

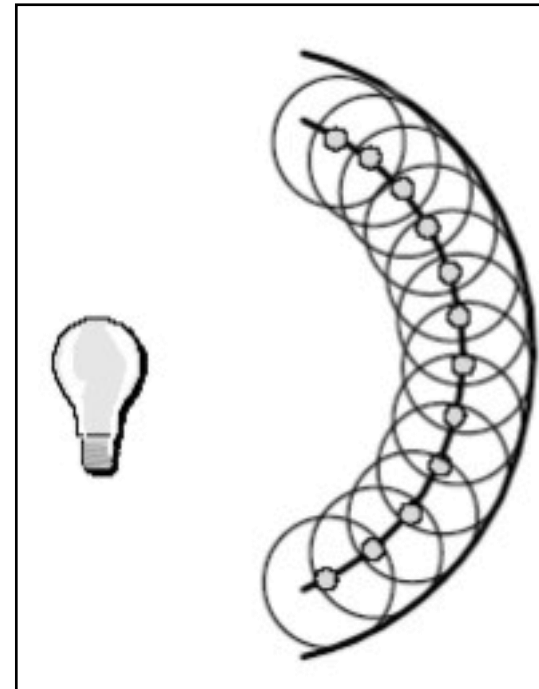
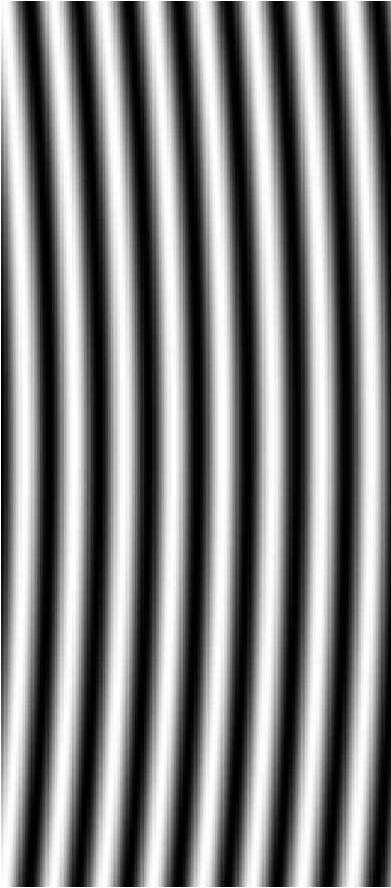
1100-4BW12, rok akademicki 2021/22

WSTĘP DO OPTYKI FOURIEROWSKIEJ

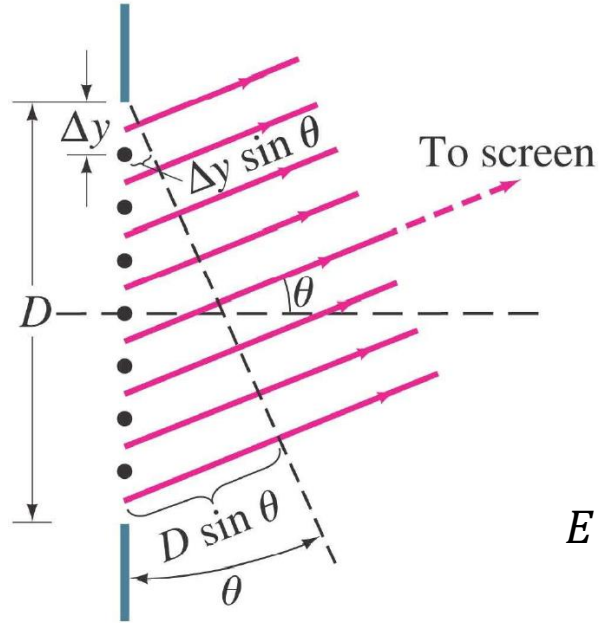
dr hab. Rafał Kasztelanic

Interferencja – pojedyncza szczelina

Propagację fali elektromagnetycznej za przeszkodą możemy sobie wyobrazić za Huygensem jako falę pochodzącą ze zbioru punktowych źródeł światła umieszczonych w płaszczyźnie przesłony.



Interferencja – pojedyncza szczelina



- Wszystkie oscylatory w fazie (fala płaska)
- Równe amplitudy w punkcie obserwacji (daleko ekran)

Interferencja N fal

$$E = \frac{E_0(r)}{N} e^{i(kr_1 - \omega t)} + \frac{E_0(r)}{N} e^{i(kr_2 - \omega t)} + \dots + \frac{E_0(r)}{N} e^{i(kr_N - \omega t)}$$

$$E = \frac{E_0(r)}{N} e^{-i\omega t} e^{ikr_1} [1 + e^{ik(r_2 - r_1)} + e^{ik(r_3 - r_1)} + \dots + e^{ik(r_N - r_1)}]$$

$$\beta = k D \sin\theta = \frac{2\pi}{\lambda} D \sin\theta$$

$$\Delta\beta = k \Delta y \sin\theta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta y \sin\theta$$

$$\Delta\beta = k(r_2 - r_1), 2\Delta\beta = k(r_3 - r_1), \dots, N\Delta\beta = k(r_N - r_1)$$

$$E = \frac{E_0(r)}{N} e^{-i\omega t} e^{ikr_1} \underbrace{[1 + (e^{i\Delta\beta}) + (e^{i2\Delta\beta}) + \dots + (e^{iN\Delta\beta})]}_{\text{szereg geometryczny}}$$

$$\frac{e^{i\Delta\beta N} - 1}{e^{i\Delta\beta} - 1}$$

Interferencja – pojedyncza szczelina

$$\frac{e^{i\Delta\beta N} - 1}{e^{i\Delta\beta} - 1} = \frac{e^{iN\Delta\beta/2} [e^{iN\Delta\beta/2} - e^{-iN\Delta\beta/2}]}{e^{i\Delta\beta/2} [e^{i\Delta\beta/2} - e^{-i\Delta\beta/2}]} = e^{i(N-1)\Delta\beta/2} \frac{\sin(N\Delta\beta/2)}{\sin(\Delta\beta/2)}$$

$$E = \frac{E_0(r)}{N} e^{-i\omega t} e^{ikr_1} e^{i(N-1)\Delta\beta/2} \frac{\sin(N\Delta\beta/2)}{\sin(\Delta\beta/2)}$$

$$I = |E|^2 = \frac{I_0}{N^2} \frac{\sin^2(N\Delta\beta/2)}{\sin^2(\Delta\beta/2)}$$

Interferencja

Interferencja – pojedyncza szczelina

$$\frac{e^{i\Delta\beta N} - 1}{e^{i\Delta\beta} - 1} = \frac{e^{iN\Delta\beta/2} [e^{iN\Delta\beta/2} - e^{-iN\Delta\beta/2}]}{e^{i\Delta\beta/2} [e^{i\Delta\beta/2} - e^{-i\Delta\beta/2}]} = e^{i(N-1)\Delta\beta/2} \frac{\sin(N\Delta\beta/2)}{\sin(\Delta\beta/2)}$$

$$E = \frac{E_0(r)}{N} e^{-i\omega t} e^{ikr_1} e^{i(N-1)\Delta\beta/2} \frac{\sin(N\Delta\beta/2)}{\sin(\Delta\beta/2)}$$

$$I = |E|^2 = \frac{I_0}{N^2} \frac{\sin^2(N\Delta\beta/2)}{\sin^2(\Delta\beta/2)}$$

Interferencja

$$N \rightarrow \infty, \quad \Delta y \rightarrow 0$$

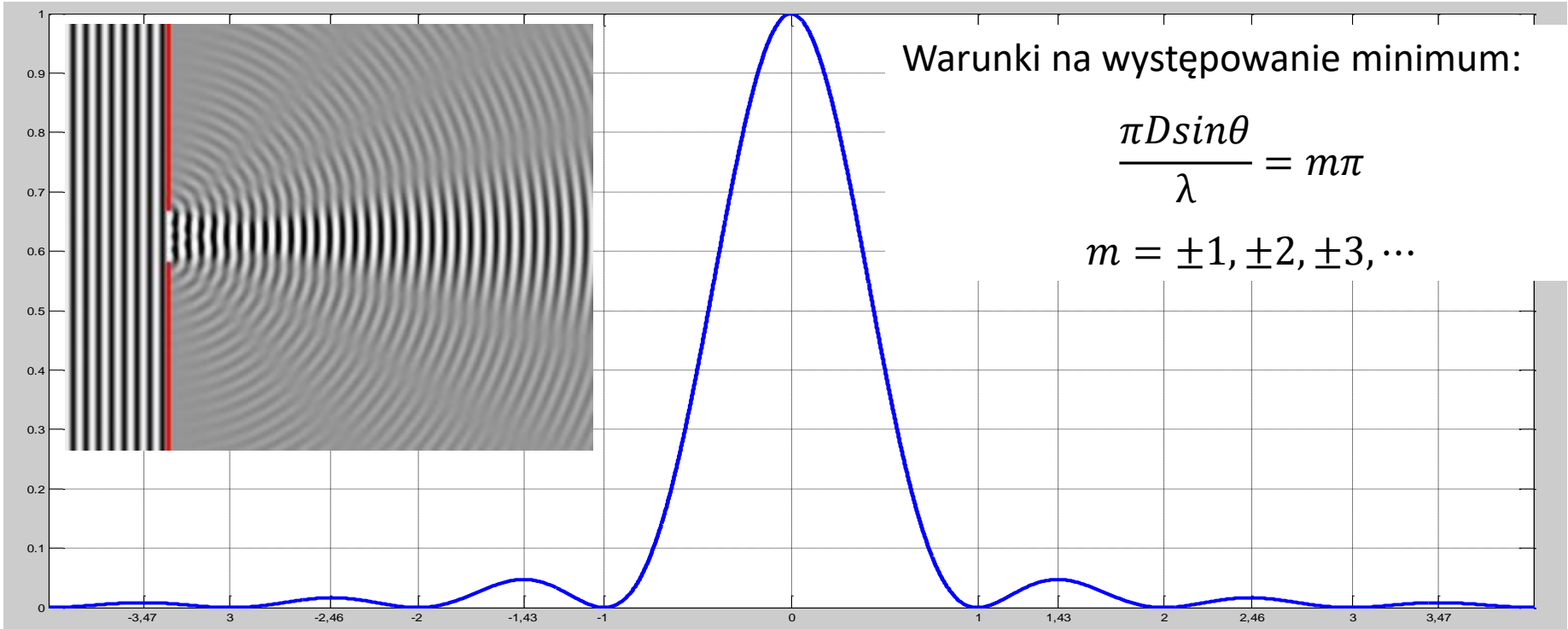
$$\Delta\beta \sim \Delta y \Rightarrow \sin^2(\Delta\beta/2) \approx \Delta\beta/2$$

$$I = I_0 \frac{\sin^2(N\Delta\beta/2)}{(N\Delta\beta/2)^2} = I_0 \left(\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right)^2$$

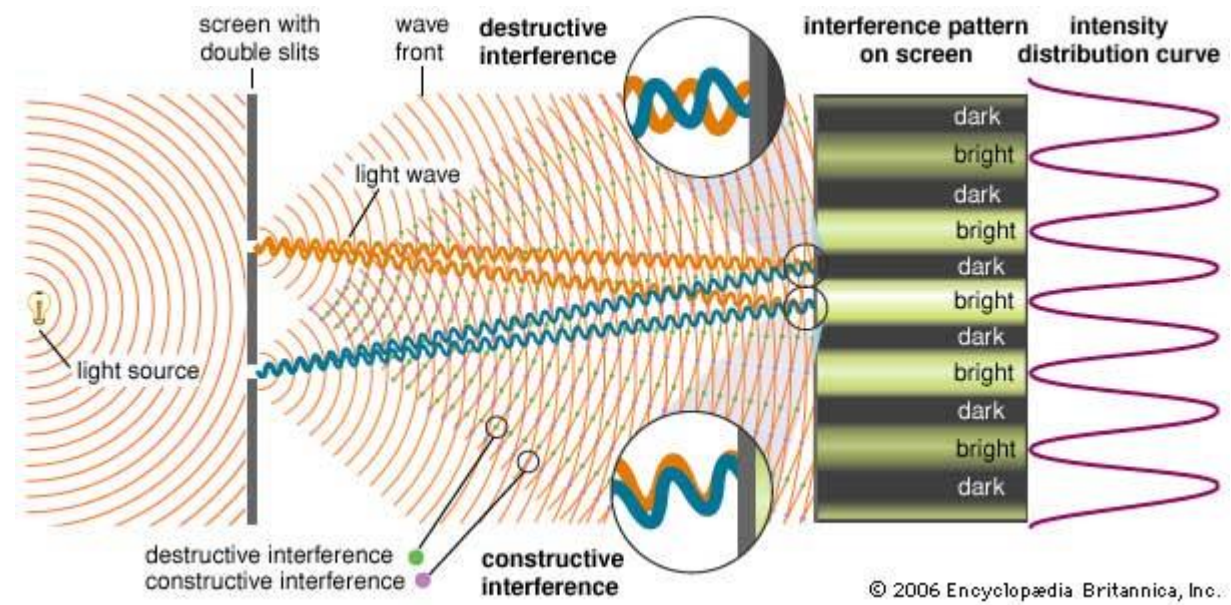
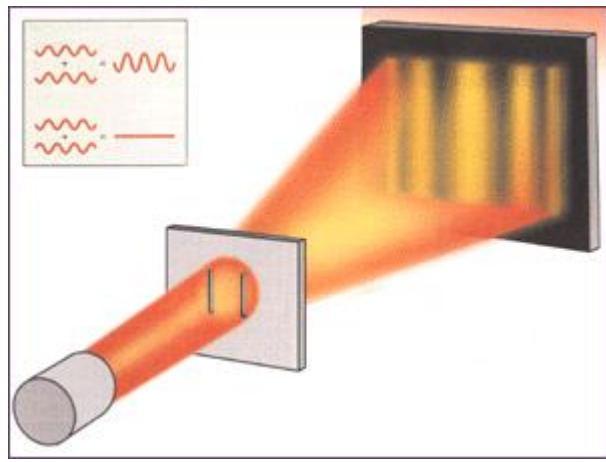
Dyfrakcja

Interferencja – pojedyncza szczelina

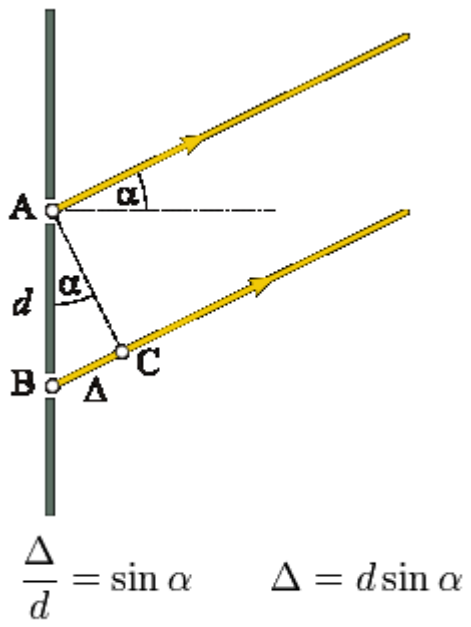
$$I = I_0 \left(\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right)^2$$



Interferencja – 2 szczeliny (doświadczenie Younga)



© 2006 Encyclopædia Britannica, Inc.



maksimum: $d \sin \alpha_k = k\lambda \quad k \in \mathbb{Z}, k \in \left(-\frac{d}{\lambda}, \frac{d}{\lambda}\right)$

minimum: $d \sin \alpha_k = \left(\frac{2k+1}{2}\right)\lambda \quad k \in \mathbb{Z}, k \in \left(-\frac{2d-\lambda}{2\lambda}, \frac{2d-\lambda}{2\lambda}\right)$

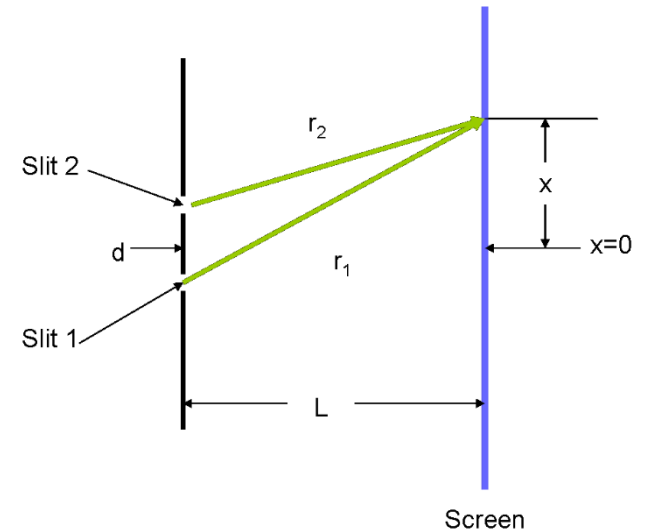
Interferencja – 2 szczeliny (doświadczenie Younga)

$$\begin{array}{l} E_1 = Ae^{i(kr_1 - \omega t)} \\ E_2 = Ae^{i(kr_2 - \omega t)} \end{array} \longrightarrow \boxed{\text{Interferencja}} \longrightarrow E = E_1 + E_2$$

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 = Ae^{i(kr_1 - \omega t)} + Ae^{i(kr_2 - \omega t)} = Ae^{i(kr_1 - \omega t)}(1 + e^{ik\Delta r}) = \\ &= Ae^{i(kr_1 - \omega t)}e^{ik\Delta r/2}(e^{ik\Delta r/2} + e^{-ik\Delta r/2}) = Ae^{i(kr_1 - \omega t)}e^{ik\Delta r/2}2\cos(k\Delta r/2) \end{aligned}$$

gdzie: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$\Delta r = r_2 - r_1 = d\sin\theta$$



Interferencja – 2 szczeliny (doświadczenie Younga)

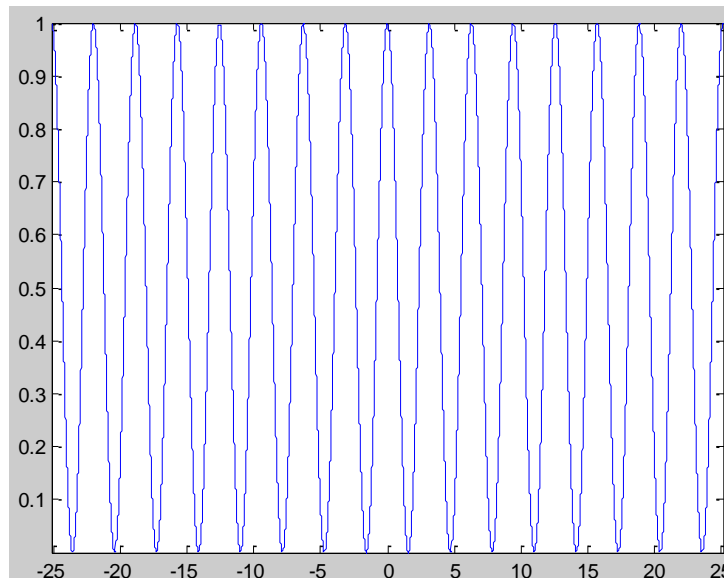
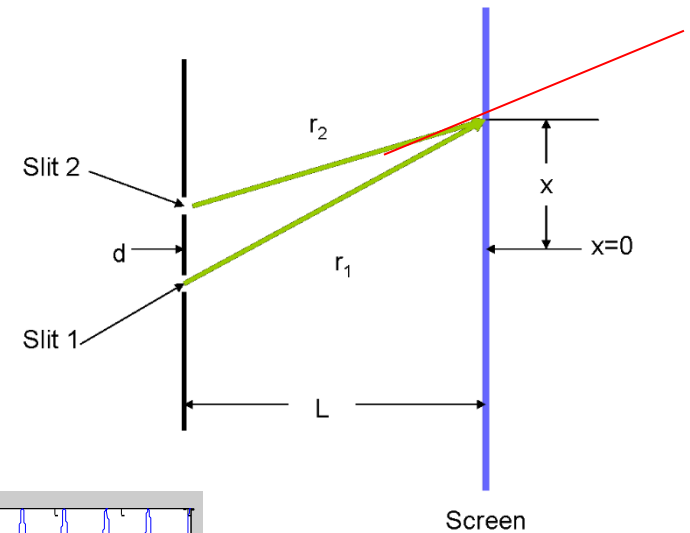
Odległość od punktu środkowego między szczelinami do danego punktu na ekranie:

$$r = r_1 + \Delta r/2$$

$$E(r, \theta) = Ae^{i(kr - \omega t)} 2\cos(\pi d \sin\theta / \lambda)$$

$$I(\theta) = 4I_0 \cos^2(\pi d \sin\theta / \lambda)$$

↑
natężenie jednej z fal



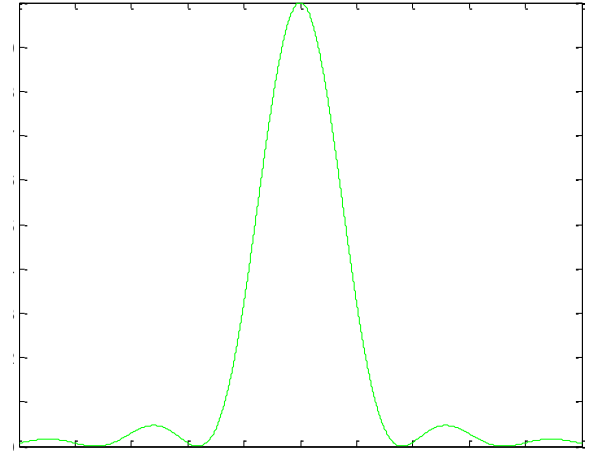
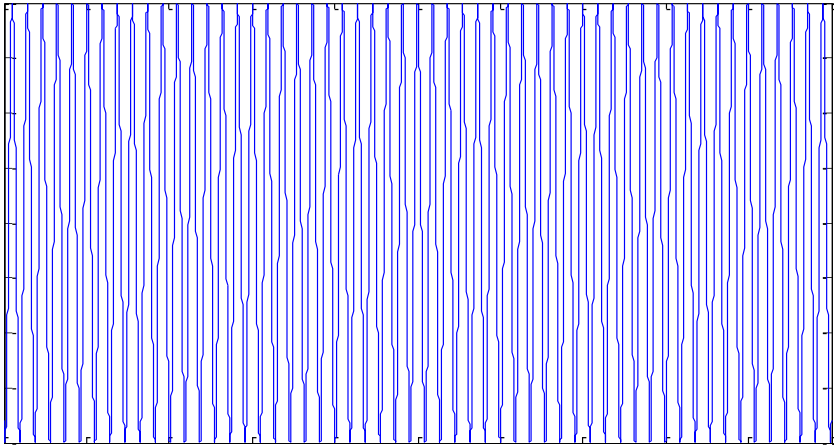
Interferencja – 2 szczeliny (doświadczenie Younga)

Trzeba jeszcze uwzględnić dyfrakcje na pojedynczej szczelinie:

$I = \text{Interferencja} \cdot \text{dyfrakcja}$

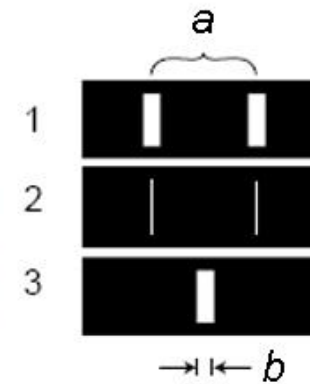
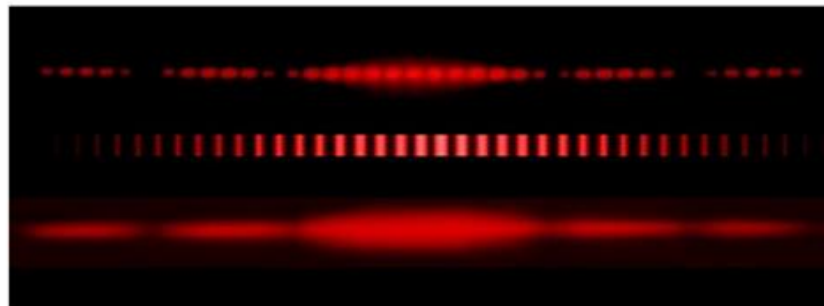
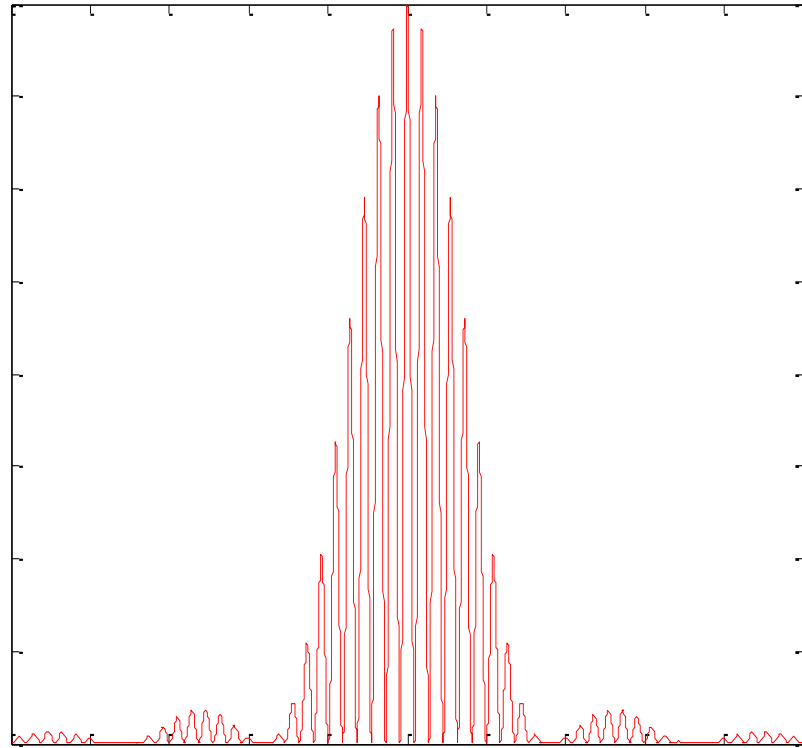
$$I(\theta) = 4I_0 \cos^2(\pi d \sin\theta / \lambda)$$

$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right)^2$$

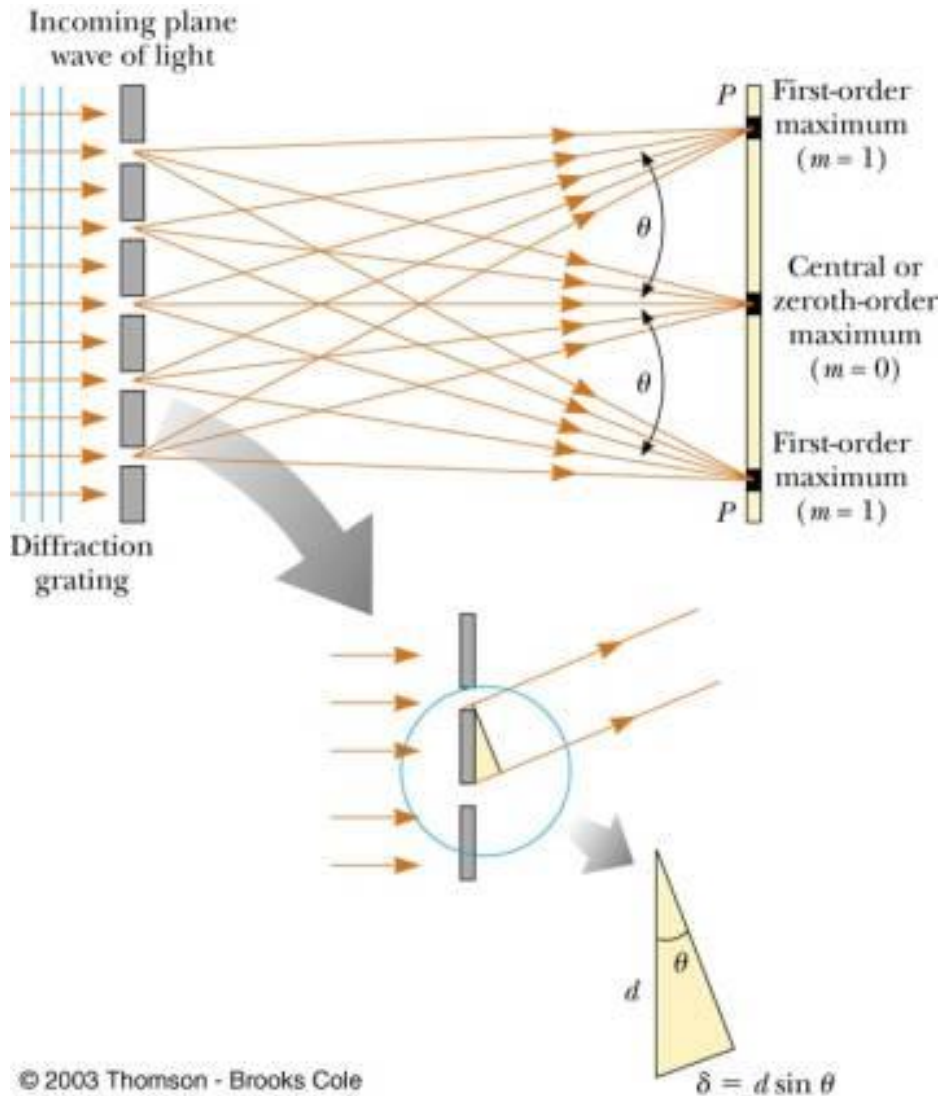


$$I(\theta) = 4I_0 \cos^2(\pi d \sin\theta / \lambda) \left(\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right)^2$$

Interferencja – 2 szczeliny (doświadczenie Younga)



Interferencja – siatka dyfrakcyjna



Wzór siatki dyfrakcyjnej:

$$d \sin(\theta_k) = k \lambda$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

d – stała siatki

k – rząd ugięcia, numer wzmocnienia

Ponieważ zachodzi:

$$-\frac{\pi}{2} < \theta_k < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -1 < \theta_k < 1$$

czyli:

$$\frac{k \lambda}{d} < 1 \Rightarrow k_{\max} = \left[\frac{d}{\theta} \right]$$

Interferencja – siatka dyfrakcyjna

Jak policzyć natężenie na ekranie.

Podobnie jak dla 2 szczelin:

$$I = \underbrace{\text{INTERFERENCJA}} \cdot \underbrace{\text{DYFRAKCJA}}$$

na N szczelinach (punktowych)

na pojedynczej szczelinie

$$\frac{I_0 \sin^2(N\Delta\beta/2)}{N^2 \sin^2(\Delta\beta/2)}$$

$$I_0 \left(\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right)^2$$

Było liczone dla
pojedynczej szczeliny

$$I(\theta) = \left[\frac{\sin(\pi ND \sin\theta / \lambda)}{N \sin(\pi D \sin\theta / \lambda)} \right]^2 \left[\frac{\sin(\pi d \sin\theta / \lambda)}{\pi d \sin\theta / \lambda} \right]^2$$

PropagujacaWiazka.m

DwaZrodla.m

Szczelina.m

Cw6_3.m – siatki dyfr

Cw6_2.m – siatka o różnych szczelinach