

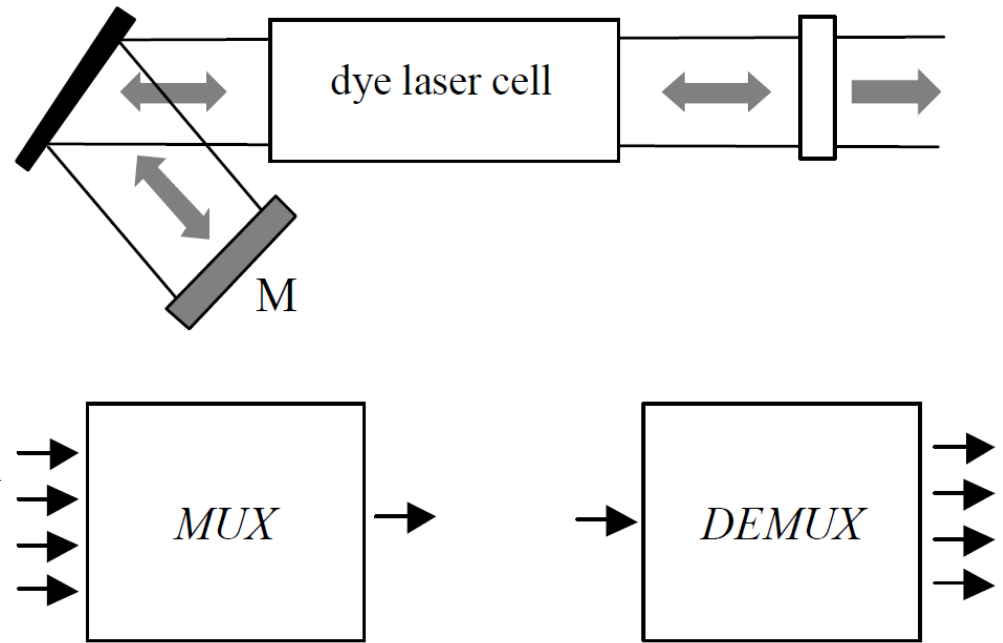
WSTĘP DO OPTYKI FOURIEROWSKIEJ

dr hab. Rafał Kasztelanic

Interferencja – siatka dyfrakcyjna

Przykład wykorzystania:

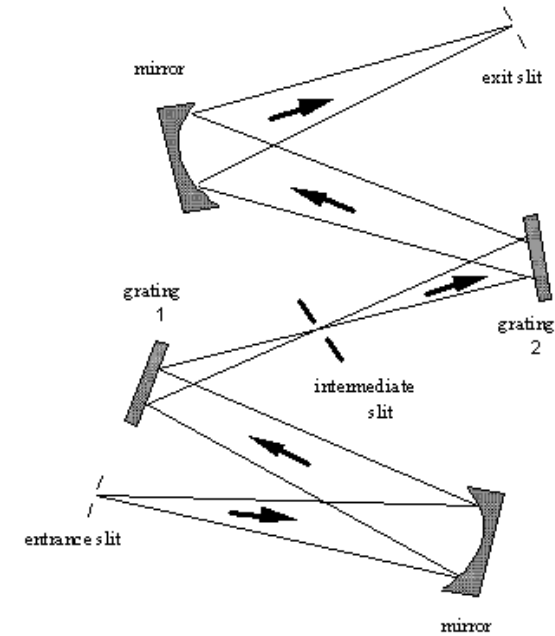
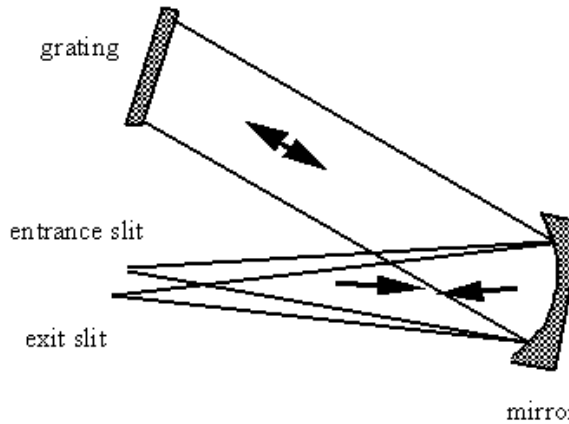
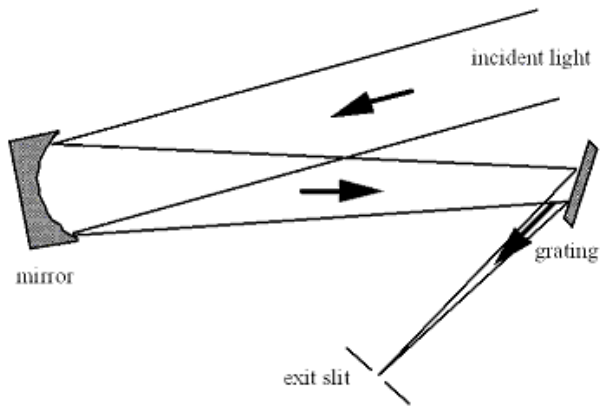
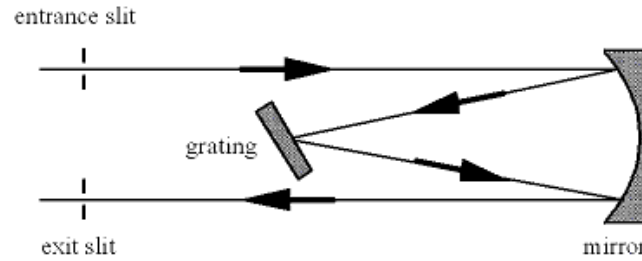
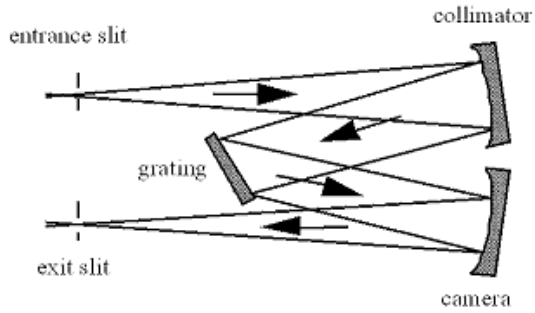
- Spektroskopia
- Monochromator
- Strojenie laserów
- Kompresja impulsów
- Filtracja
- Multiplexer – Demultiplexer
- Telekomunikacja
- Polaryzator
- Dzielnik wiązki – długość fali
- układy optyczne dla promieniowania X



Interferencja – siatka dyfrakcyjna

Przykład wykorzystania:

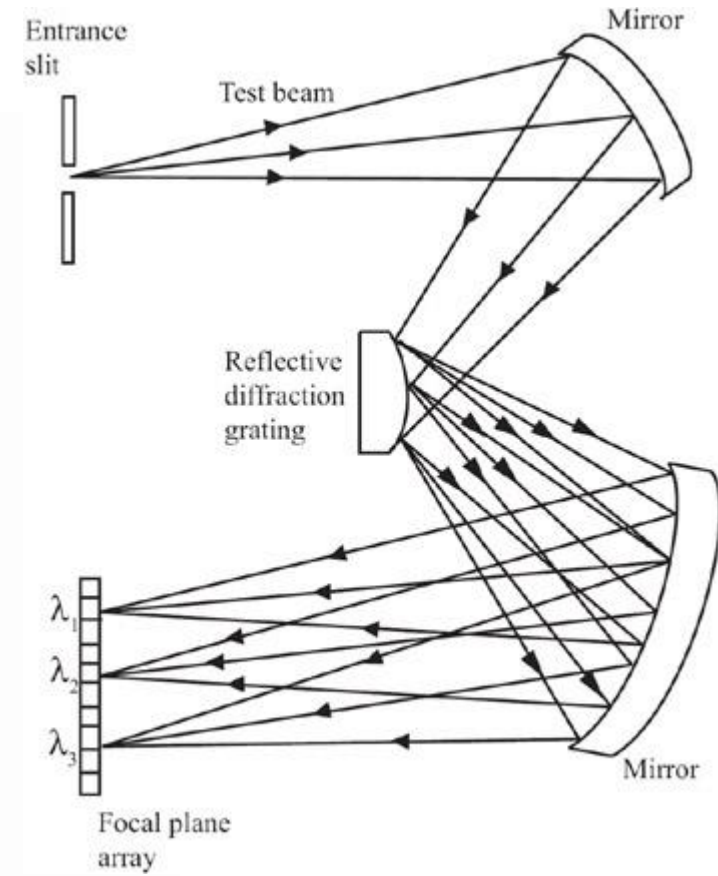
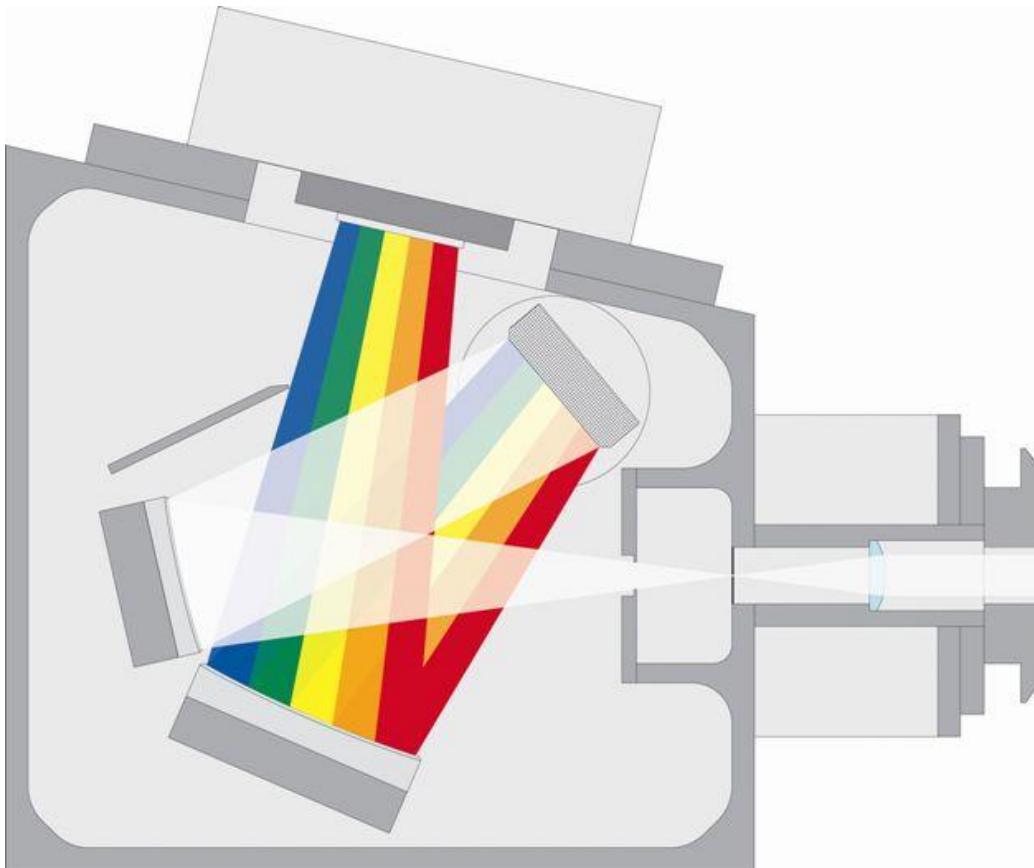
Monochromator:



Interferencja – siatka dyfrakcyjna

Przykład wykorzystania:

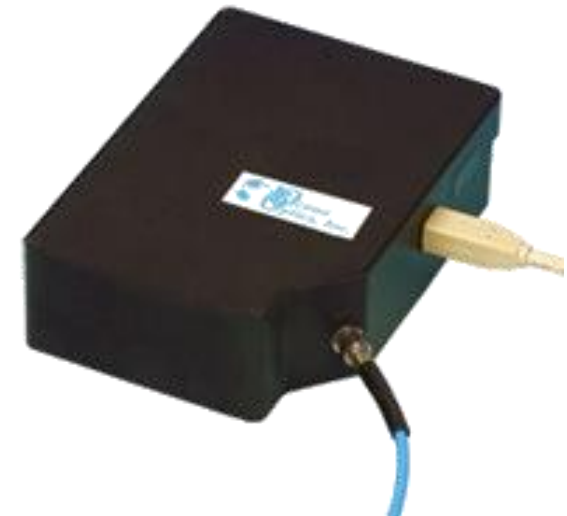
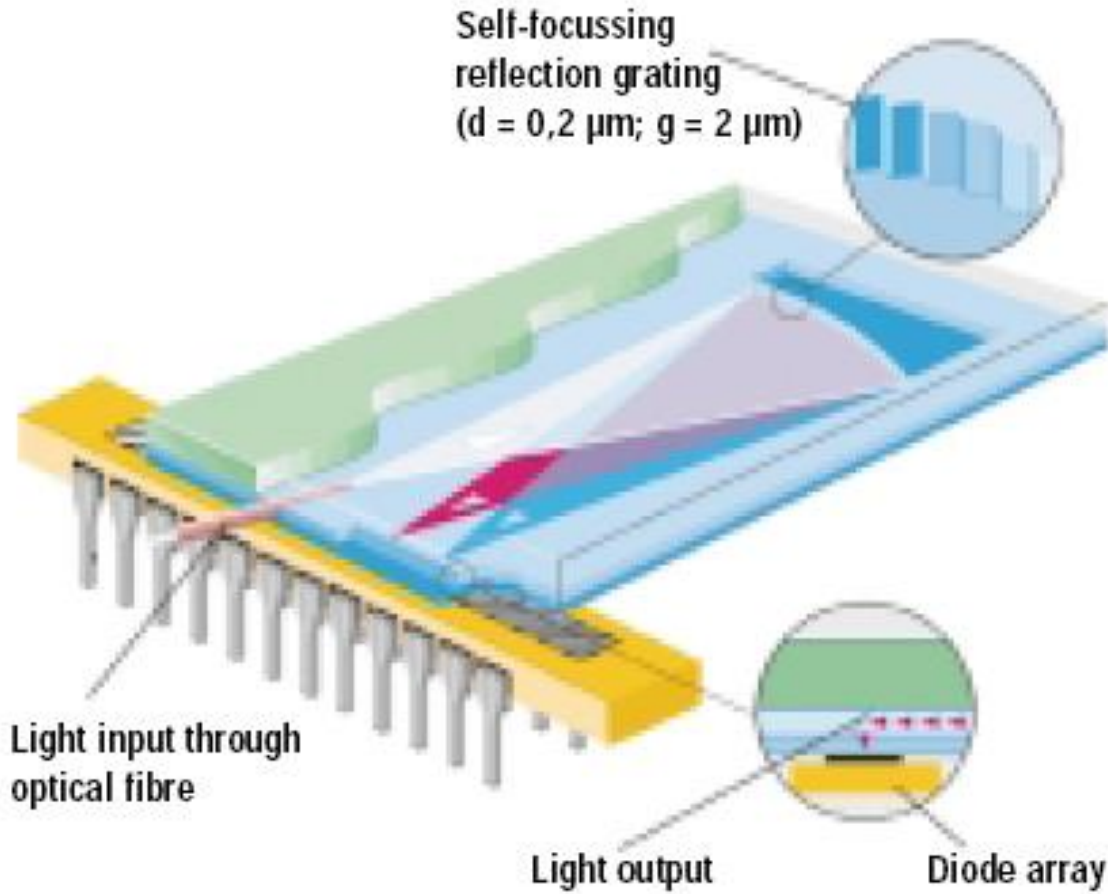
Spektroskopia:



Interferencja – siatka dyfrakcyjna

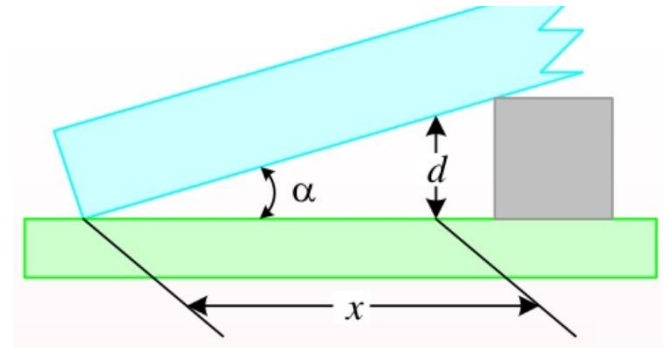
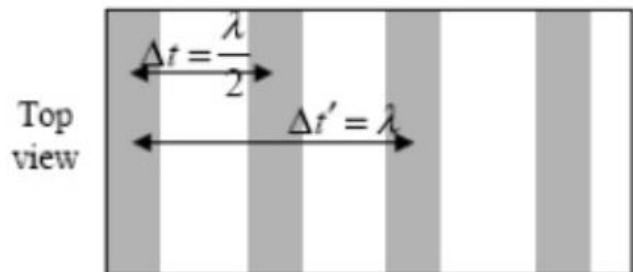
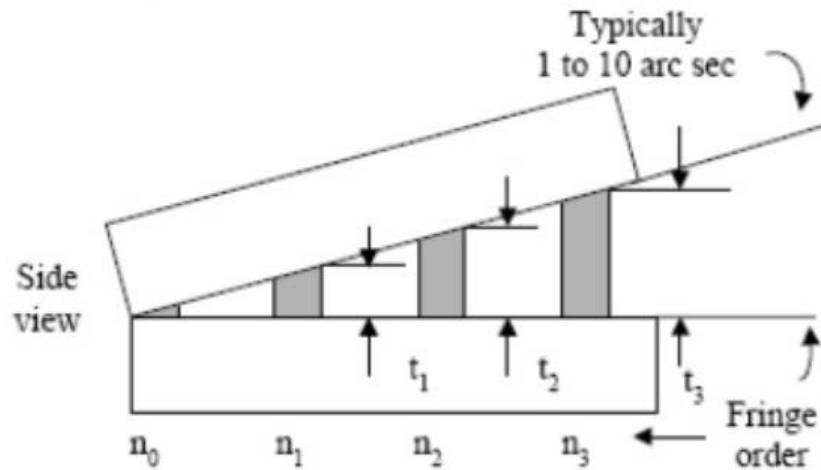
Przykład wykorzystania:

Spektroskopia - siatka odbiciowa typu blazed



Interferencia

Klin

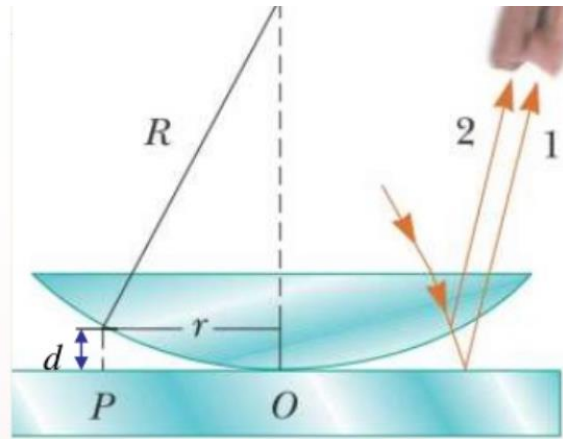


$$d = x\alpha$$

$$2n_f d_m = (m + 1/2)\lambda$$
$$2n_f (\alpha x_m) = (m + 1/2)\lambda$$

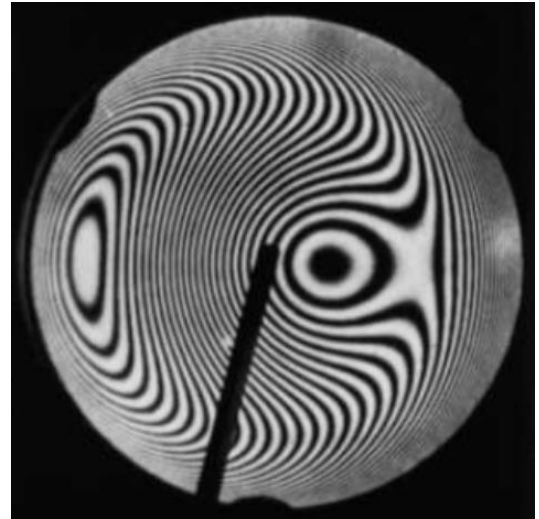
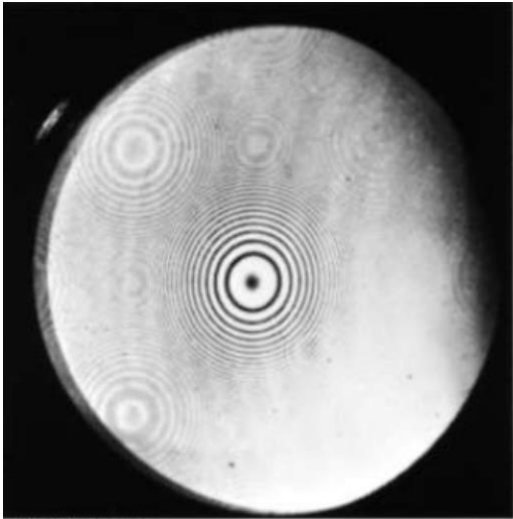
Interferencja

Soczewka - pierścienie Newtona



$$d = r^2/2R$$

$$r = \sqrt{\frac{m\lambda R}{n}}$$



Interferencja

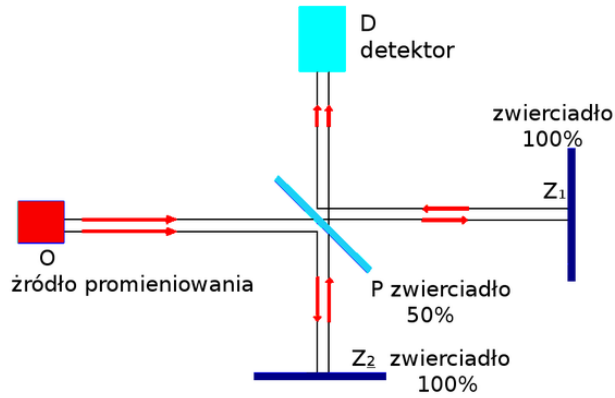
Warstwa antyrefleksyjna



$$d = \frac{\lambda}{4\sqrt{n}}$$

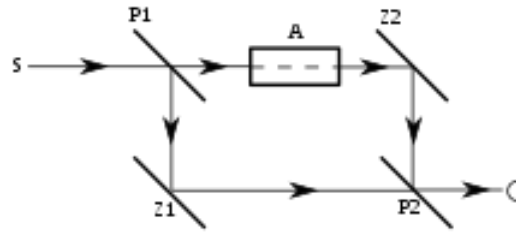
Interferometry

Michelsona

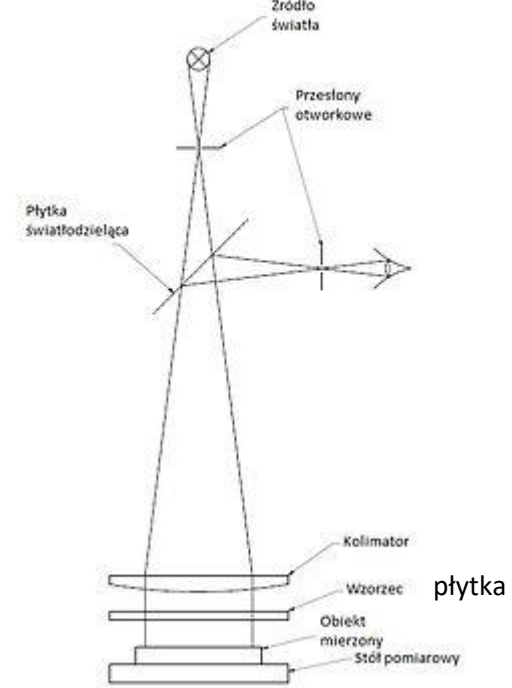


ilf.fizyka.pw.edu.pl/instrukcje/michelson/

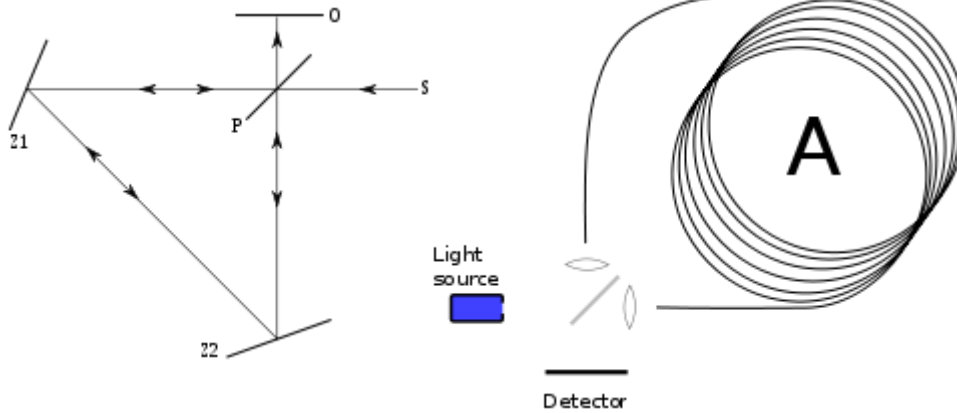
Macha-Zehndera



Fizeau

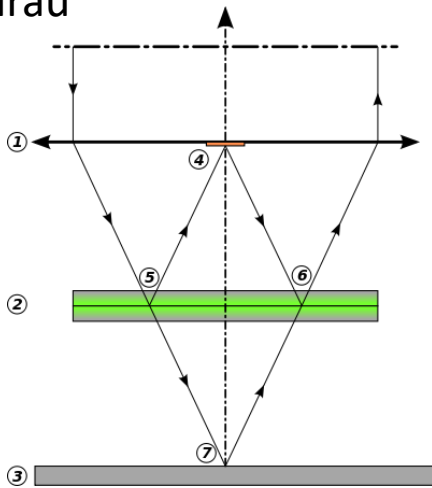


Sagnaca

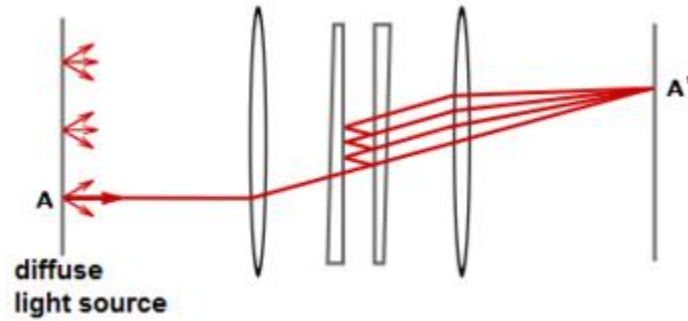


Interferometry

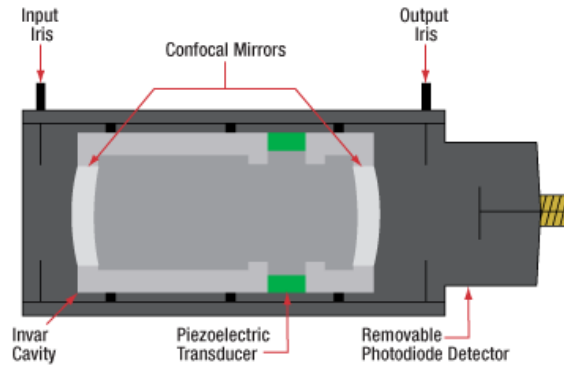
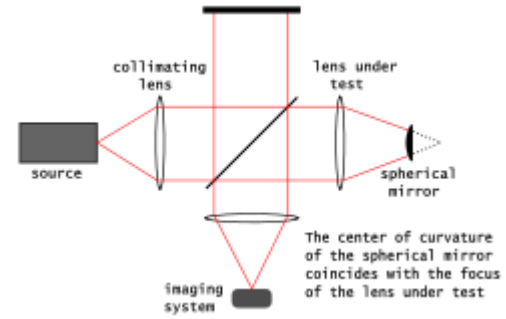
Mirau



Fabry-Perot

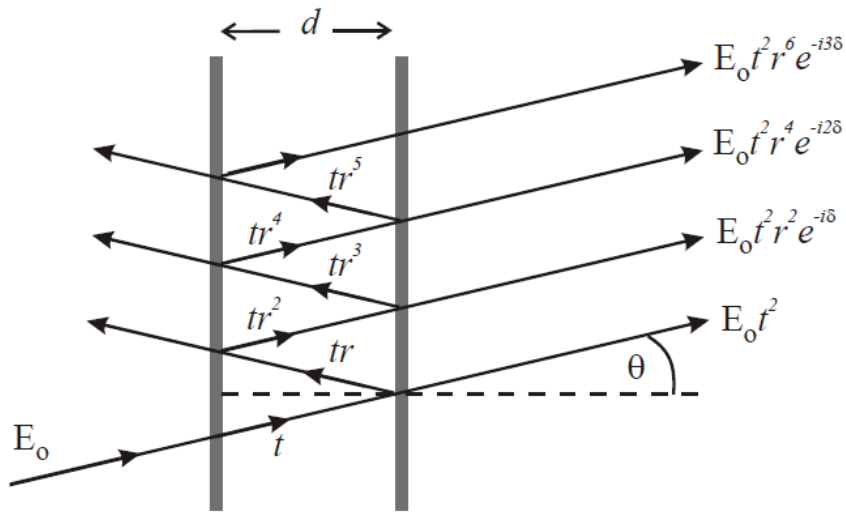


Twyman-Greena



www.thorlabs.com

Interferometr Fabry-Perot



Różnica faz:
$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} 2d \cos \theta$$

$$E_t = E_0 t_1 t_2 e^{-i\omega t} + E_0 t_1 t_2 r_1 r_2 e^{-i(\omega t - \delta)} + E_0 t_1 t_2 r_1^2 r_2^2 e^{-i(\omega t - 2\delta)} + \dots etc.$$

$$E_t = E_0 t_1 t_2 e^{i\omega t} \left[\frac{1}{1 - r_1 r_2 e^{i\delta}} \right]$$

$$I_t = E_t E_t^* = E_0^2 t_1^2 t_2^2 \left[\frac{1}{1 + r_1^2 r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \delta} \right]$$

Interferometr Fabry-Perot

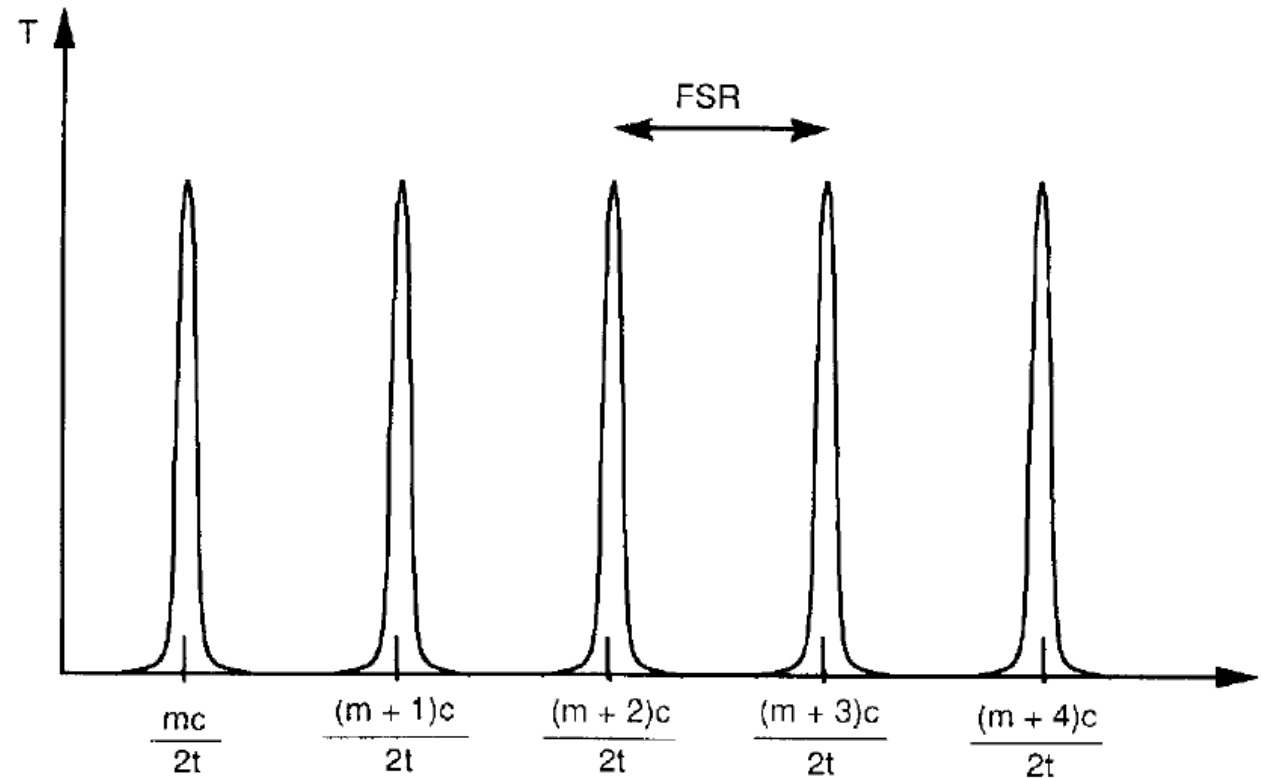
$$E_0^2 = I_0, \quad r_1 r_2 = R \quad \text{and} \quad t_1 t_2 = T, \quad \text{and} \quad \cos \delta = (1 - 2 \sin^2 \delta/2)$$

$$I_t = I_0 \frac{T^2}{(1-R)^2} \left[\frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \delta/2} \right]$$

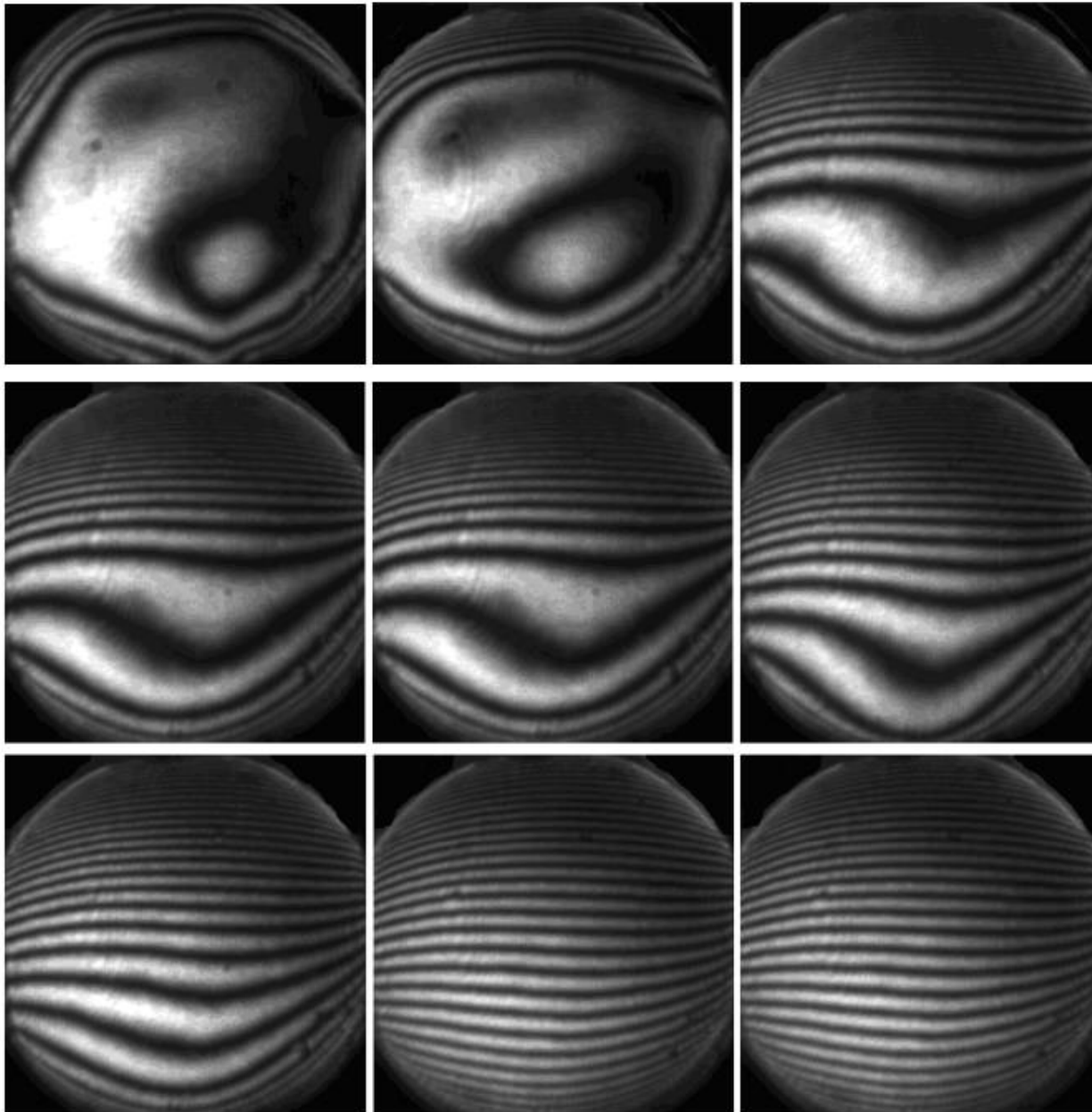
$$T = (1 - R)$$

$$\frac{4R}{(1-R)^2} = \Phi$$

$$I_t = I_0 \left[\frac{1}{1 + \Phi \sin^2 \delta/2} \right]$$



Analiza interferogramu

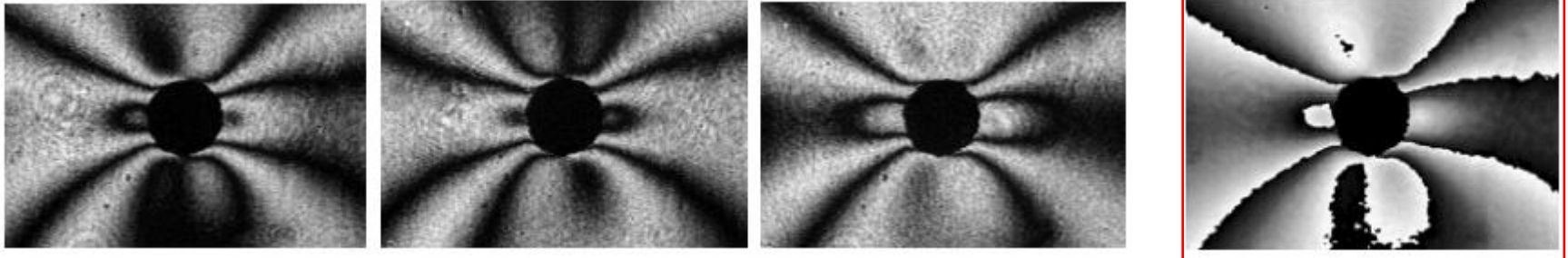


Analiza interferogramu

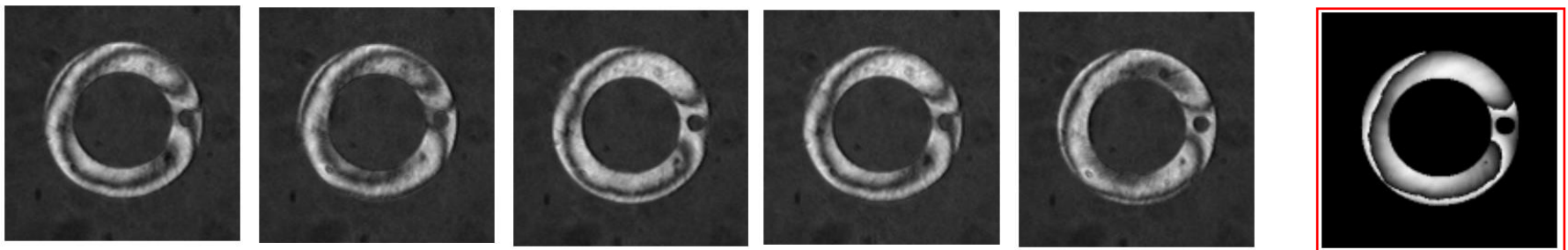
- Przesunięcie fazy

$$\alpha_i = \frac{i2\pi}{N} \quad \text{gdzie } i = 1, \dots, N$$

$$\Delta\alpha = \frac{2\pi}{3} \text{ [rad]} \quad \bar{\Phi} = \arctg \left[\sqrt{3} \frac{I_1 - I_3}{2I_2 - I_1 - I_3} \right] \quad \text{gdy} \quad \alpha_1 = \frac{2\pi}{3}; \quad \alpha_2 = 0; \quad \alpha_3 = \frac{2\pi}{3}$$



$$\bar{\Phi} = \arctan \left[\frac{2(I_2 - I_4)}{2I_3 - I_1 - I_5} \right], \quad \text{gdy} \quad \alpha_1 = -\pi; \quad \alpha_2 = -\frac{\pi}{2}; \quad \alpha_3 = 0; \quad \alpha_4 = \frac{\pi}{2}; \quad \alpha_5 = \pi$$

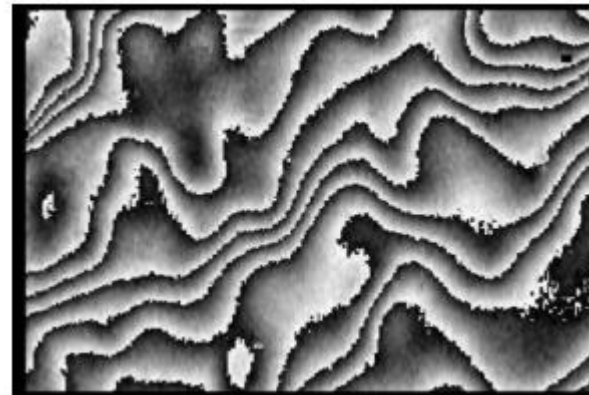
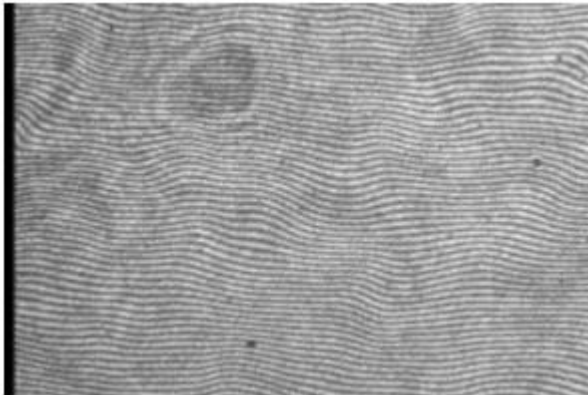


Analiza interferogramu

- Dodanie częstości nośnej $f_0 = \frac{M}{4}$ gdzie M jest rozdzielczością matrycy detektora

$$\phi(x, y) = \frac{\lambda}{2\pi} \arctan \left[\frac{\sqrt{4[I(x-1, y) - I(x+1, y)]^2 - [I(x-2, y) - I(x+2, y)]^2}}{2I(x, y) - I(x-2, y) - I(x+2, y)} \right]$$

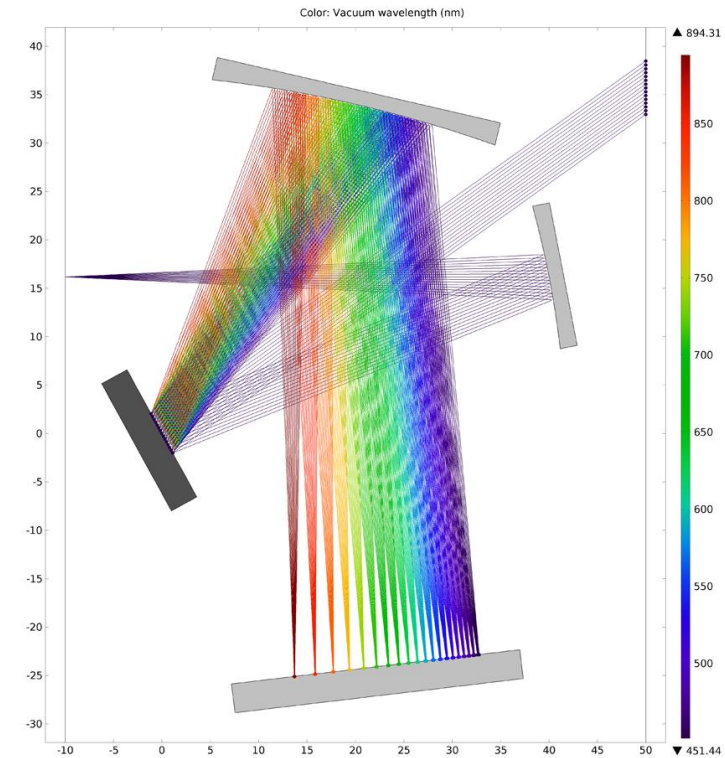
gdzie $I(x+i, y)$ jest natężeniem światła w pikselach $i=-2, -1, 0, +1, +2$



Spektroskopia

W klasycznym spektroskopie – siatka dyfrakcyjna

- Detektor – linijka
- Pojedynczy detektor
 - skanowanie po λ
 - Interferencja + analiza Fourierowska



www.comsol.de/ray-optics-module

Spektroskopia Fourierowska

FTIR (Fourier Transform Infrared Spectroscopy)

Interferencja fal o różnych częstościach jest inna, bowiem dla tej samej drogi x , różnica faz jest inna, czyli w $I(x)$ dla różnych długości fal zawarta jest informacja o WIDMIE.

$$I(x) = \int_0^{\infty} 2I(\tilde{\nu})R(\tilde{\nu})T(\tilde{\nu})(1 + \cos 2\pi\tilde{\nu}x) d\tilde{\nu}$$

$I(\tilde{\nu})$ - intensywność promieniowania o częstości $\tilde{\nu}$

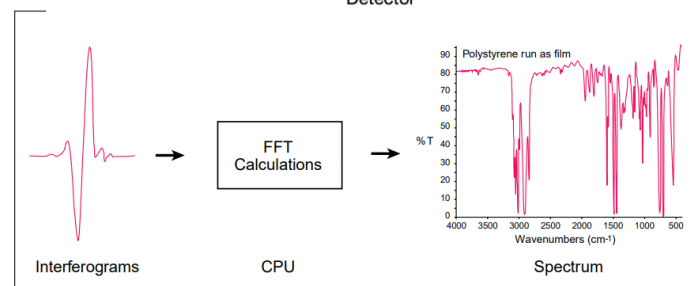
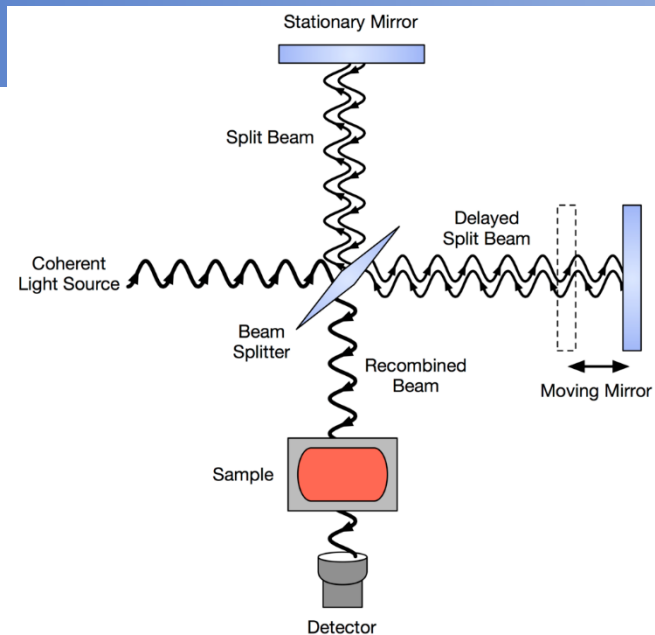
$R(\tilde{\nu})$ - współczynnik odbicia

$T(\tilde{\nu})$ - współczynnik transmisji

$$F(x) = \int_0^{\infty} 2I(\tilde{\nu})R(\tilde{\nu})T(\tilde{\nu})(1 + \cos 2\pi\tilde{\nu}x) d\tilde{\nu}$$

$$A(\tilde{\nu}) = 2I(\tilde{\nu})R(\tilde{\nu})T(\tilde{\nu})$$

$$A(\tilde{\nu}) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \cos 2\pi\tilde{\nu}x dx \quad \text{Transformata Fouriera}$$



$$T(\tilde{\nu}) = \frac{A_{pr}(\tilde{\nu})}{A_0(\tilde{\nu})} \quad \text{Widmo transmisyjne}$$

A_{pr} - FT interferogramów z próbką

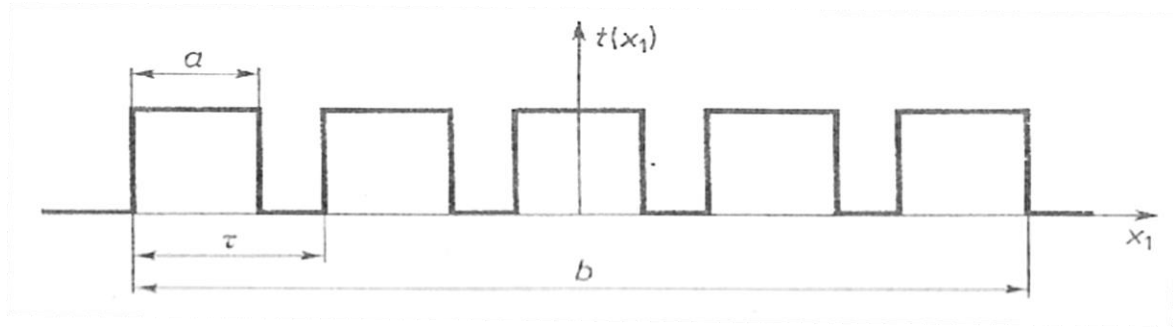
A_0 - FT bez próbki

Siatka dyfrakcyjna

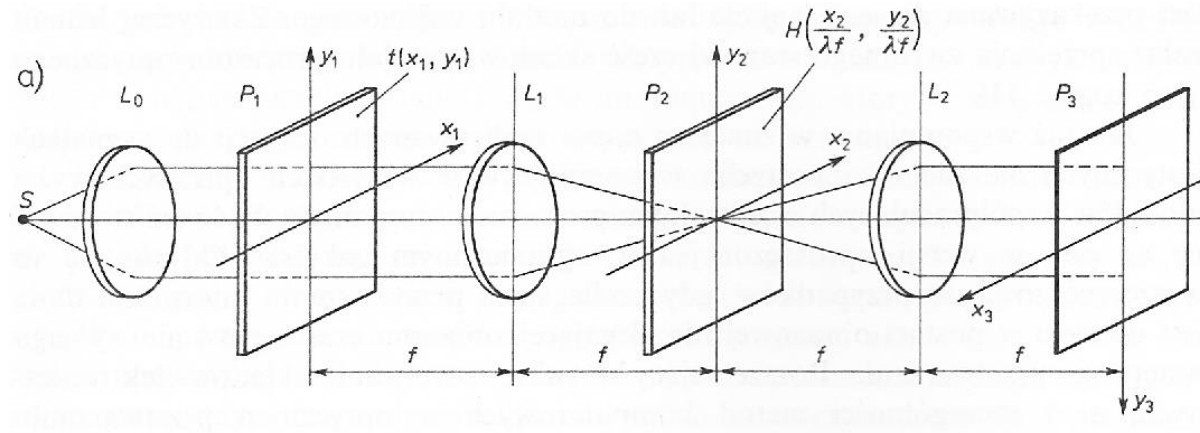
Rozważamy jak zmienia się obraz siatki dyfrakcyjnej po filtracji:

Siatka dyfrakcyjna:

$$t(x_1) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{x_1 - m\tau}{a}\right) \text{rect}\left(\frac{x_1}{b}\right)$$



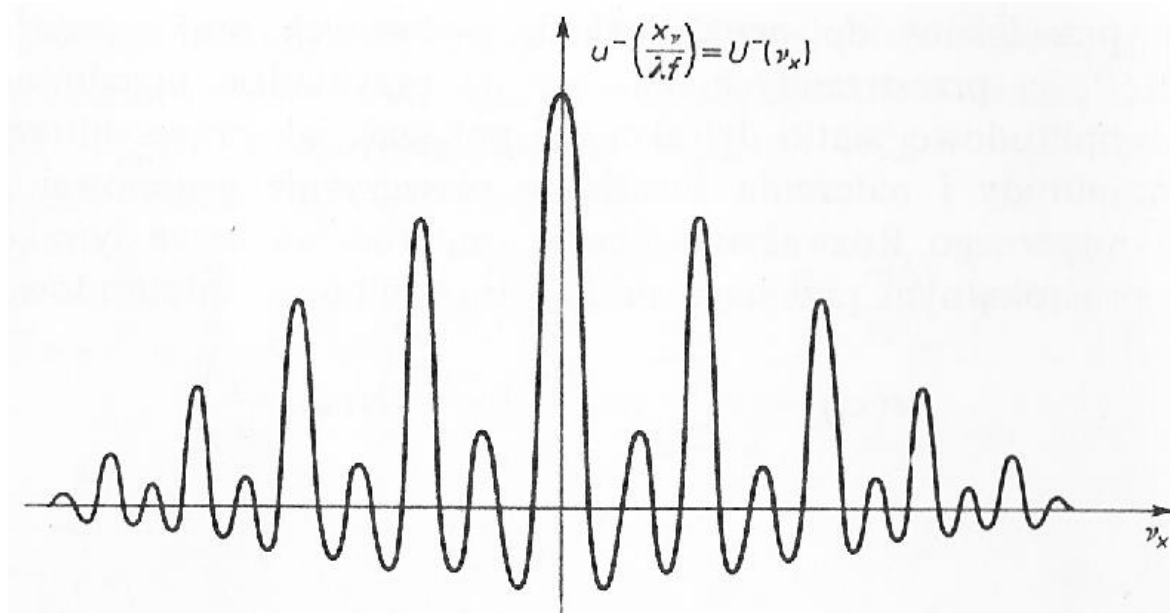
Układ do filtracji:



Siatka dyfrakcyjna

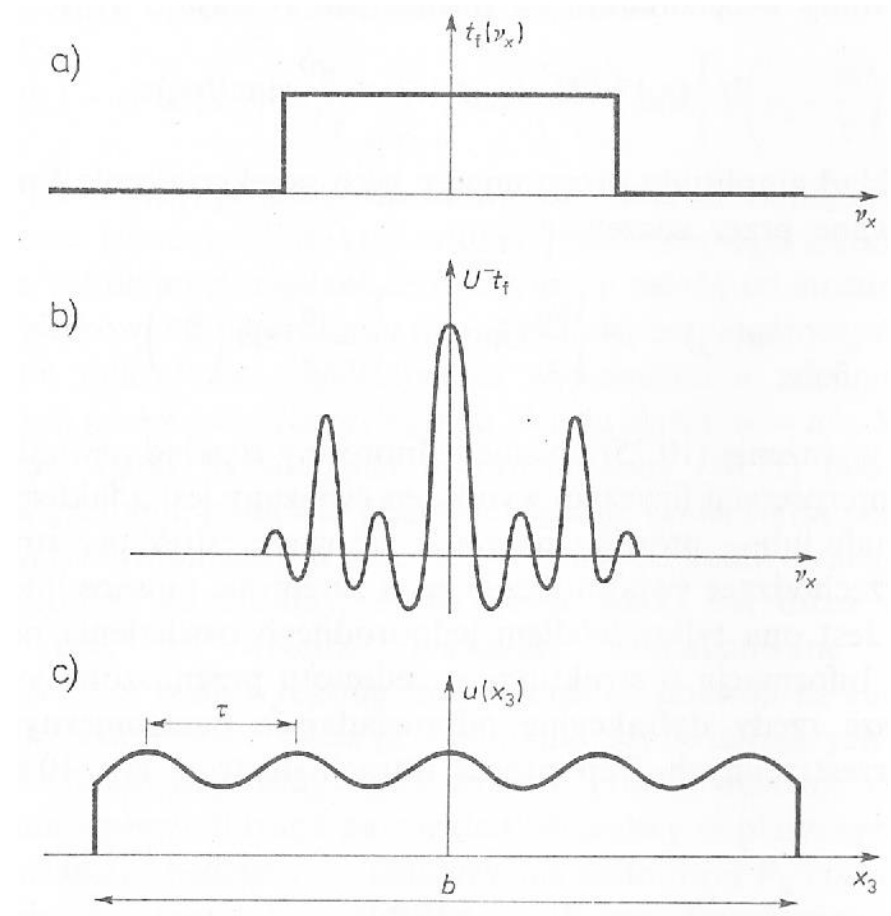
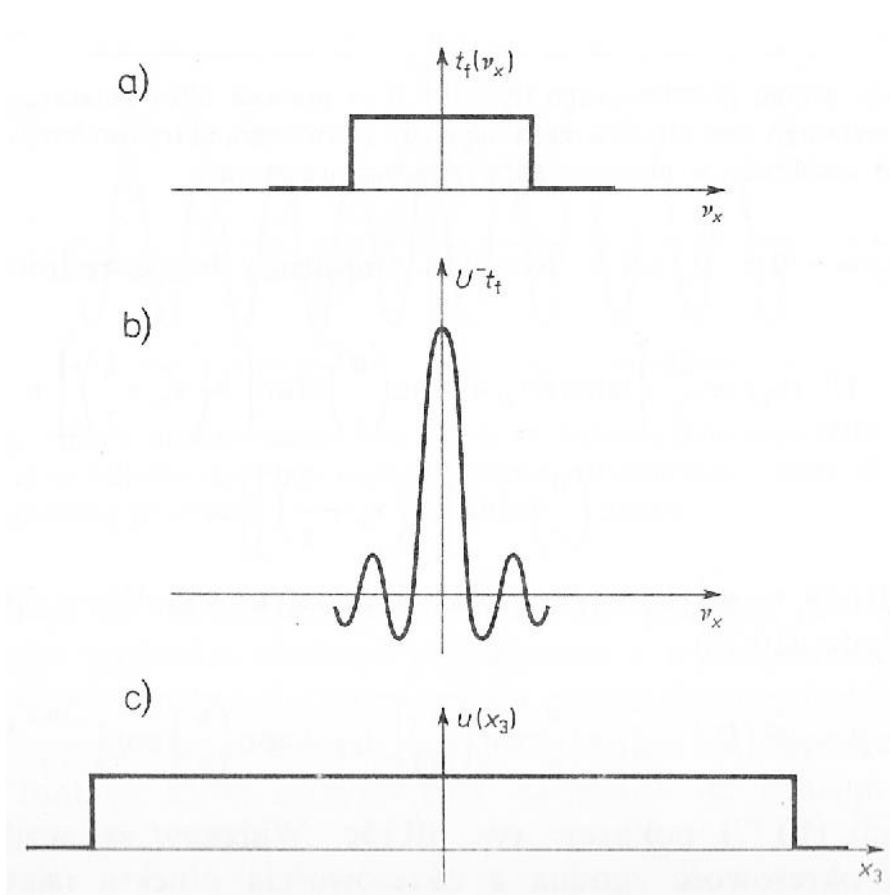
Sygnał w płaszczyźnie fourierowskiej:

$$U^-(v_x) \sim \mathcal{F}\{t(x_1)\} = \frac{ab}{\tau} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{am}{\tau}\right) \operatorname{sinc}\left[b\left(v_x - \frac{m}{\tau}\right)\right]$$



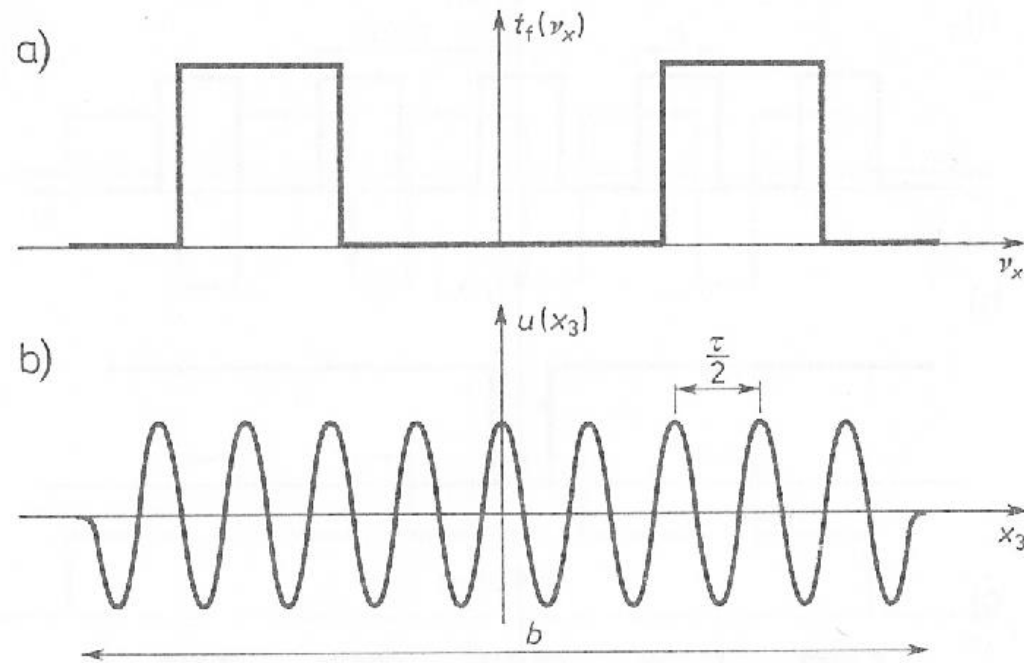
Siatka dyfrakcyjna

Filtracja dolnoprzepustowa:



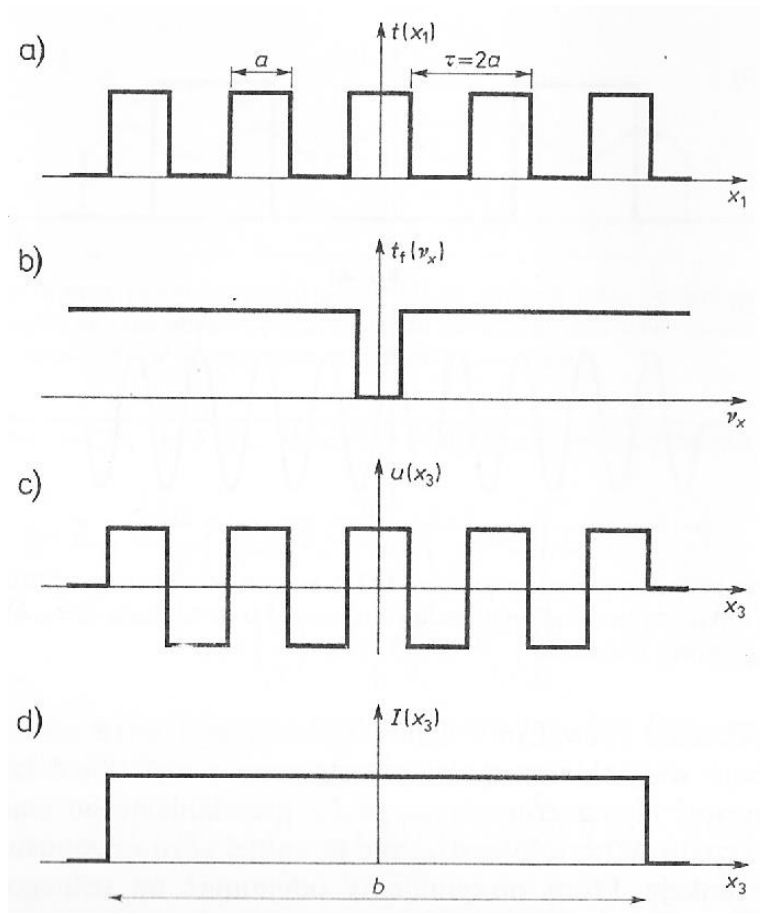
Siatka dyfrakcyjna

Filtracja środkowoprzepustowa:

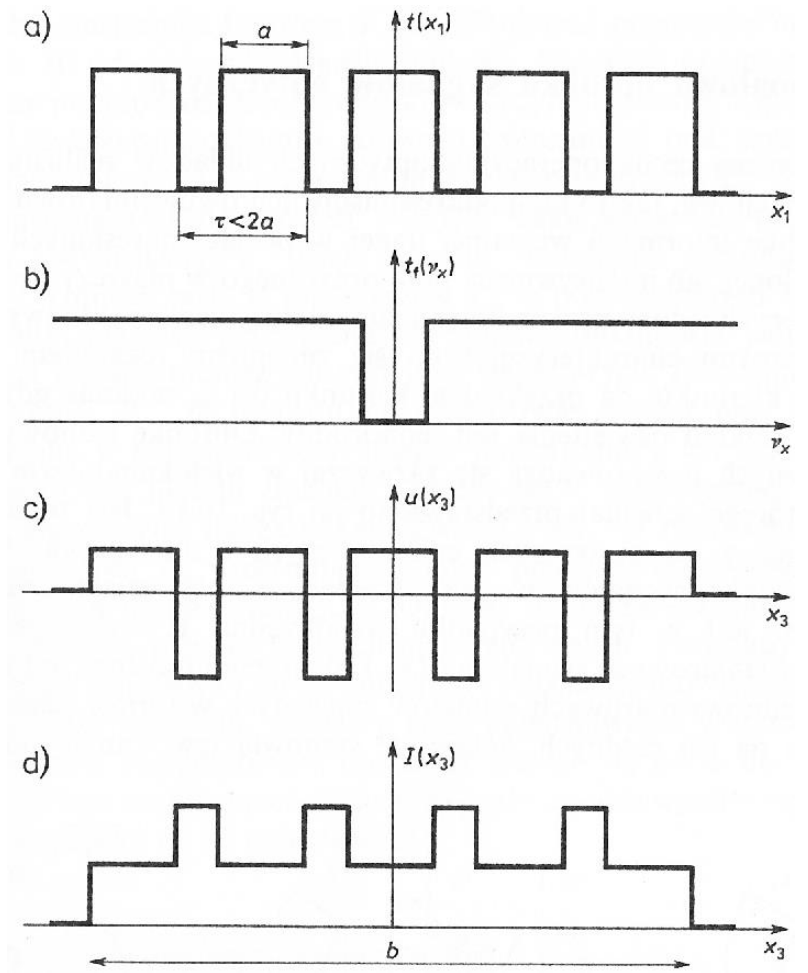


Siatka dyfrakcyjna

Filtracja górnoprzepustowa:

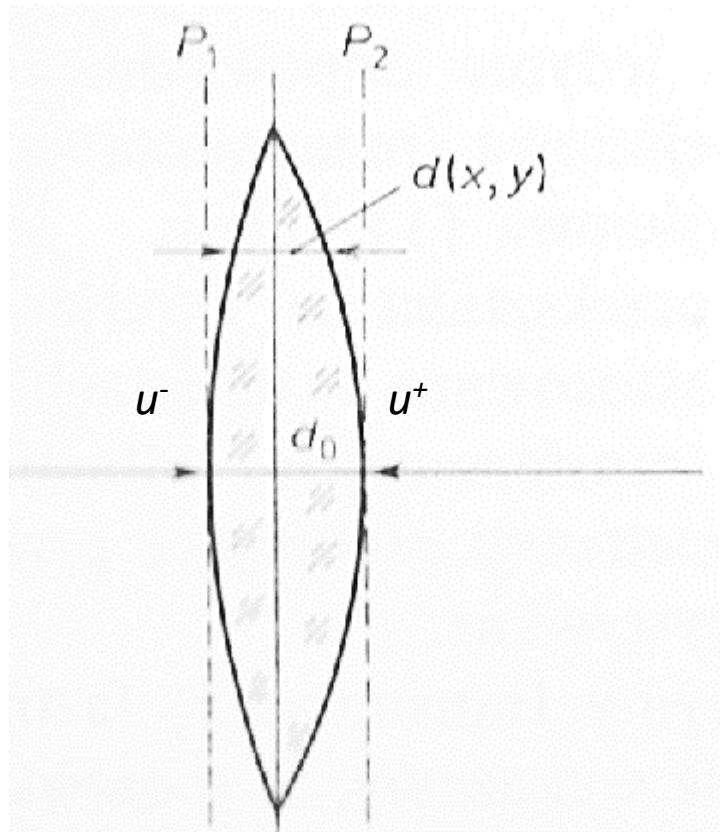


Jednorodne natężenie



odwrócenie kontrastu

Soczewka – przekształcenie fazy fali świetlnej



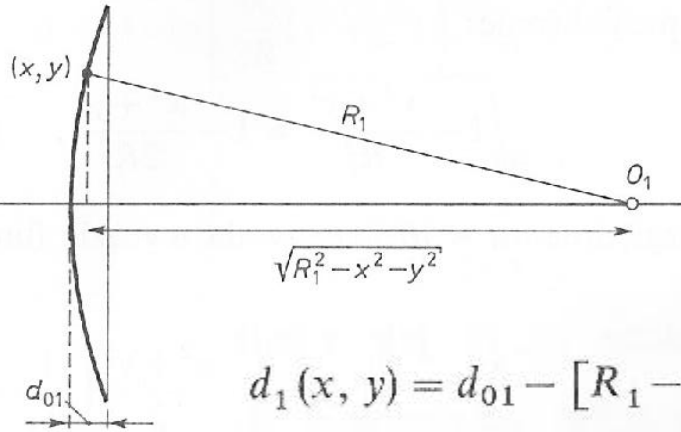
$$u^+(x, y) = \exp[i\varphi(x, y)] u^-(x, y)$$

$$\varphi(x, y) = knd(x, y) + k[d_0 - d(x, y)]$$

$$d(x, y) = d_1(x, y) + d_2(x, y),$$

Soczewka – przekształcenie fazy fali świetlnej

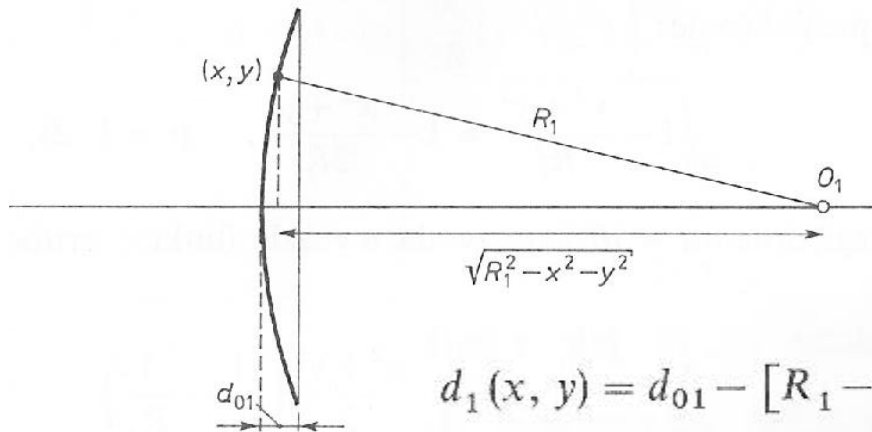
$$d(x, y) = d_1(x, y) + d_2(x, y),$$



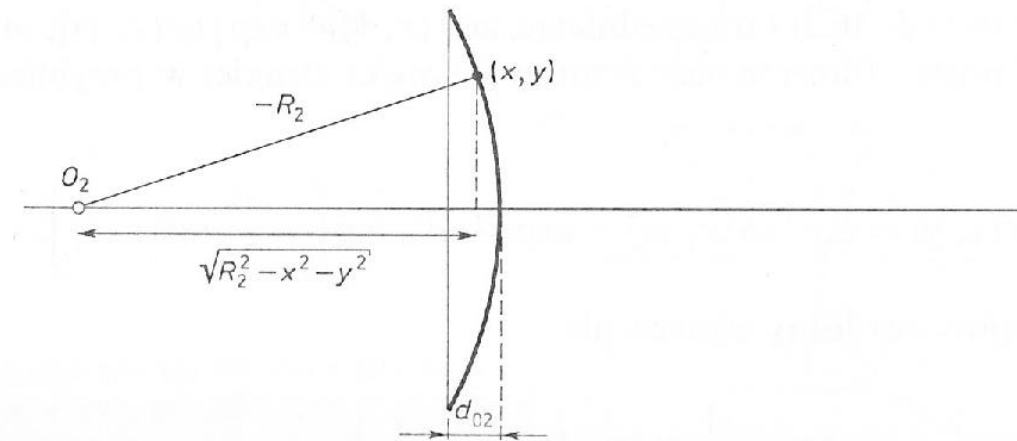
$$d_1(x, y) = d_{01} - [R_1 - \sqrt{R_1^2 - (x^2 + y^2)}] = d_{01} - R_1 \left[1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_1^2}} \right]$$

Soczewka – przekształcenie fazy fali świetlnej

$$d(x, y) = d_1(x, y) + d_2(x, y),$$



$$d_1(x, y) = d_{01} - [R_1 - \sqrt{R_1^2 - (x^2 + y^2)}] = d_{01} - R_1 \left[1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_1^2}} \right]$$



$$d_2(x, y) = d_{02} - [-R_2 - \sqrt{R_2^2 - (x^2 + y^2)}] = d_{02} + R_2 \left[1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_2^2}} \right]$$

Soczewka – przekształcenie fazy fali świetlnej

Dodajemy:

$$d(x, y) = d_0 - R_1 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_1^2}} \right) + R_2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_2^2}} \right).$$

Stosując przybliżenie przyosiowe:

$$\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_i^2}} \approx 1 - \frac{x^2 + y^2}{2R_i^2}, \quad (i = 1, 2),$$

Dostajemy:

$$d(x, y) = d_0 - \frac{x^2 + y^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Soczewka zmienia fazę fali świetlnej: $t(x, y) = \exp [i\varphi(x, y)],$

$$t(x, y) = \exp [i\varphi(x, y)] = \exp (iknd_0) \exp \left[-\frac{ik}{2f} (x^2 + y^2) \right]$$

gdzie: $\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$

Soczewka – przekształcenie fazy fali świetlnej

Rozważmy falę płaską padającą prostopadle na soczewkę o ogniskowej f :

$$u^+(x, y) = A \exp(iknd_0) \exp\left[-\frac{ik}{2f}(x^2 + y^2)\right],$$

A – amplituda padającej fali (przedmiot)

Stałe przesunięcie fazy

Fala sferyczna

Soczewka – przekształcenie fazy fali świetlnej

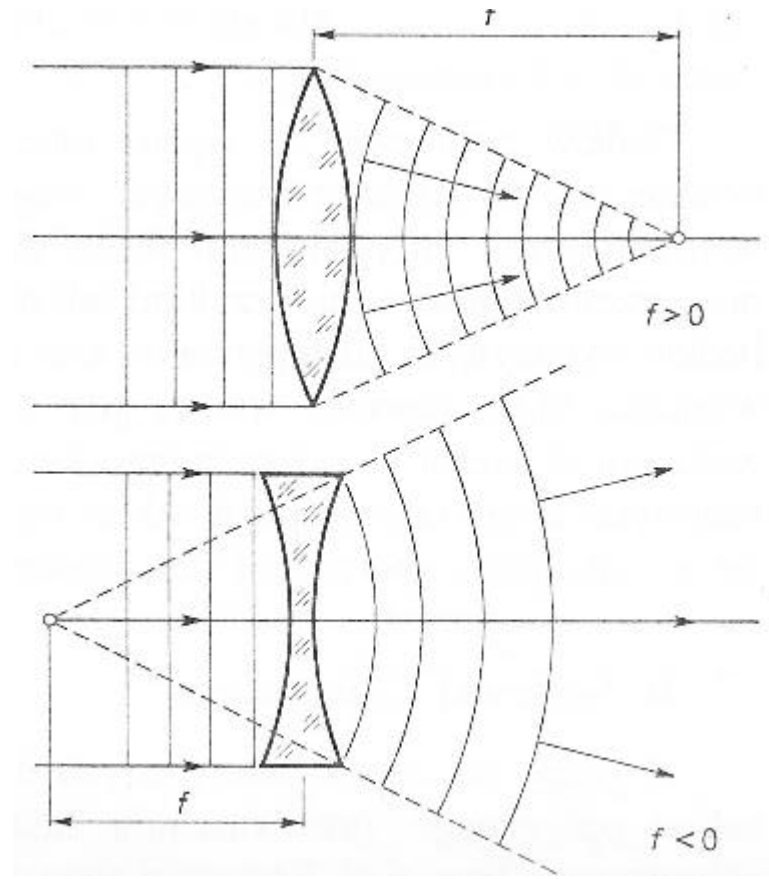
Rozważmy falę płaską padającą prostopadłe na soczewkę o ogniskowej f :

$$u^+(x, y) = A \exp(iknd_0) \exp\left[-\frac{ik}{2f}(x^2 + y^2)\right],$$

A – amplituda padającej fali (przedmiot)

Stałe przesunięcie fazy

Fala sferyczna



Soczewka – przekształcenie fazy fali świetlnej

Jeśli oświetlimy soczewkę falą sferyczną:

$$u^-(x, y) = A \exp \left[\frac{ik}{2R} (x^2 + y^2) \right],$$

R – promień krzywizny powierzchni falowej.

$$\frac{1}{R_+} = \frac{1}{R_-} - \frac{1}{f}$$

R_-, R_+ – promień krzywizny przed i za soczewką.

Dla $R_- = f$ dostajemy $R_+ = \infty$

Gdy uwzględnimy aperturę soczewki i pominiemy stałą fazę:

$$t(x, y) = P(x, y) \exp \left[-\frac{ik}{2f} (x^2 + y^2) \right]$$