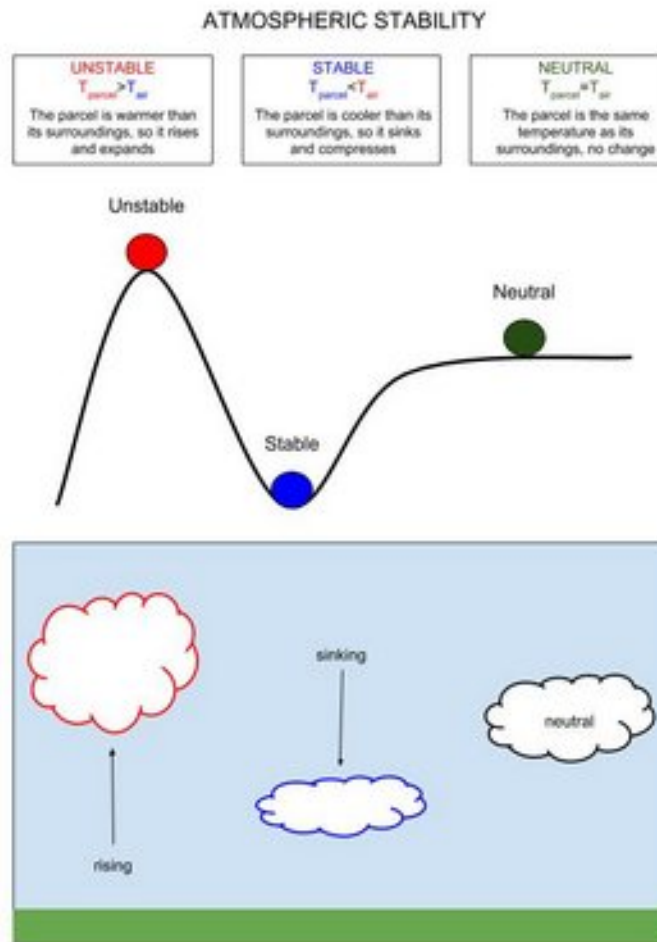




Fizyka Pogody i Klimatu

Stabilność hydrostatyczna atmosfery

Szymon, Malinowski, Krzysztof Markowicz, Hanna Pawłowska
Instytut Geofizyki
Uniwersytet Warszawski

- Rozpatrujemy pionowe przesunięcia płynu, który jest w równowadze hydrostatycznej
- Częstka powietrza poruszająca się pionowo w płynie jest poddawana sprężaniu lub rozprężaniu adiabatycznemu; zatem jej temperatura ulega zmianie
- Ruch pionowy cząstki powoduje, że może się stać cieplejsza lub chłodniejsza od otoczenia.
- Działa na nią siła Archimiedesa (wyporu)
- Jeśli siła wyporu jest zgodna z kierunkiem ruchu - płyn niestabilny,
- Siła wyporu przeciwnie skierowana do kierunku ruchu – płyn stabilny,
- Brak siły wyporu - równowaga neutralna

Rozważmy małą masę, lub cząstkę, która będzie się poruszała w nieruchomym płynie będącym w równowadze hydrostatycznej

Następujące założenia stosowane są w metodzie cząstki:

- Cząstka zachowuje swoją integralność; nie miesza się z otoczeniem
- Ruch cząstki nie zaburza otoczenia, w którym się ruch odbywa
- Ciśnienie w cząstce dostosowuje się natychmiast do ciśnienia zewnętrznego
- Cząstka porusza się w sposób izentropowy (przemiana adiabatyczna); jej temperatura potencjalna pozostaje stała

Statyczna stabilność atmosfery jest ważna w wyjaśnianiu i przewidywaniu:

- Konwekcji cumulusowej oraz groźnych burz
- Opadu
- Turbulencji w warstwie granicznej
- Dynamiki atmosfery w dużej skali

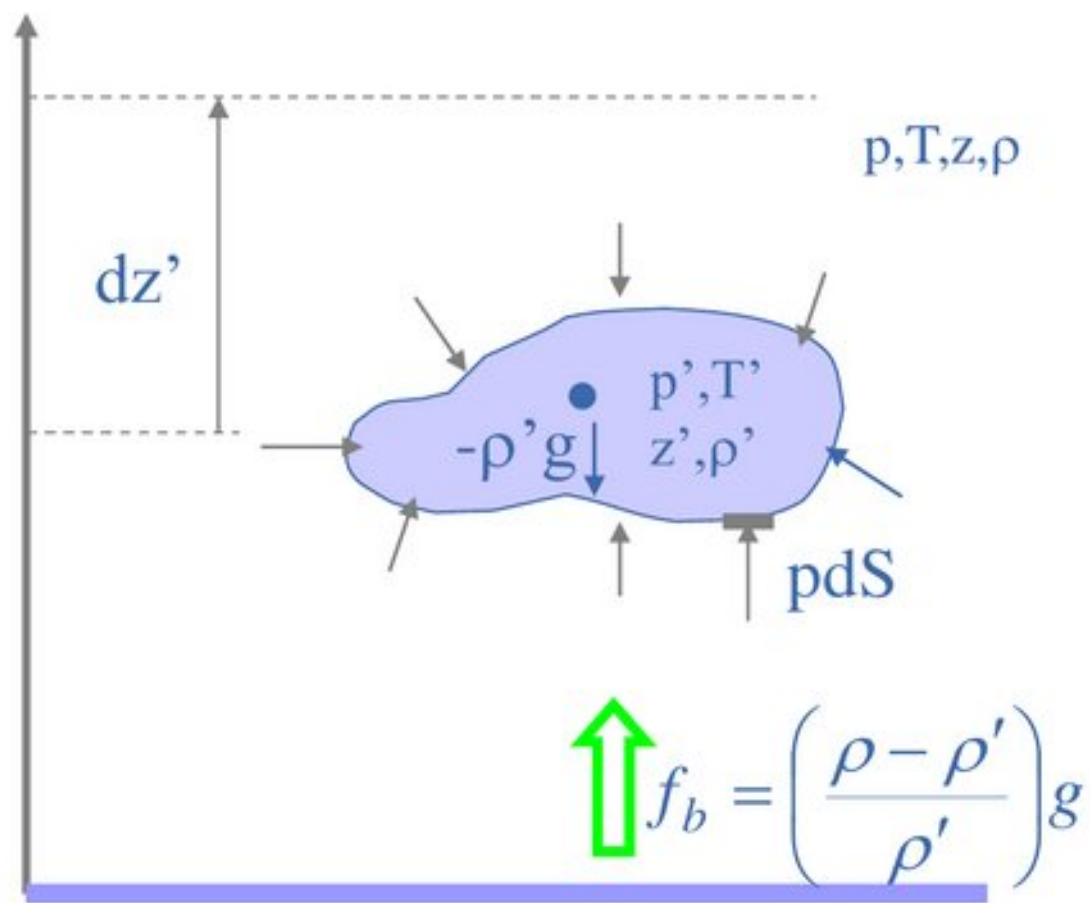
Wielkości nieprimowane będą opisywały stan otoczenia;
wielkości primowane opisują stan cząstki

Płyn w otoczeniu znajduje się w stanie równowagi hydrostatycznej,
zatem siła gradientu ciśnienia jest równoważona przez siłę
grawitacji:

$$0 = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$$

-
-
- Rozważmy małe wychylenie cząstki w takim płynie. Z drugiej zasady dynamiki Newtona wynika, że przyspieszenie cząstki musi być równe sumie siły grawitacji i siły gradientu ciśnienia

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -g - \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial z}$$



$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -g - \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial z}$$

$$0 = g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$p = p'$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{\rho - \rho'}{\rho'} g$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \left(\frac{\rho - \rho'}{\rho'} \right) g = f_b$$

f_b - siła wyporu (*buoyancy force*)

Założmy, że w chwili początkowej (położenie początkowe $z=0$) *cząstka* i otoczenie miały tę samą gęstość $\rho'_o = \rho_o$

Rozłóżmy ciśnienie *cząstki* i otoczenia w szereg Taylora, zanedbując człony wyższego rzędu

$$\rho' = \rho'_o + \left(\frac{d\rho'}{dz} \right) z + \dots$$

$$\rho = \rho_o + \left(\frac{d\rho}{dz} \right) z + \dots$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{g}{\rho'} \left[\left(\frac{d\rho}{dz} \right) - \left(\frac{d\rho'}{dz} \right) \right] z \approx \frac{g}{\rho_o} \left[\left(\frac{d\rho}{dz} \right) - \left(\frac{d\rho'}{dz} \right) \right] z$$

Częstotliwość Brunt-Väisälä, N , zdefiniowana jest następująco:

$$N^2 = \frac{g}{\rho_o} \left[\left(\frac{d\rho'}{dz} \right) - \left(\frac{d\rho}{dz} \right) \right]$$

Nazwana jest również ‘częstotliwością wyporu’ (*buoyancy frequency*)

Równanie ruchu pionowego przyjmuje postać:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + N^2 z = 0$$

$$z = A_1 \exp(iNt) + B_1 \exp(-iNt)$$

$$z = A_1 \cos(Nt) + B_1 \sin(Nt) \quad , N^2 > 0$$

$$z = A_1 \exp(|N|t) + B_1 \exp(-|N|t) \quad , N^2 < 0$$

$$N^2 = \frac{g}{\rho_o} \left[\left(\frac{d\rho'}{dz} \right) - \left(\frac{d\rho}{dz} \right) \right]$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + N^2 z = 0$$

$N^2 > 0$: równowaga stabilna, okres oscylacji: $\tau_g = \frac{2\pi}{N}$

$N^2 = 0$: równowaga obojętna

$N^2 < 0$: równowaga niestabilna

$$\frac{d^2 z'}{dt^2} = \left(\frac{\rho - \rho'}{\rho'} \right) g$$

$$RT\rho = p, \quad RT'\rho' = p$$

$$\frac{d^2 z'}{dt^2} = g \left(\frac{T' - T}{T} \right)$$

$$\Gamma' = \Gamma_d \quad \text{lub} \quad \Gamma' = \Gamma_s$$

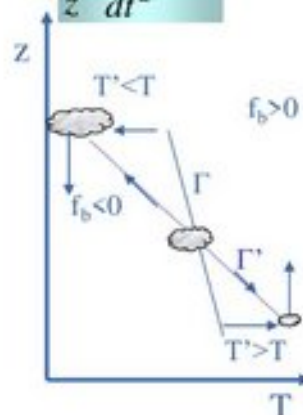
$$T' = T_0 - \Gamma' z'$$

$$T = T_0 - \Gamma z'$$

Równowaga stabilna

$$\Gamma < \Gamma'$$

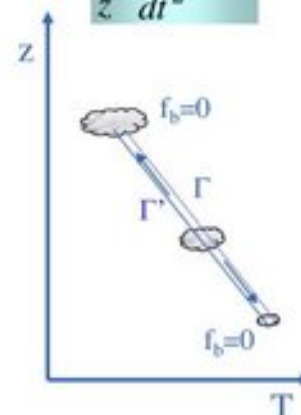
$$\frac{1}{z'} \frac{d^2 z'}{dt^2} < 0$$



Równowaga neutralna

$$\Gamma = \Gamma'$$

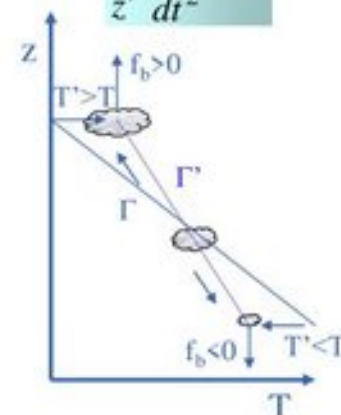
$$\frac{1}{z'} \frac{d^2 z'}{dt^2} = 0$$



Równowaga niestabilna

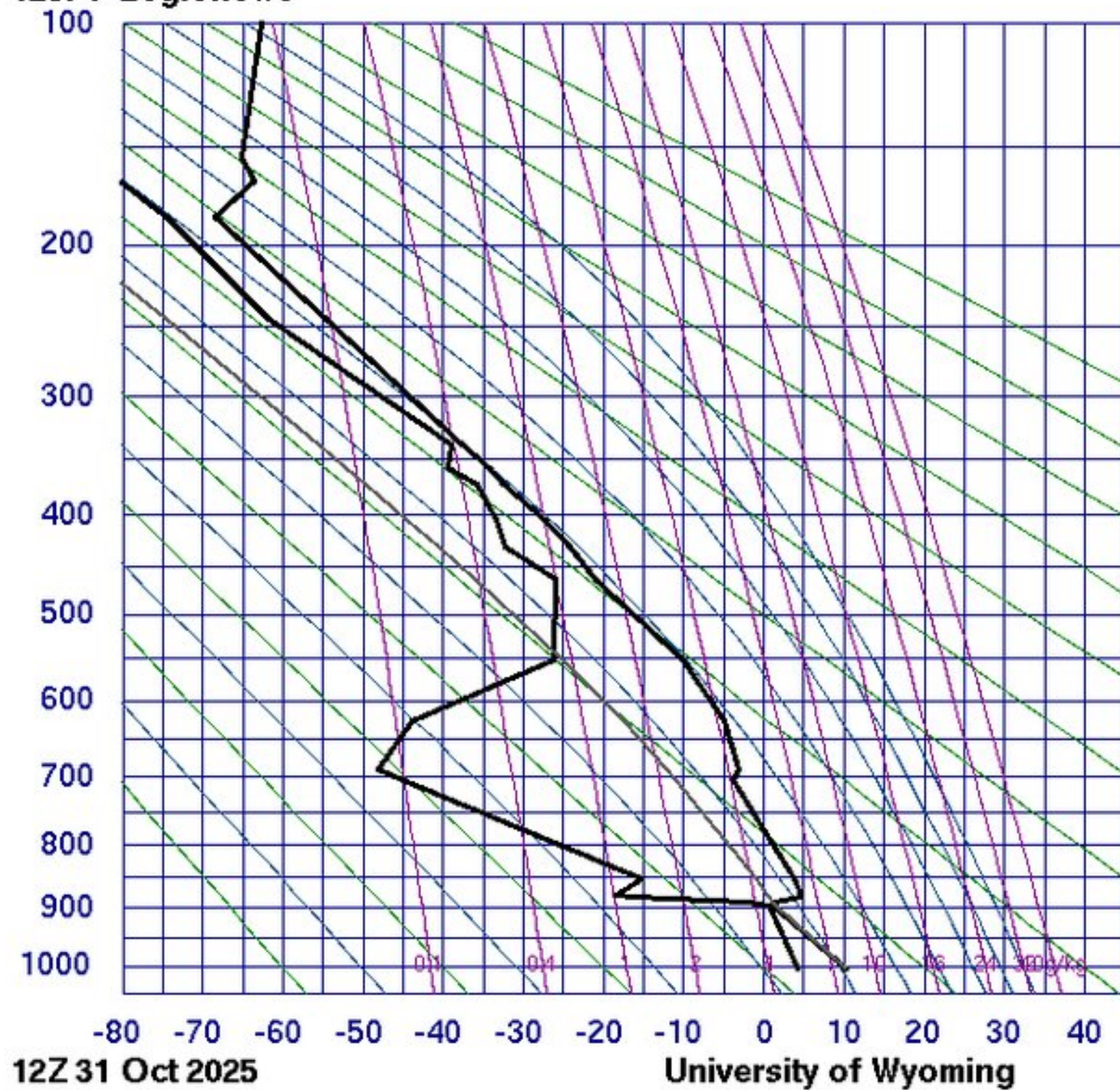
$$\Gamma > \Gamma'$$

$$\frac{1}{z'} \frac{d^2 z'}{dt^2} > 0$$



$$\frac{d^2 z'}{dt^2} = \frac{g}{T} (\Gamma - \Gamma') z'$$

12374 Legionowo



SLAT	52.40
SLON	20.96
SELV	96.00
SHOW	16.87
LIFT	14.86
LFTV	14.92
SWET	105.6
KINX	-37.9
CTOT	0.54
VTOT	19.95
TOTL	20.49
CAPE	1.14
CAPV	1.94
CINS	-0.12
CINV	0.00
EQLV	892.0
EQTV	890.7
LFCT	911.4
LFCV	911.4
BRCH	0.02
BRCV	0.03
LCLT	275.4
LCLP	911.4
LCLE	296.9
MLTH	282.8
MLMR	4.99
THCK	5481.
PWAT	9.27



Gradient adiabatyczny dla gazu doskonałego [\[edytuj | edytuj kod \]](#)

Dla przemiany adiabatycznej dla gazu doskonałego zachodzi związek:

$$PdV = -VdP/\gamma.$$

Z pierwszej zasady termodynamiki wynika:

$$mc_v dT - Vdp/\gamma = 0,$$

$$\alpha = V/m,$$

$$\gamma = c_p/c_v.$$

Z powyższych zależności można uzyskać:

$$c_p dT - \alpha dP = 0,$$

gdzie:

c_p - ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu,

α - objętość właściwa.

Stosując powyższe zależności do równowagi hydrostatycznej gazu w polu grawitacyjnym^[1]:

$$dP = -\rho g dz,$$

gdzie:

g - przyspieszenie grawitacyjne, dla Ziemi przyspieszenie ziemskie,

ρ - gęstość.

Powyższa zmiana wyrażona jako zależność zmiany temperatury od wysokości w gazie^[2]:

$$\Gamma_d = -\frac{dT}{dz} = \frac{g}{c_p}.$$

Wyprowadzenie równania

Korzystamy z równania I zasady termodynamiki :

$$dh = T ds + v dp,$$

gdzie oznacza zmianę entalpii , jest temperaturą bezwzględną, jest zmianą entropii , jest objętością właściwą i jest ciśnieniem. Dla procesów adiabatycznych zmiana entropii wynosi zero, a równanie staje się: $dhTds + vdp$

$$dh = v dp.$$

Zastąp w powyższym wyrażeniu równanie stanu gazu doskonałego

$$pv = RT,$$

a także biorąc pod uwagę, że

$$dh = C_p dT,$$

dostajemy

$$\frac{dp}{p} = \frac{C_p}{R} \frac{dT}{T}.$$

Po integracji mamy:

$$\left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{R/C_p} = \frac{T_1}{T_0},$$

Wyrażając stąd otrzymujemy: T_0

$$T_0 = T_1 \left(\frac{p_0}{p_1} \right)^{R/C_p} \equiv \theta.$$

Warto wziąć to pod uwagę

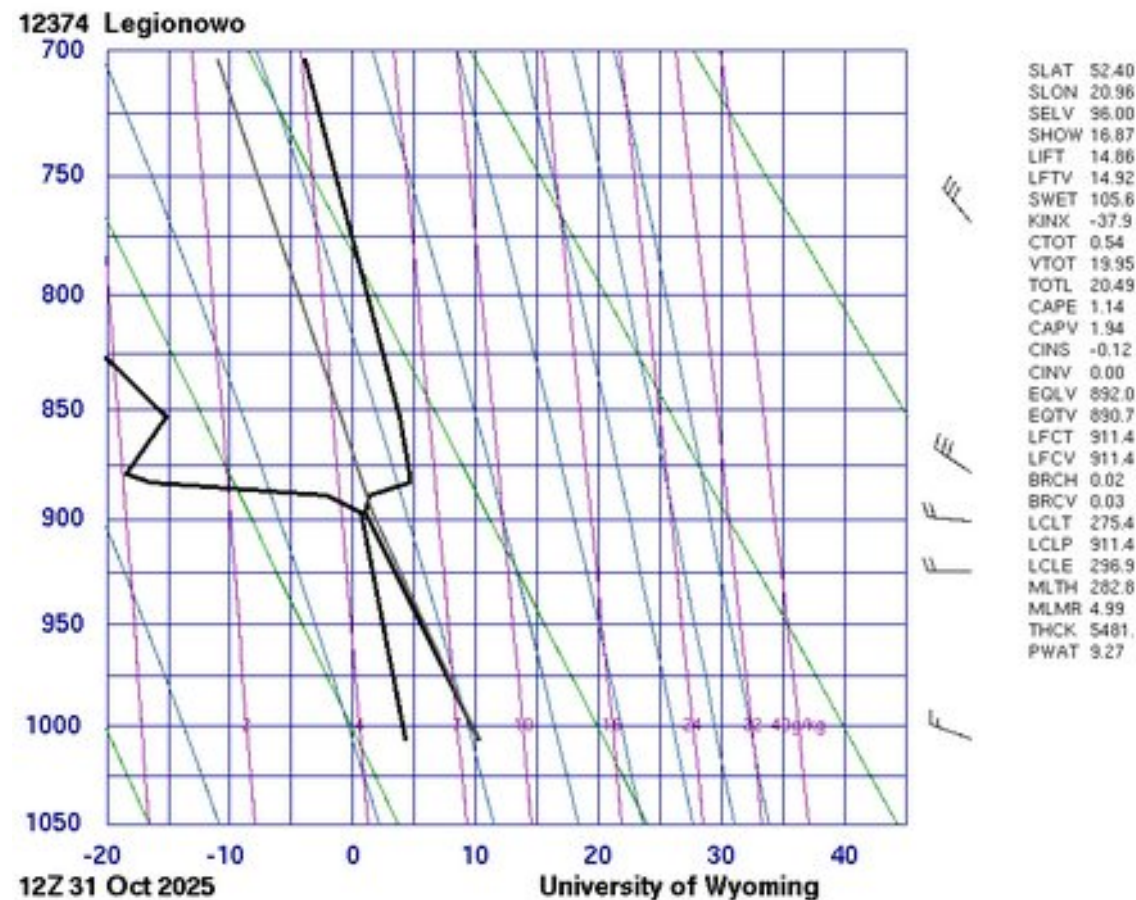
$$R/C_p = \frac{\kappa - 1}{\kappa}, \text{ gdzie jest wykładnikiem adiabatycznym } \kappa \equiv \frac{C_p}{C_v}$$

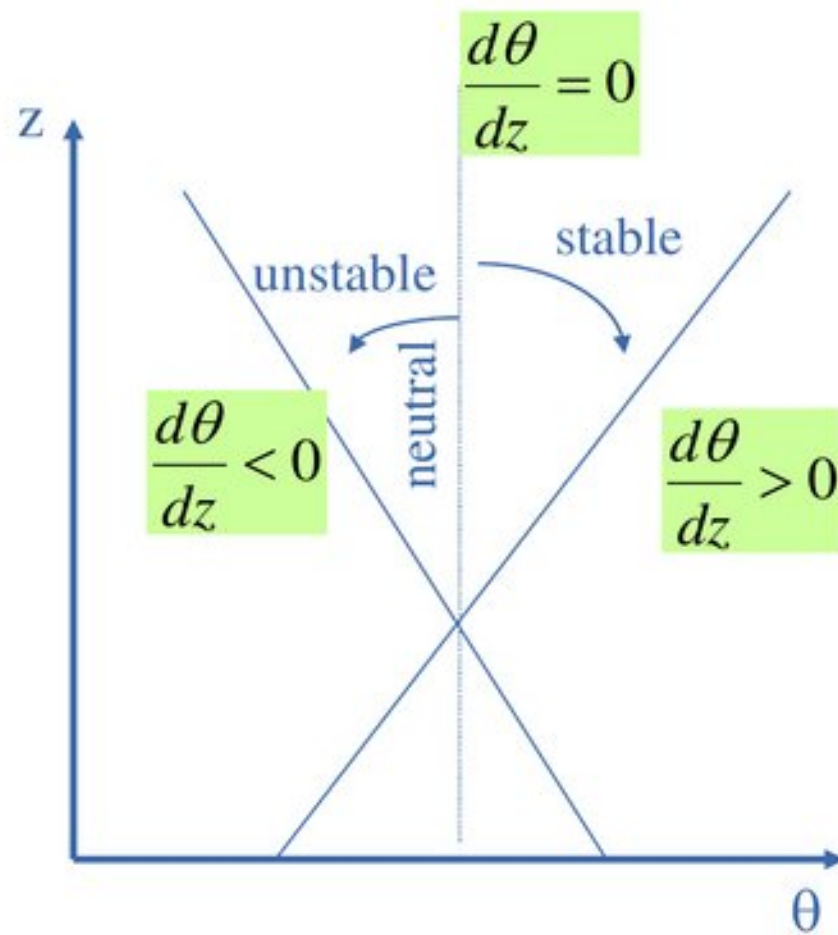
Temperatura potencjalna to temperatura gazu doprowadzonego adiabatycznie do ciśnienia standardowego , zwykle 10^5 Pa.

Oznaczona grecką literą θ i wyrażona następującym równaniem:

$$\theta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{R/C_p},$$

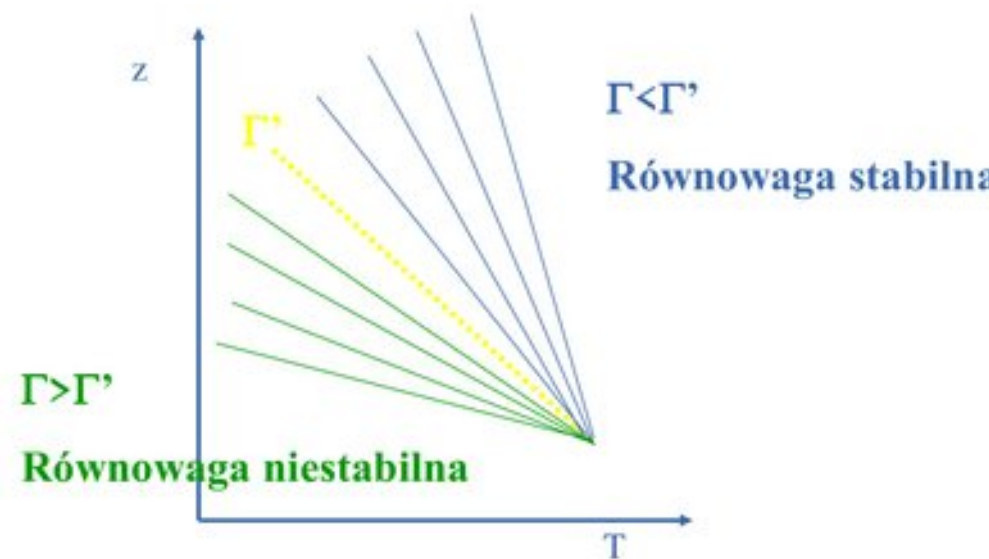
gdzie jest T temperaturą w kelwinach , R jest stałą gazową i C_p jest ciepłem właściwym w procesie izobarycznym .



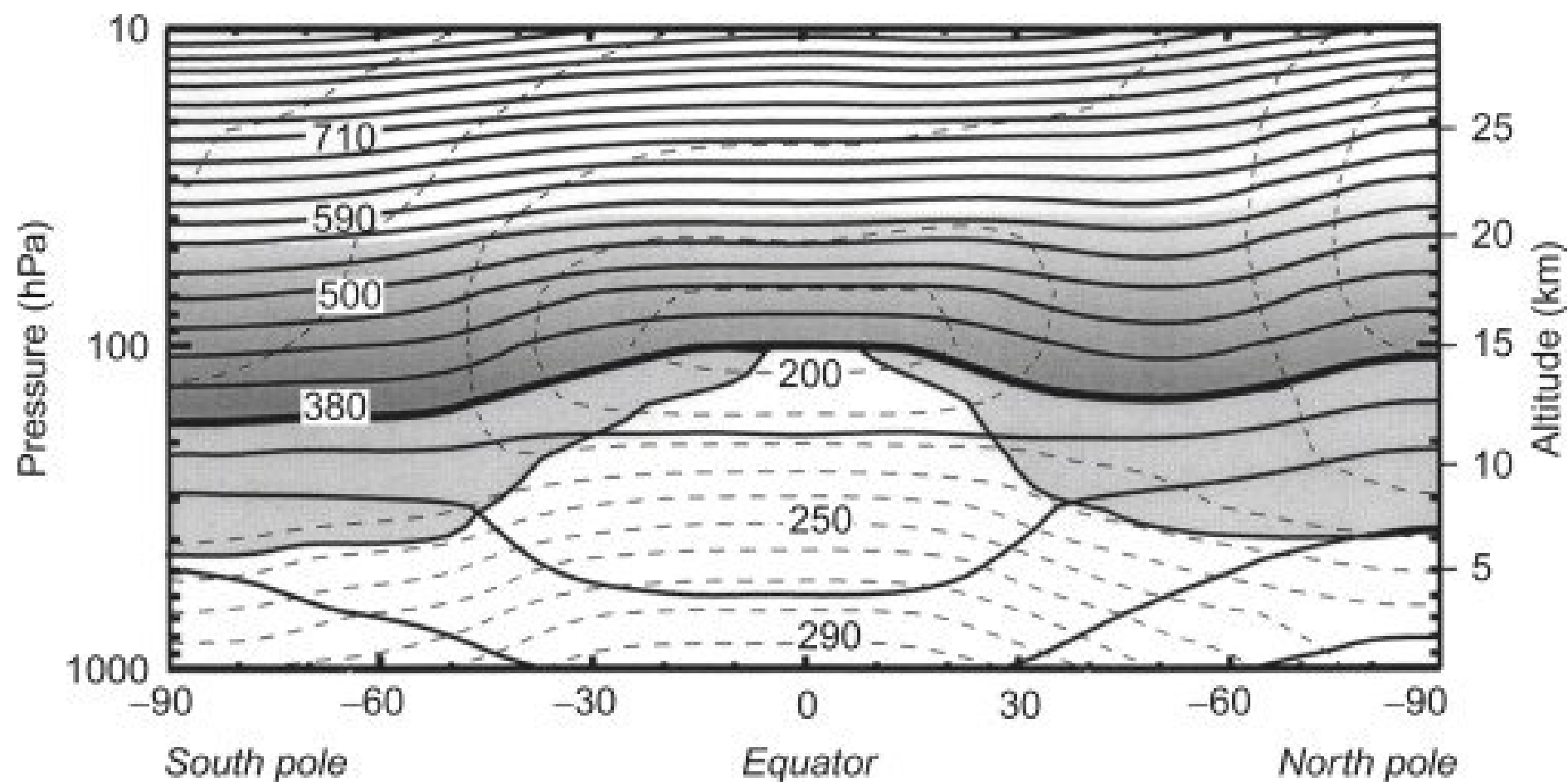


$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{\theta}{T}(\Gamma_d - \Gamma)$$

$\frac{d\theta}{dz} > 0$	(stable)
$\frac{d\theta}{dz} = 0$	(neutral)
$\frac{d\theta}{dz} < 0$	(unstable)



Izolinie temperatury potencjalnej na równoleżnikowym, średnim przekroju przez atmosferę



<https://www.sciencedirect.com/topics/earth-and-planetary-sciences/potential-temperature>

Atmosfera jest mieszaniną suchego powietrza i wody; proporcje są zmienne.

Zawartość wody nigdy nie przekracza paru procent masy suchego powietrza.

Będziemy rozważać układ składający się z suchego powietrza i wody, przy czym woda może występować także w co najmniej jednej ze skondensowanych faz.

Para wodna będąca w równowadze z wodą i znajdująca się w powietrzu zachowuje się tak jakby była w izolacji.

W stanie lotnym parę wodną można uważać za gaz doskonały.

Równanie stanu dla pary wodnej:

$$e = \rho_v R_v T, \quad \rho_v = \frac{1}{v_v}$$

e - ciśnienie pary wodnej, ρ_v - gęstość pary wodnej, R_v - stała gazowa dla pary wodnej

$$R_v = \frac{R^*}{M_v} = \frac{M_d \cdot R}{M_v} = \frac{R}{\varepsilon}$$

$$M_d = 28.96 \text{ g/mol}, \quad M_v = 18 \text{ g/mol}, \quad \varepsilon = \frac{M_v}{M_d} = 0.622$$

$$R = R^* / M$$

R^* uniwersalna stała gazowa

M masa molowa

R indywidualna stała gazowa

$$R^* = 8.314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}, \quad R = 287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}, \quad R_v = 461.5 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

$$e = \rho_v \frac{R}{\varepsilon} T$$

- Ciśnienie pary e – cząstkowe ciśnienie pary wodnej [mb, hPa]
- Gęstość pary ρ_v – wilgotność bezwzględna (*absolute humidity*)[kg/m^3]
- Wilgotność właściwa, q , (*specific humidity*) masa pary wodnej w jednostce masy powietrza wilgotnego. [q]= $kg/kg, g/kg$
- Stosunek zmieszania r (*mixing ratio*) – stosunek masy pary wodnej w jednostce masy suchego powietrza.[r]= $kg/kg, g/kg$

$$q = \frac{m_v}{m} = \frac{\rho_v}{\rho} = \frac{\rho_v}{\rho_d + \rho_v} = \varepsilon \frac{e}{p - e + \varepsilon \cdot e} = \varepsilon \frac{e}{p - (1 - \varepsilon)e} \approx \varepsilon \frac{e}{p}$$

$$\rho_v = \frac{e}{R_v T} = \varepsilon \frac{e}{RT}$$

$$\rho_d = \frac{p_d}{RT} = \frac{p - e}{RT}$$

$$r = \frac{m_v}{m_d} = \frac{\rho_v}{\rho_d} = \frac{\varepsilon \cdot e}{p - e} \approx \varepsilon \frac{e}{p} = q$$

$$r = \frac{m_v}{m_d} = \frac{m_v}{m - m_v} = \frac{q}{1 - q} \cong q$$

Wilgotność względna (*relative humidity*) f , stosunek aktualnego ciśnienia pary do ciśnienia pary w stanie nasycenia (lub w przybliżeniu stosunek aktualnego stosunku mieszania pary do stosunku mieszania w stanie nasycenia w tej samej temperaturze i ciśnieniu).

$$f = \frac{e}{e_s} \cong \frac{r}{r_s(p, T)}$$

$$r = \frac{\varepsilon \cdot e}{p - e} = \frac{\varepsilon \cdot f e_s}{p - f e_s} = \frac{\varepsilon \cdot f \frac{p r_s}{\varepsilon + r_s}}{p - f \frac{p r_s}{\varepsilon + r_s}} = \frac{\varepsilon f r_s}{\varepsilon + r_s - f r_s} = \frac{f r_s}{1 + \frac{r_s}{\varepsilon} (1 - f)} \cong f r_s$$

$f = \frac{e}{e_s}$

$r = \frac{\varepsilon \cdot e}{p - e} \Rightarrow e = \frac{p r}{\varepsilon + r}$

Weźmy próbkę powietrza o objętości V , mającą całkowite ciśnienie p . Zgodnie z prawem Gibbsa dla gazu doskonałego ciśnienie p jest sumą ciśnień cząstkowych mieszaniny, czyli suchego powietrza (p_d) i pary wodnej (e).

$$p = p_d + e$$

$$p_d = \rho_d R T = \rho_d \frac{R^*}{M_d} T =$$

$$\frac{m_d}{V} \frac{R^*}{M_d} T = \frac{m_d}{M_d} \frac{R^* T}{V}$$

$$e = \rho_v R_v T = \rho_v \frac{R^*}{M_v} T =$$

$$\frac{m_v}{V} \frac{R^*}{M_v} T = \frac{m_v}{M_v} \frac{R^* T}{V}$$

$$p = p_d + e =$$

$$= \frac{R^* T}{V} \left[\frac{m_d}{M_d} + \frac{m_v}{M_v} \right] = \rho R^* T \left[\frac{m_d}{M_d} + \frac{m_v}{M_v} \right] \frac{1}{m_d + m_v}$$

$$R = \frac{R^*}{M_d} \quad \begin{array}{l} M_d \text{ masa molowa} \\ \text{suchego} \\ \text{powietrza} \end{array}$$

$$R_v = \frac{R^*}{M_v} \quad \begin{array}{l} M_v \text{ masa molowa} \\ \text{pary wodnej} \end{array}$$

m_d masa suchego powietrza
w objętości V

m_v masa pary wodnej w
objętości V

$$\rho = \frac{m_d + m_v}{V} \quad \begin{array}{l} \text{gęstość wilgotnego powietrza} \end{array}$$

$$p = p_d + e = \rho R^* T \left[\frac{m_d}{M_d} + \frac{m_v}{M_v} \right] \frac{1}{m_d + m_v} = \rho T \frac{R^*}{\bar{M}}$$

$$\bar{M} = \frac{n_d M_d + n_v M_v}{n_d + n_v} = \frac{\frac{m_d}{M_d} + \frac{m_v}{M_v}}{\frac{m_d}{M_d} + \frac{m_v}{M_v}} = \frac{m_d + r m_d}{M_d + \frac{r m_d}{\varepsilon}} = M_d \left[\frac{1+r}{1+r/\varepsilon} \right]$$

Proporcje zmieszania pary wodnej i powietrza (r) zmieniają się w atmosferze, zatem indywidualna stała gazowa opisująca tę mieszaninę (R_m) będzie się zmieniać

$$R_m = \frac{R^*}{\bar{M}} = \frac{R^*}{M_d} \left[\frac{1+r/\varepsilon}{1+r} \right] = R \left[\frac{1+r/\varepsilon}{1+r} \right]$$

$$R_m = R \left[1 + q \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \right] = R(1 + 0,608q)$$

$$\varepsilon = \frac{M_v}{M_d} \Rightarrow M_v = \varepsilon M_d$$

$$r = \frac{m_v}{m_d} \Rightarrow m_v = r m_d$$

$$R = \frac{R^*}{M_d}$$

$$r = \frac{q}{1-q}$$

$$\frac{1+r/\varepsilon}{1+r} = \frac{1 + \frac{1}{\varepsilon} \frac{q}{1-q}}{1 + \frac{q}{1-q}} =$$

$$\frac{1-q + \frac{q}{\varepsilon}}{1-q+q} = \frac{1}{1+q\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)}$$

$$\varepsilon = 0.622$$

$$p = \rho R T \left[\frac{1 + r/\varepsilon}{1 + r} \right]$$

$$p = \rho R T \left[1 + q \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \right]$$

$$\begin{aligned} T_v &= T \left[\frac{1 + r/\varepsilon}{1 + r} \right] \\ &\approx T \left(1 + \frac{r}{\varepsilon} \right) \cdot (1 - r) \\ &\approx T \left[1 + r \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \right] \end{aligned}$$

$$T_v = T \left[1 + q \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \right]$$

$$T_v = T(1 + 0.608q) \cong T(1 + 0.608r)$$

$$p = \rho R T_v$$

p ciśnienie wilgotnego powietrza ; $p = p_d + e$

R stała gazowa dla suchego powietrza

ρ gęstość wilgotnego powietrza

Temperatura wirtualna (T_v) jest to temperatura suchego powietrza, które miałyby taką samą gęstość jak powietrze wilgotne przy danym ciśnieniu

Równanie stanu gazu dla suchego powietrza może być zastosowane do powietrza wilgotnego, jeśli temperaturę zastąpimy przez *temperaturę wirtualną*

$$pv = RT_v$$

Różnica pomiędzy temperaturą T i temperaturą wirtualną jest mała i często może być zaniedbana.

Alternatywną metodą jest opis powietrza przy użyciu równania stanu dla powietrza wilgotnego (stała gazowa R_m)

$$pv = R_m T$$

$$R_m = R[1 + 0,698q] \cong R[1 + 0.608r]$$

$$N^2 = \frac{g}{\rho_o} \left[\left(\frac{d\rho'}{dz} \right) - \left(\frac{d\rho}{dz} \right) \right]$$

Dla wilgotnej (ale nienasyconej) atmosfery.

Z równania gazu doskonałego, zaniedbując fluktuacje ciśnienia:

$$p' = RT_v' \rho' \quad , \quad p = RT_v \rho$$

$$\frac{d\rho'}{dz} = -\frac{p'}{RT_v'^2} \frac{dT_v'}{dz} = \frac{\rho'}{T_v'} \Gamma_d \quad , \quad \frac{d\rho}{dz} = -\frac{p}{RT_v^2} \frac{dT_v}{dz} = -\frac{\rho}{T_v} \frac{dT_v}{dz}$$

$$N^2 = \frac{g}{\rho_o} \left[\frac{\rho'}{T'} \Gamma_d + \frac{\rho}{T_v} \frac{dT_v}{dz} \right] = \frac{g}{T_o} \left[\frac{dT_v}{dz} + \Gamma_d \right]$$

$T' = T_v = T_o, \rho' = \rho = \rho_o$

Z definicji wirtualnej temperatury potencjalnej:

$$\theta_v = T_v \left(\frac{p_0}{p} \right)^\kappa$$

$$\frac{1}{\theta_v} \frac{d\theta_v}{dz} = \frac{1}{T} \frac{dT_v}{dz} - \frac{R}{c_{pd}} \frac{1}{p} \frac{dp}{dz} = \frac{1}{T} \left(\frac{dT_v}{dz} + \frac{g}{c_{pd}} \right)$$

$$N^2 = \frac{g}{\theta_0} \frac{d\theta_v}{dz}$$

$$\frac{d\theta_v}{dz} > 0 \quad \text{lub} \quad -\frac{dT_v}{dz} < \Gamma_d$$

Równowaga stabilna

$$\frac{d\theta_v}{dz} = 0 \quad \text{lub} \quad -\frac{dT_v}{dz} = \Gamma_d$$

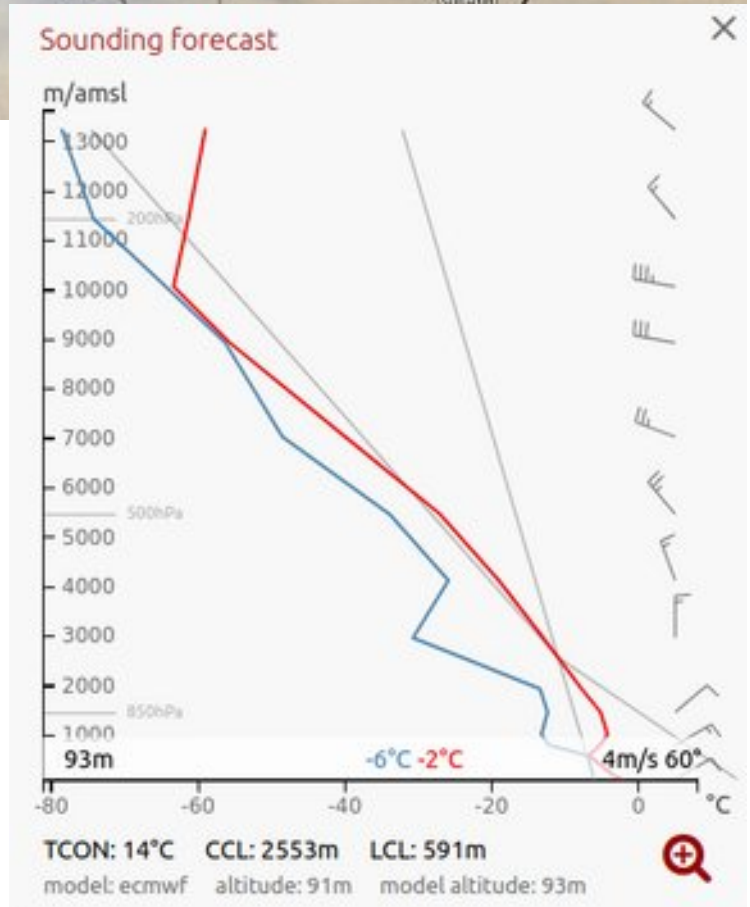
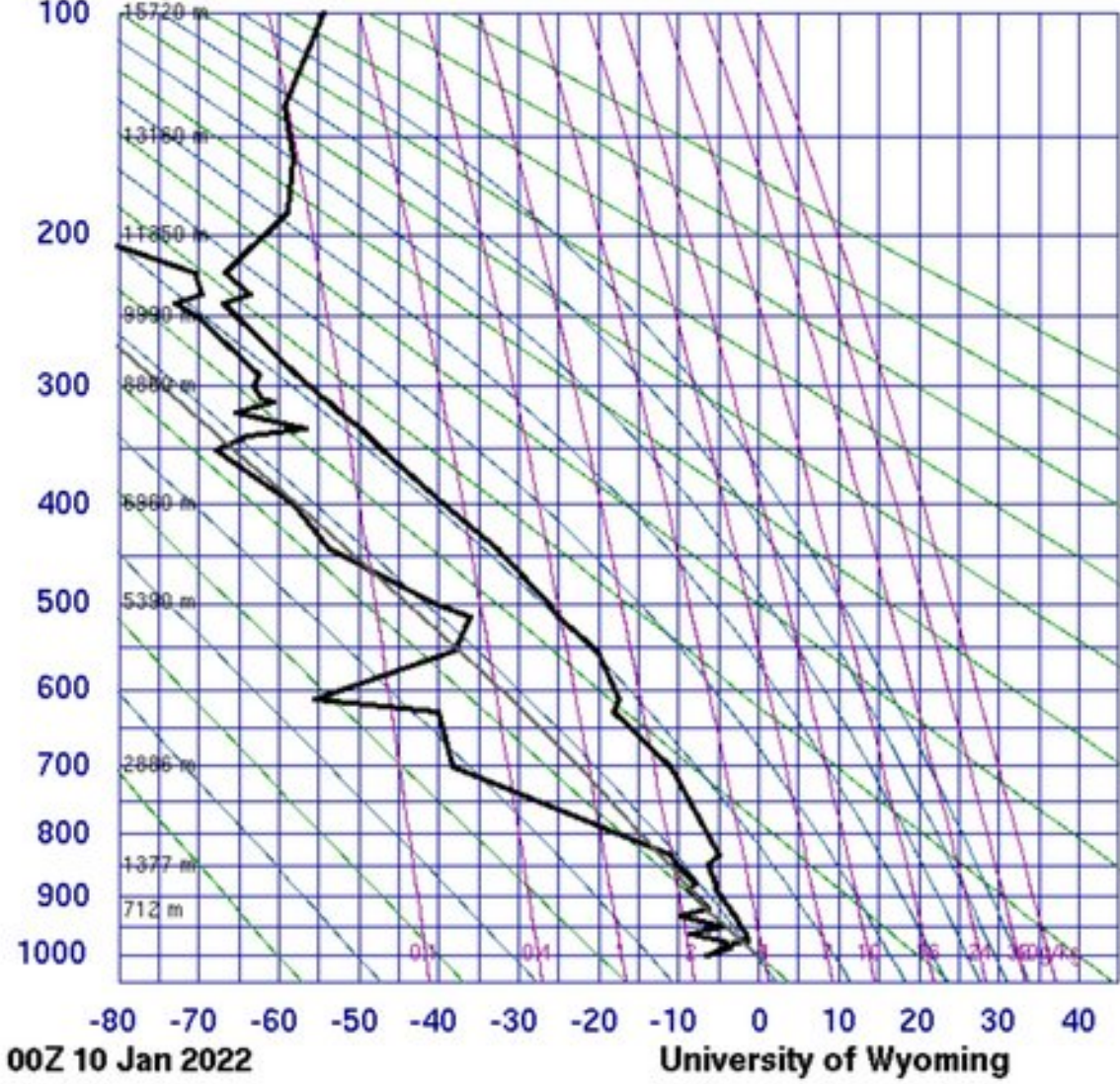
Równowaga obojętna

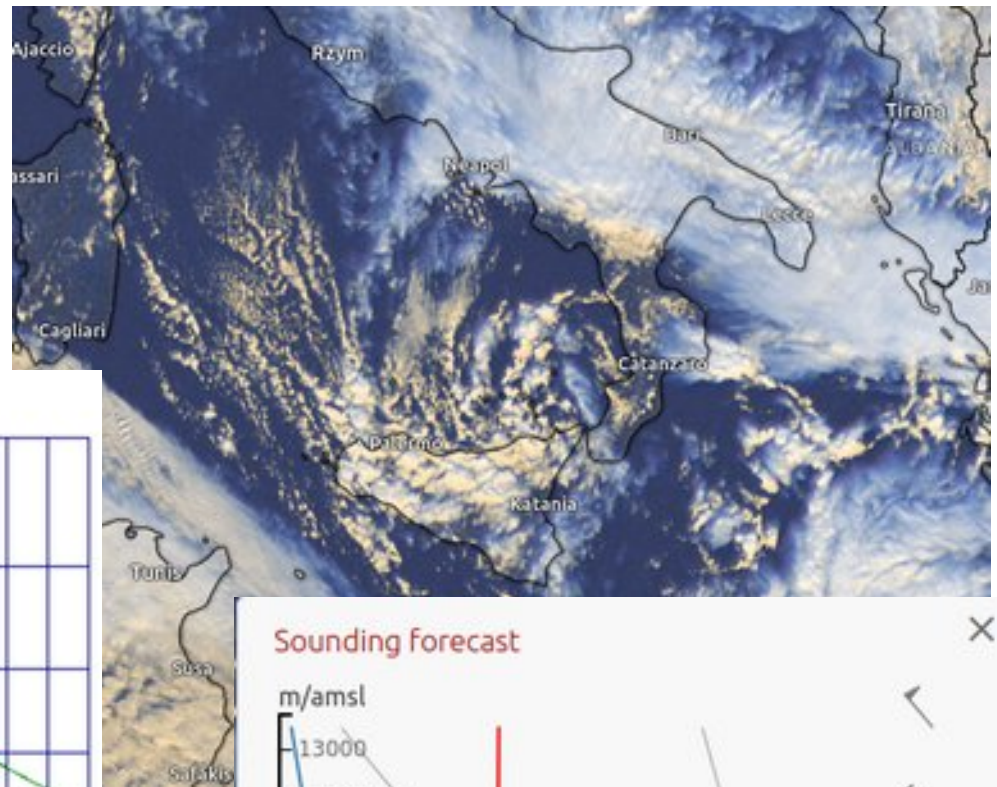
$$\frac{d\theta_v}{dz} < 0 \quad \text{lub} \quad -\frac{dT_v}{dz} > \Gamma_d$$

Równowaga niestabilna

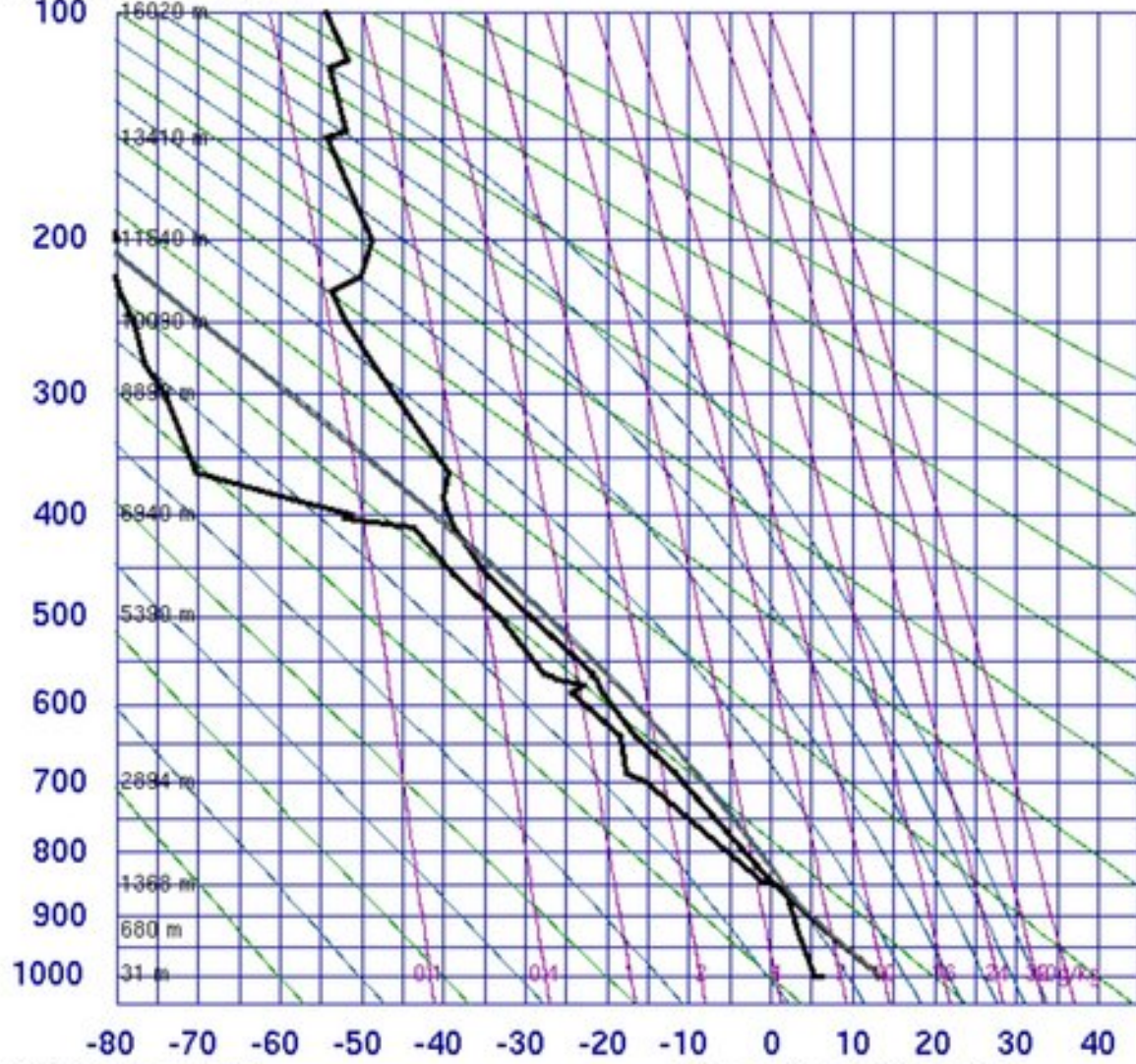


12374 Legionowo





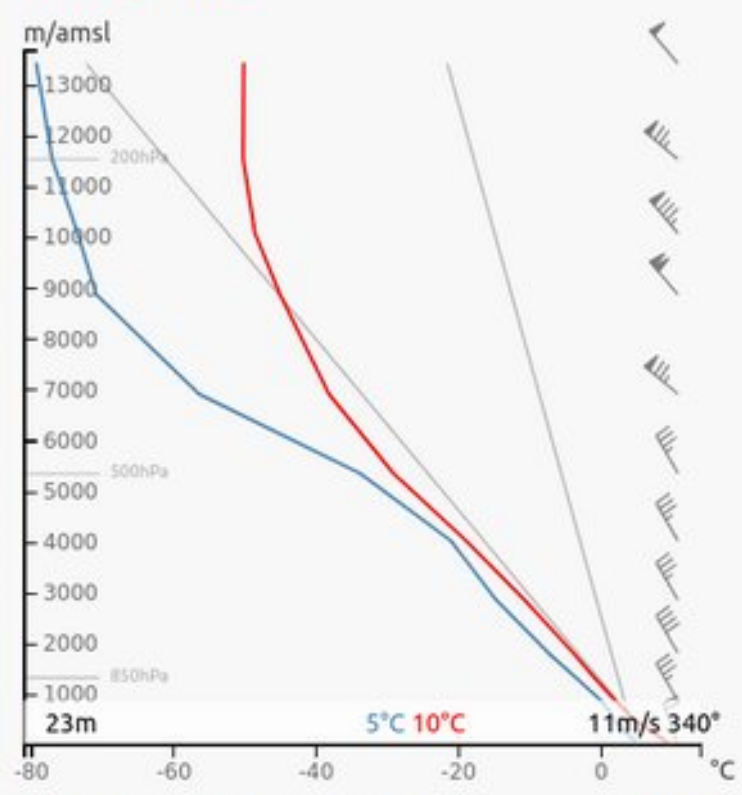
16429 LICT Trapani



00Z 10 Jan 2022

University of Wyoming

Sounding forecast



TCON: 10°C CCL: 623m LCL: 602m
model: ecwfw altitude: 8m model altitude: 23m