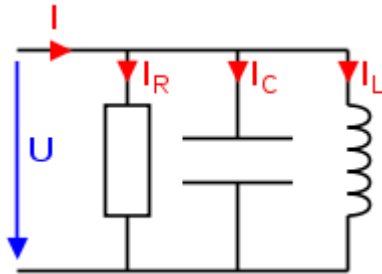
punktowe źródło światła

$$g(x_2, y_2) = \mathcal{L}\left\{\iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x_1 - x, y_1 - y) dx dy\right\}$$

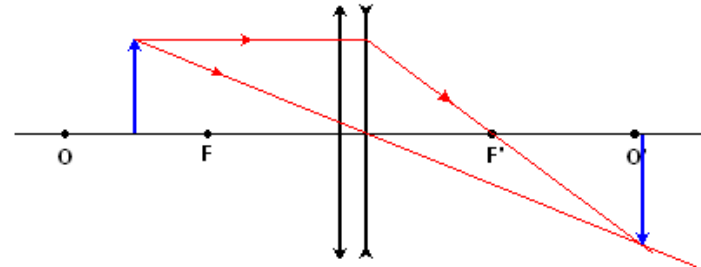
$$g(x_2, y_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \underbrace{\mathcal{L}\{\delta(x_1 - x, y_1 - y)\}}_{h(x_2, y_2; x, y)} dx dy$$

$$h(x_2, y_2; x, y)$$

Układy liniowe



pl.wikipedia.org



fizyka.edu.pl

$$g(x_2, y_2) = \mathcal{L}\{f(x_1, y_1)\}$$

punktowe źródło światła

$$g(x_2, y_2) = \mathcal{L}\left\{\iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x_1 - x, y_1 - y) dx dy\right\}$$

$$g(x_2, y_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \underbrace{\mathcal{L}\{\delta(x_1 - x, y_1 - y)\}}_{h(x_2, y_2; x, y)} dx dy$$

$$g(x_2, y_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \underbrace{h(x_2, y_2; x, y)}_{\text{ODPOWIEDŹ IMPULSOWA UKŁADU}} dx dy$$

ODPOWIEDŹ IMPULSOWA UKŁADU

Odpowiedź impulsowa

$$g(x_2, y_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \underbrace{h(x_2, y_2; x, y)}_{\text{ODPOWIEDŹ IMPULSOWA UKŁADU}} dx dy$$

ODPOWIEDŹ IMPULSOWA UKŁADU

- Obraz punktu
- Plamka rozmycia (point-spread function)
- Obraz wyjściowy jest superpozycją obrazów poszczególnych punktów przedmiotu
- Funkcja h całkowicie charakteryzuje transformacyjne właściwości układu liniowego

Funkcja przenoszenia

Zakładam, że układ jest niezmienniczy przestrzennie – izoplanatyczny:

- Niezmienniczość ze względu na przesunięcie
- Stała skala

Funkcja przenoszenia

Zakładam, że układ jest niezmienniczy przestrzennie – izoplanatyczny:

- Niezmienniczość ze względu na przesunięcie
- Stała skala

$$h(x_2, y_2; x, y) = h(x_2 - x, y_2 - y)$$

$$g(x_2, y_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) h(x_2 - x, y_2 - y) dx dy$$

Jest to splot sygnału wejściowego z odpowiedzią impulsową

$$g(x_2, y_2) = f(x, y) \otimes h(x_2, y_2)$$

Funkcja przenoszenia

Zakładam, że układ jest niezmienniczy przestrzennie – izoplanatyczny:

- Niezmienniczość ze względu na przesunięcie
- Stała skala

$$h(x_2, y_2; x, y) = h(x_2 - x, y_2 - y)$$

$$g(x_2, y_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) h(x_2 - x, y_2 - y) dx dy$$

Jest to spłot sygnału wejściowego z odpowiedzią impulsową

$$g(x_2, y_2) = f(x, y) \otimes h(x_2, y_2)$$

Z twierdzenie o splocie w przestrzeni położeń:

$$\mathcal{F}\{f(x, y) \otimes h(x, y)\} = F(v_x, v_y) \underbrace{H(v_x, v_y)} = G(v_x, v_y)$$

FUNKCJA PRZENOSZENIA UKŁADU

$$H(v_x, v_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} h(x, y) \exp[-i2\pi(xv_x + yv_y)] dx dy$$

$H(v_x, v_y)$ jest filtrem częstości przestrzennych

Fala płaska

Z równań Maxwella:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0 \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

i równań materiałowych:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

i korzystając z tożsamości:

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} = \Delta$$

dostajemy równanie falowe:

$$\Delta \mathbf{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

W postaci ogólnej:

$$\Delta u - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 299792458 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Fala płaska

Zakładamy, że rozwiązaniem równania falowego:

$$\Delta \mathbf{u} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = 0$$

jest fala monochromatyczna typu:

$$u(x, y, z, t) = a(x, y, z) \cos[2\pi\nu t + \varphi(x, y, z)]$$

amplituda częstota faza

$$u(x, y, z, t) = \frac{a(x, y, z) \{ \exp[-i(2\pi\nu t + \varphi)] + \exp[i(2\pi\nu t + \varphi)] \}}{2}$$

$$\Delta \mathbf{u} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\lambda = \frac{v}{\nu} \quad \begin{array}{l} \text{prędkość} \\ \text{częstota} \end{array}$$

Weźmy falę elektromagnetyczną w postaci:

$$u(x, y, z, t) = u(x, y, z) \exp[i2\pi\nu t]$$

Liczę drugi człon równania falowego:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} (2\pi\nu)^2 \mathbf{u} = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \mathbf{u} = k^2 \mathbf{u}$$

Czyli równanie falowe w postaci:

$$\Delta \mathbf{u} - k^2 \mathbf{u} = 0$$

równanie Helmholtza

Inne możliwe rozwiązania równania falowego:

fala monochromatyczna o określonym kierunku propagacji

$$u(x, y, z, t) = u(x, y, z) \exp[i(\beta z - \omega t)]$$

fala o określonej częstotliwości

$$u(x, y, z, t) = u(x, y, z) \exp[i(\varphi(r) - \omega t)]$$

↑
amplituda

↑
faza

↑
częstość kołowa

$$\omega = 2\pi\nu$$

$$u(x, y, z, t) = \underbrace{a(x, y, z) \exp(i\varphi(r))}_{\text{amplituda zespolona}} \underbrace{\exp(-i\omega t)}_{\text{zależność od czasu}}$$

amplituda zespolona

zależność od czasu

Fala płaska

Falę monochromatyczną możemy też zapisać jako:

$$u(x, y, z) = A \exp[i(kr + \varphi)]$$

gdzie k jest wektorem falowym:

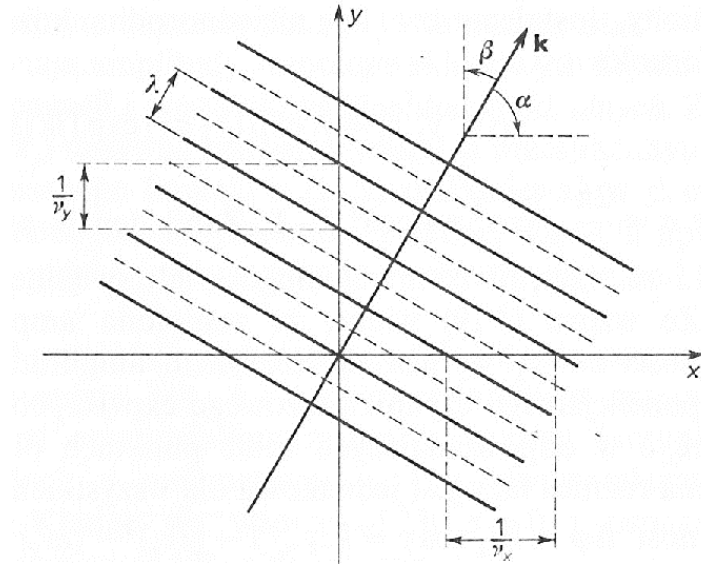
$$k = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{\lambda}$$

a r jest odległością:

$$r = \vartheta t$$

Definiujemy częstotliwości przestrzenne:

$$\nu_x = \frac{\cos\alpha}{\lambda} \quad \nu_y = \frac{\cos\beta}{\lambda}$$



Rozkład pola na fale płaskie

Dowolne pole może być przedstawione jako superpozycja (suma) fal monochromatycznych:

$$u(x, y, z, t) = \sum_{-\infty}^{\infty} u_v(x, y, z) \exp[-i2\pi vt]$$

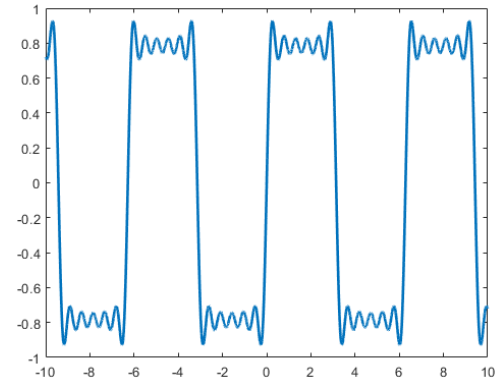
częstości przestrzenne:

$$v_x = \frac{c \cos \alpha}{\lambda} \quad v_y = \frac{c \cos \beta}{\lambda} \quad \lambda = \frac{v}{\nu}$$

$$vt = xv_x = x \frac{c \cos \alpha}{\lambda} = x \frac{c \cos \alpha}{v} \nu \rightarrow x = \frac{vt}{c \cos \alpha}$$

Transformata Fouriera:

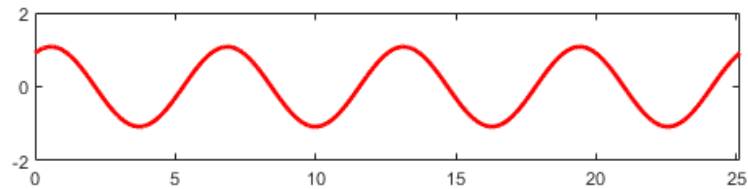
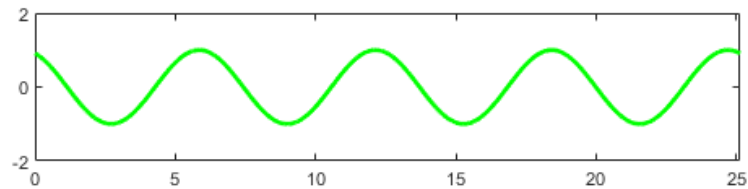
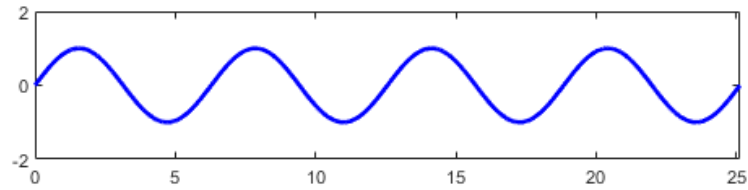
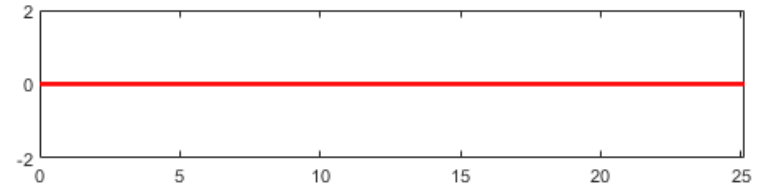
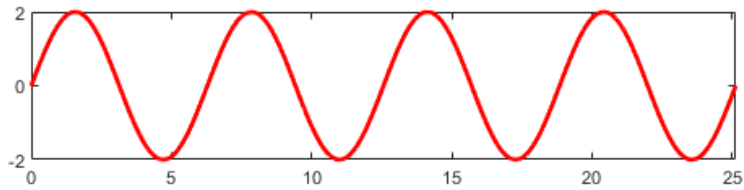
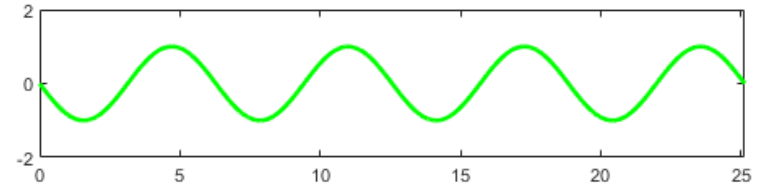
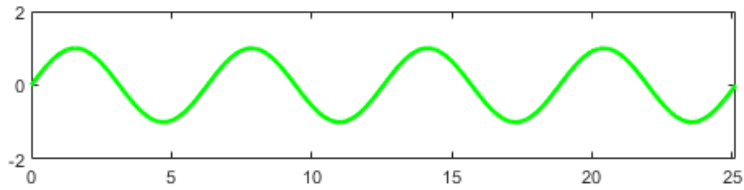
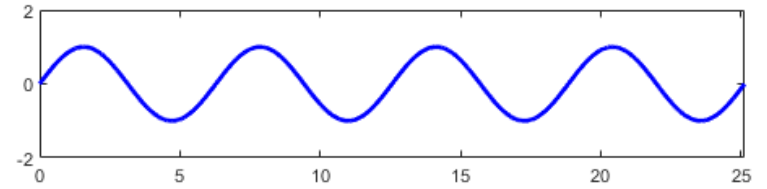
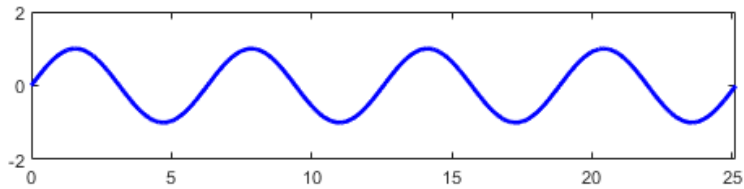
$$F(v_x, v_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-i2\pi(xv_x + yv_y)] dx dy$$



Dowolne pole optyczne rozkładam za pomocą transformaty Fouriera na superpozycję fal monochromatycznych:

$$u(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} U(v_x, v_x) \exp[-i2\pi(xv_x + yv_y)] dv_x dv_y$$

Superpozycja



Przestrzeń swobodna jako filtr częstości przestrzennych

Założmy, że znamy rozkład pola na fale monochromatyczne w płaszczyźnie z_0 .
Chcemy znaleźć rozkład pola w płaszczyźnie z_1 .

Rozwiązaniem fala monochromatyczna:

$$u(x, y, z, t) = a(x, y, z) \cos[2\pi vt]$$

$$v_x = \frac{\cos\alpha}{\lambda} \quad v_y = \frac{\cos\beta}{\lambda}$$
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

W kierunku propagacji:

$$\cos\gamma = \sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta} = \sqrt{1 - (\lambda v_x)^2 - (\lambda v_y)^2}$$

Aby znaleźć rozwiązanie podstawiam to do równania falowego:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} U(v_x, v_x, z_1) + k^2 [1 - (\lambda v_x)^2 - (\lambda v_y)^2] U(v_x, v_x, z_1) = 0$$

Uzyskujemy:

$$U(v_x, v_x, z_1) = U_0(v_x, v_x) \exp \left[\frac{i2\pi}{\lambda} \sqrt{1 - (\lambda v_x)^2 - (\lambda v_y)^2} z_1 \right]$$

Przestrzeń swobodna jako filtr częstości przestrzennych

dla: $v_x^2 + v_y^2 \leq \frac{1}{\lambda^2}$ $1 - (\lambda v_x)^2 - (\lambda v_y)^2 \geq 0$ - fala płaska rozprzestrzeniająca się

dla: $v_x^2 + v_y^2 > \frac{1}{\lambda^2}$ $1 - (\lambda v_x)^2 - (\lambda v_y)^2 < 0$ - fala zanikająca, evanescentna (niejednorodna)

Funkcja przenoszenia:

$$H(v_x, v_y) = \frac{U(v_x, v_y, z_1)}{U_0(v_x, v_y)} = \begin{cases} \exp \left[\frac{i2\pi}{\lambda} \sqrt{1 - (\lambda v_x)^2 - (\lambda v_y)^2} z_1 \right] & \text{dla: } v_x^2 + v_y^2 \leq \frac{1}{\lambda^2} \\ 0 & \text{dla: } v_x^2 + v_y^2 > \frac{1}{\lambda^2} \end{cases}$$

Propagację fali monochromatycznej w przestrzeni możemy interpretować jako proces filtracji dolnoprzepustowej. Pasma przenoszenia równoważnego filtra jest ograniczone w płaszczyźnie częstości przestrzennym do koła o promieniu $1/\lambda$. Fale, których częstości są wewnątrz tego koła przenoszone są bez zniekształceń lecz z przesunięciem fazowym.

Częstości z poza koła są tłumione i w odległości kilku λ nie są rejestrowane.

Prędkość fazowa, prędkość grupowa

Założmy, że mamy 2 fale monochromatyczne:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega_1 t)} \quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega_2 t)}$$

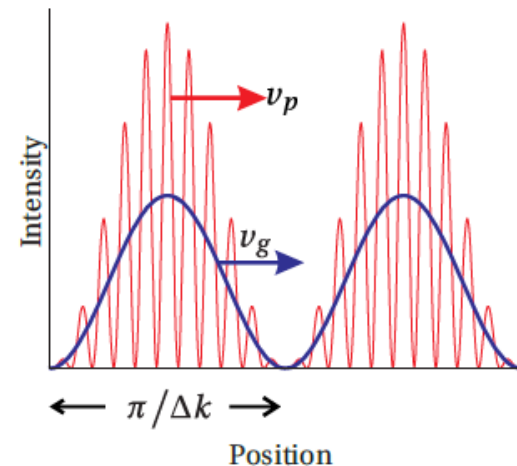
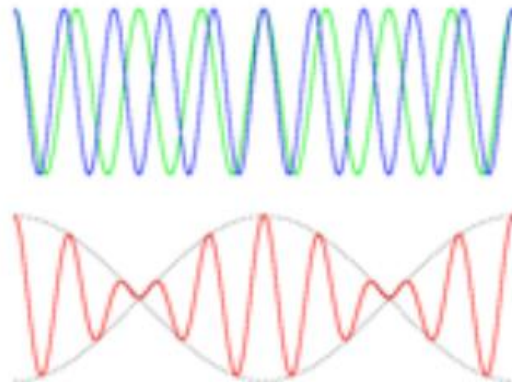
Prędkość fazowa – prędkość poruszania się punktów o tej samej fazie (fala monochromatyczna):

$$v_{p1} = \omega_1 / k_1 \quad v_{p2} = \omega_2 / k_2 \quad n = \frac{c}{v_p}$$

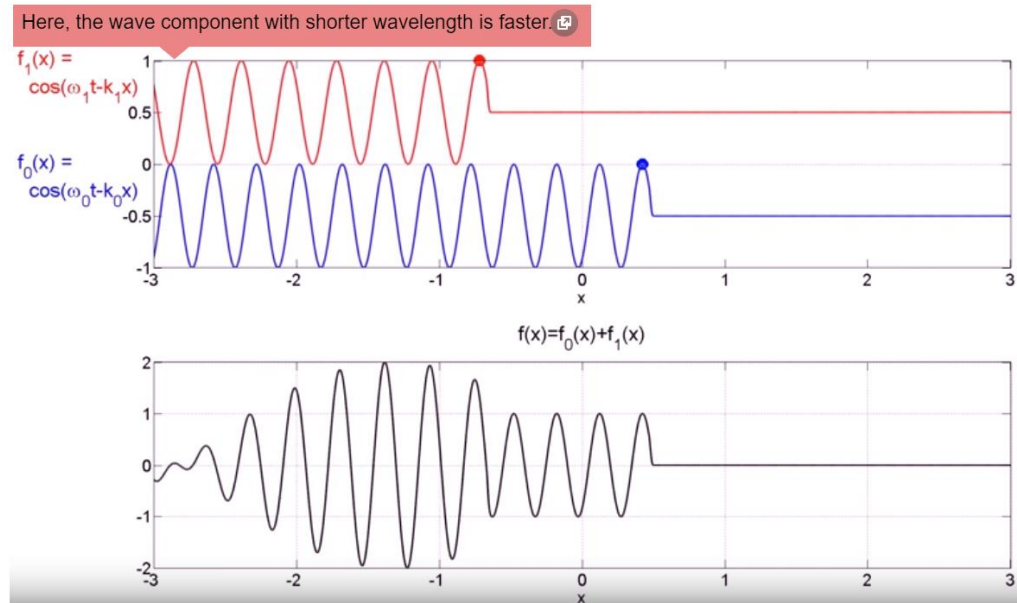
Prędkość grupowa – dla fal niemonochromatycznych, prędkość rozchodzenia się informacji, Rozchodzenia się obwiedni:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega_1 t)} + \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega_2 t)}$$

$$v_g \equiv \frac{\partial \omega}{\partial k}$$



Prędkość fazowa, prędkość grupowa



<https://www.youtube.com/watch?v=r18Gi8ISkfM>

www.youtube.com/watch?annotation_id=annotation_3359660903&feature=iv&src_vid=ePJdV75fT5o&v=tIM9vq-bepA