

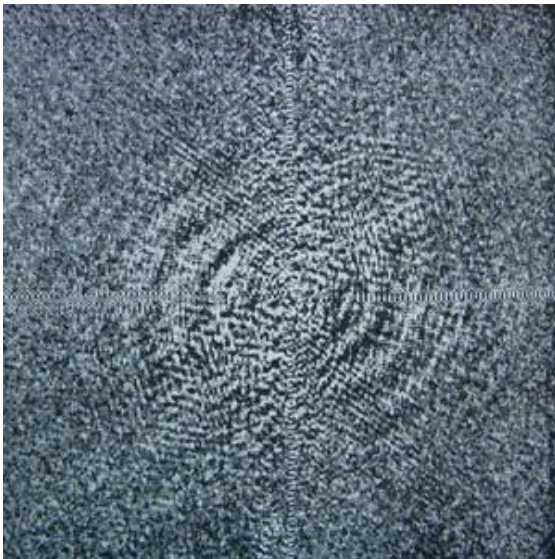
1100-4BW12, rok akademicki 2019/20

WSTĘP DO OPTYKI FOURIEROWSKIEJ

dr hab. Rafał Kasztelanic

Hologramy generowane komputerowo - CGH

- Modelowanie obiektu
- Obliczanie rozkładu prążków w płaszczyźnie hologramu,
- Możliwość wybrania interesujących nas składowych
- Zapis w materiale lub na urządzeniu – **potrzebne kodowanie**
- Najprostsze hologramy Fraunhofera (duża odległość), wtedy zwykła FFT
- Zadana amplituda i dowolna faza w odtwarzanym obrazie (kinoform)



hologram



rekonstrukcja

Hologramy generowane komputerowo - CGH

Widmo obrazu:

$$G(\nu_x, \nu_y) = FT \{g(x, y)\}$$

mające być zapisane na hologramie, dyskretyzujemy (próbujemy):

$$G(\nu_x, \nu_y) = \sum_n \sum_m G(n\Delta\nu_x, m\Delta\nu_y) \delta(\nu_x - n\Delta\nu_x, \nu_y - m\Delta\nu_y)$$

gdzie: $\Delta\nu_x, \Delta\nu_y$ odstęp między punktami próbkowania.

$$G_{nm} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Amplituda}}}{A_{nm}} \exp\left(-i \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Faza}}}{\varphi_{nm}}\right)$$

Hologramy generowane komputerowo - CGH

Metoda Lohmana:

Każdej próbce: $G_{nm} = G(n\Delta v_x, m\Delta v_y)$

odpowiada jedna komórka dyskretyzacji

o środku w punkcie $v_{nx} = n\Delta v_x, v_{my} = m\Delta v_y$

Faza i amplituda kodowane są jako prostokątna
apertura w nieprzezroczystym tle.

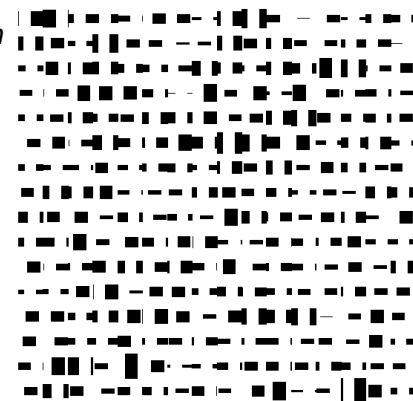
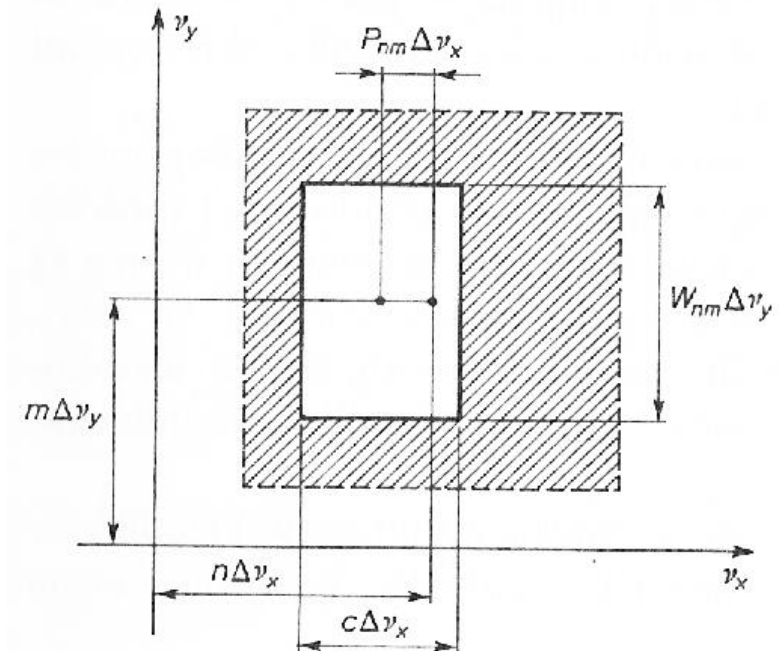
Szerokość apertur $c\Delta v_x$ jest taka sama.

Wysokość apertury $W_{nm}\Delta v_y$ jest proporcjonalna do wartości amplitudy A_{nm}

Przesunięcie $P_{nm}\Delta v_x$ koduje fazę φ_{nm}

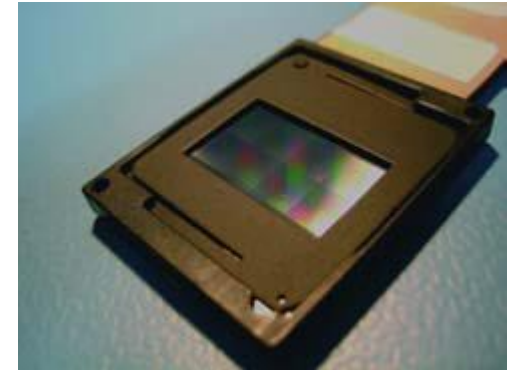
Spełnione musi być: $W_{nm} \leq 1, |P_{nm}| + \frac{c}{2} \leq \frac{1}{2}$

Komórka dyskretyzacji



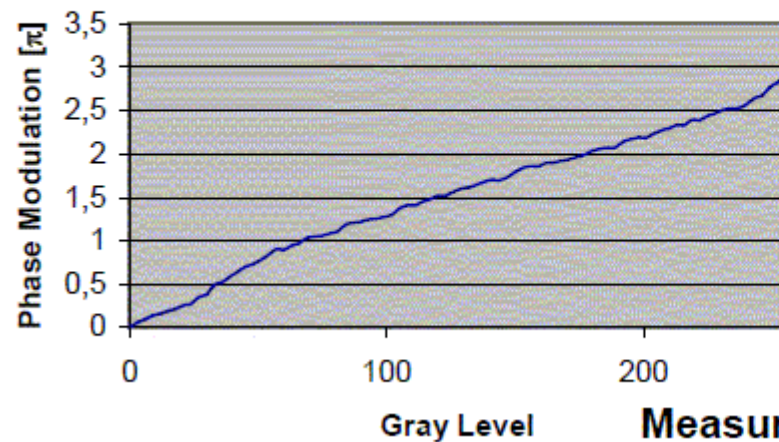
Holografia

Hologramy generowane komputerowo - CGH

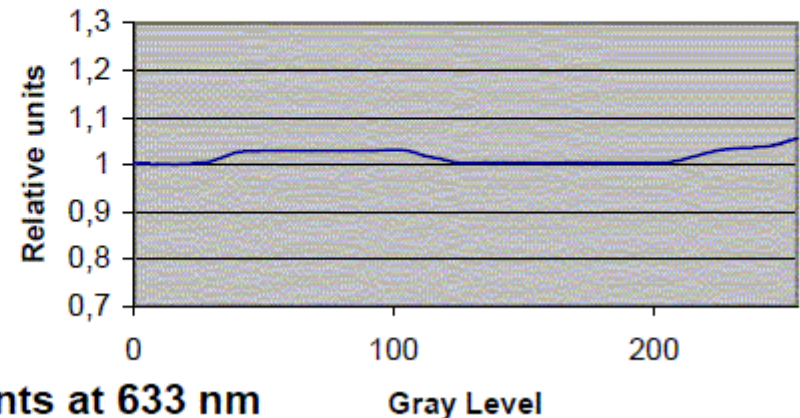


Phase- and intensity modulation

Polariser 90°



Intensity Modulation
Polariser 90° Analyser 90°



Measurements at 633 nm

Kodowanie amplitudy i fazy

Stosowane podejścia:

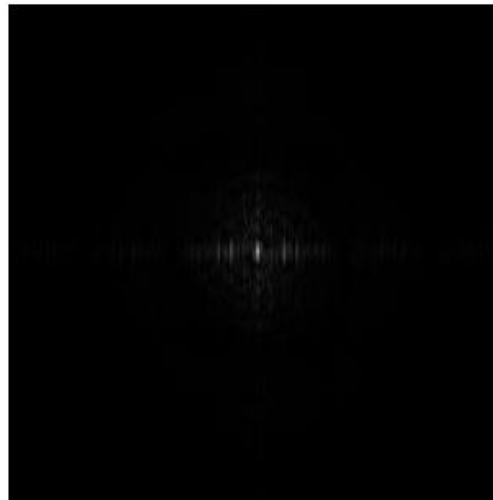
- metoda montecarlo
- Gerchberg-Saxton
- **IFTA**
- algorytmy genetyczne
- wyżarzanie

Pozwalają na optymalizację kodowania przy ograniczonej dziedzinie dostępnych parametrów:

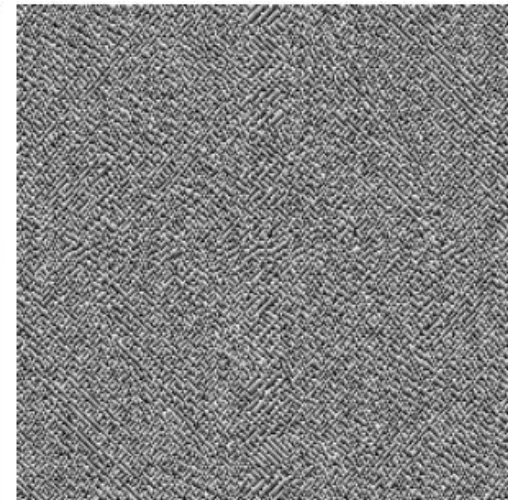
- amplituda
- faza
- amplituda-faza
- głębia
- długość fali
- DOE, HOE, CGH



obraz

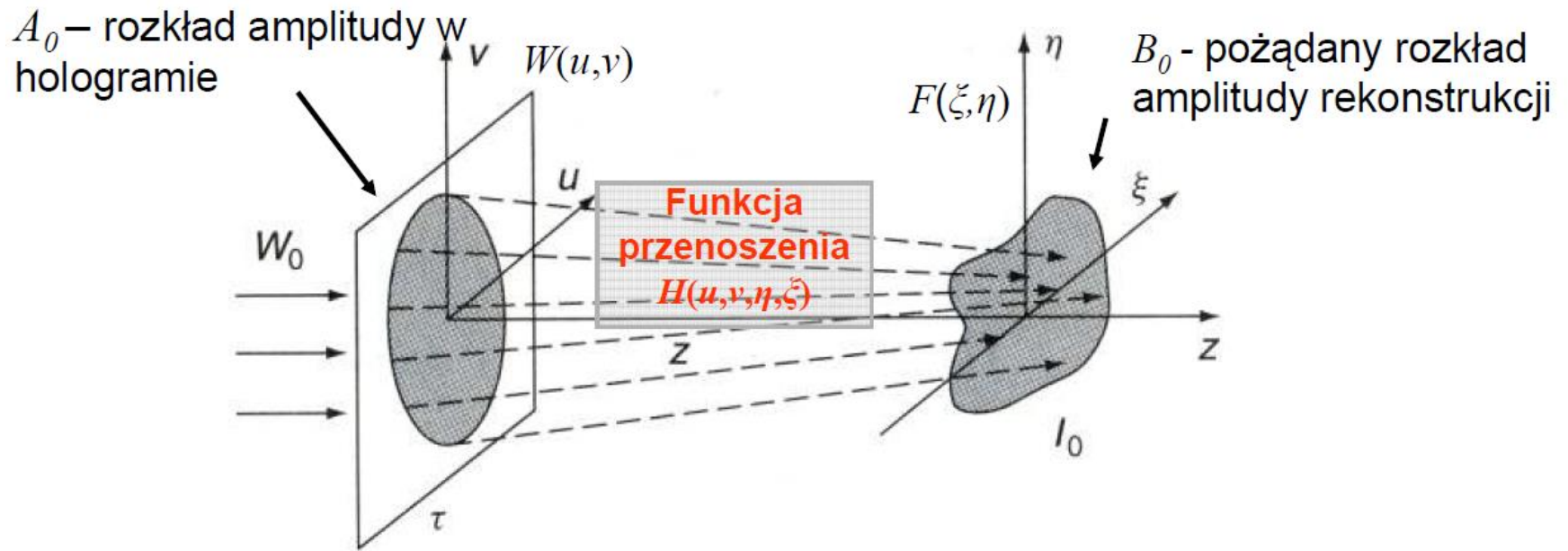


amplituda



faza

Holografia



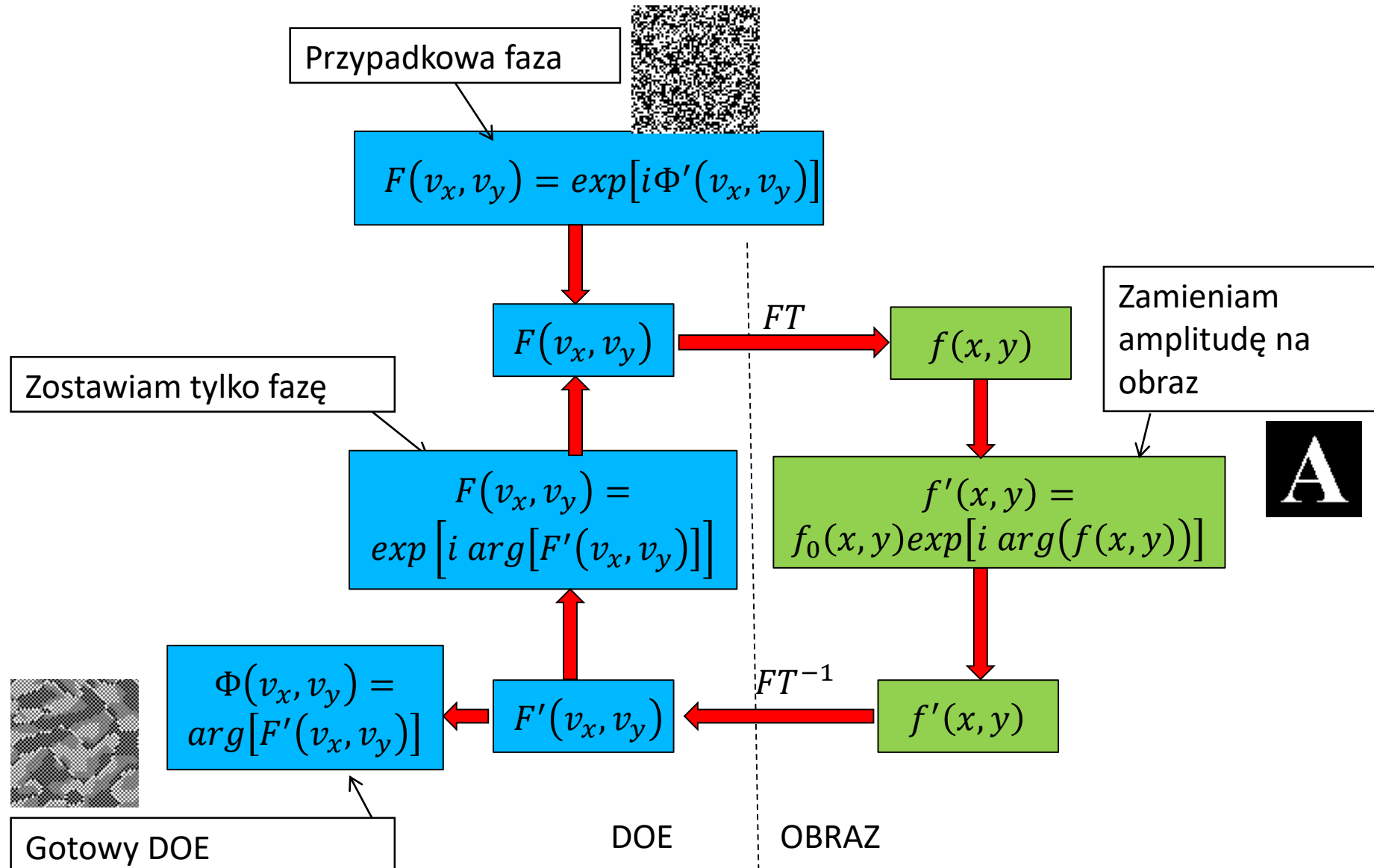
Propagacja w wolnej przestrzeni (Fresnela) z płaszczyzny hologramu do płaszczyzny rekonstrukcji (odległość z):

$$F(v_x, v_y) = \iint A(x, y) H(x - v_x, y - v_y) dx dy$$

Funkcja przenoszenia (na odległość z):

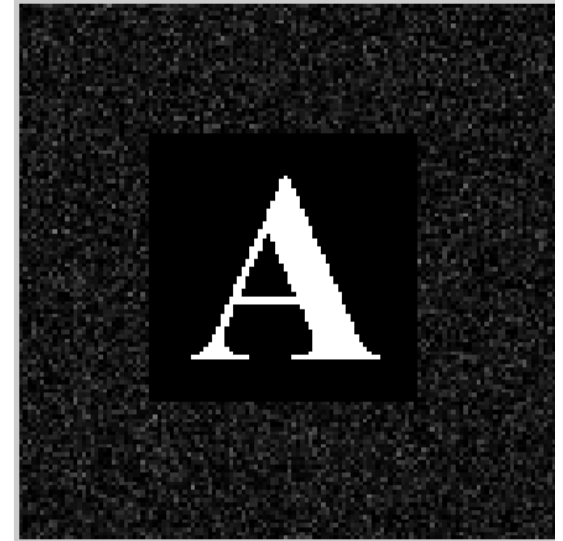
$$H(x, y) = \frac{ik \exp(ikz)}{2\pi z} \exp \left[\frac{ik(x^2 + y^2)}{2z} \right]$$

Kodowanie amplitudy i fazy – IFTA (Iterative Fourier transform algorithm)

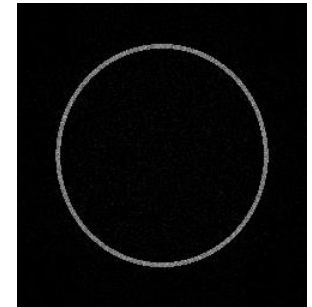
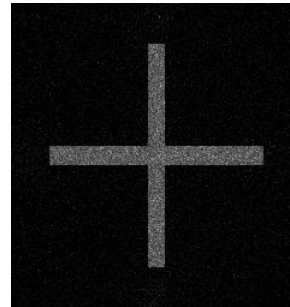
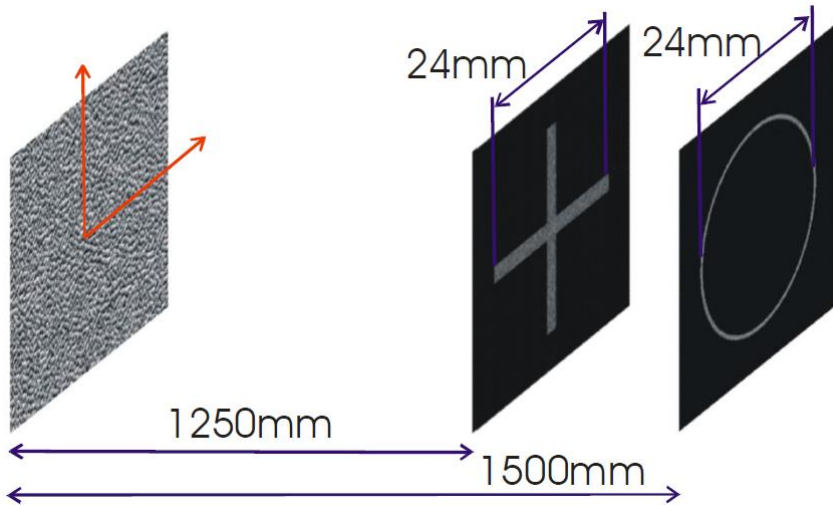


Holografia

Często optymalizacji (nadpisanie amplitudy) dokonuje się w obrębie ograniczonego obszaru.
Poza nim mogą kumulować się błędy.



Przykład możliwości – dwa obrazy w różnych planach:



Holografia

Liczba poziomów:

2 3 4 5

8 16 32 64

128 256 512 1024



Holografia

Łamanie hologramu:

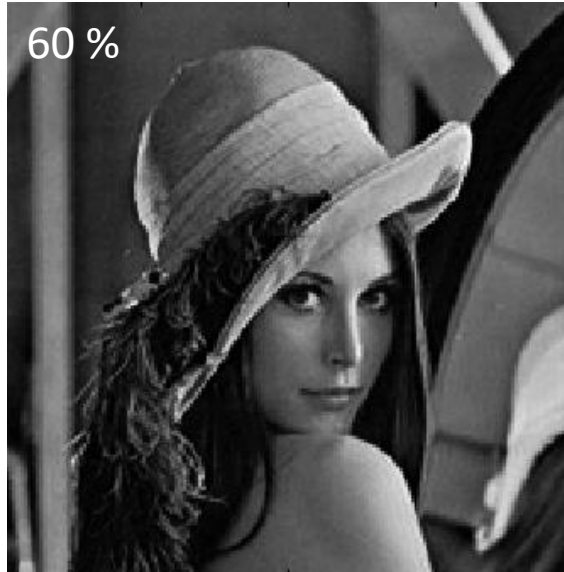
oryginał



pełny



60 %

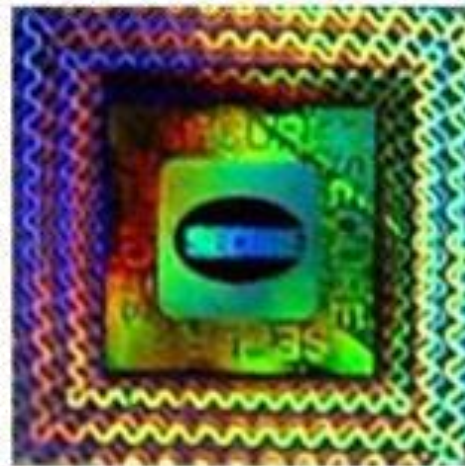


25 %



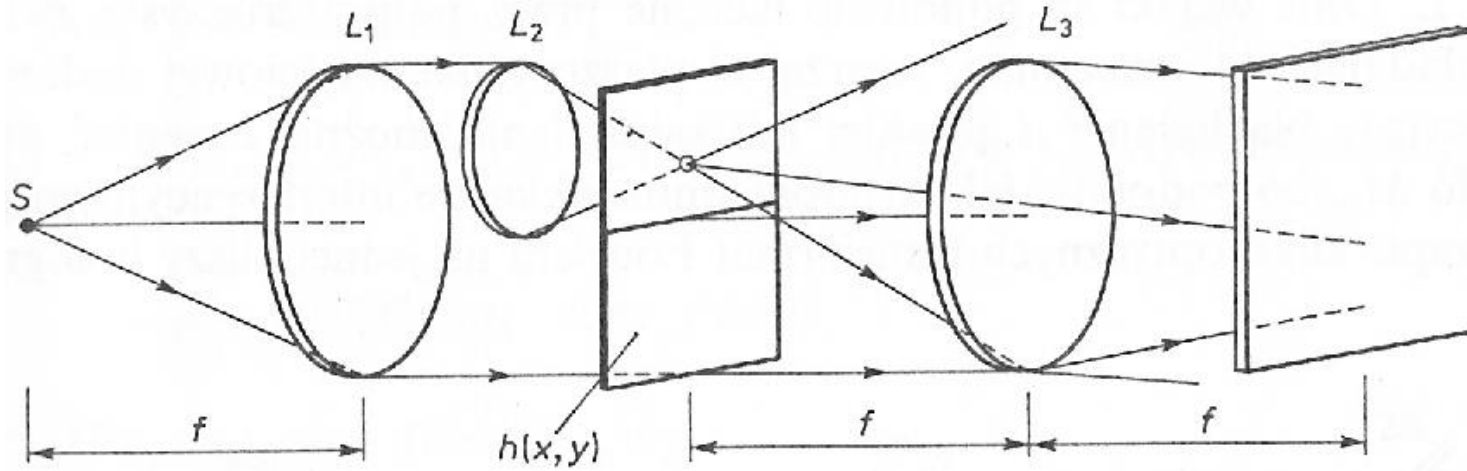
Zastosowania w życiu codziennym

- środki zabezpieczające, bardzo trudne do podrobienia;
- gwarancja oryginalności produktu (np. płyty CD);
- materiały reklamowe – atrakcja i przyciągnięcie uwagi klienta;
- rejestracja kompozycji artystycznych i niedostępnych dla zwiedzających muzea dzieł sztuki
- szyfrowanie informacji

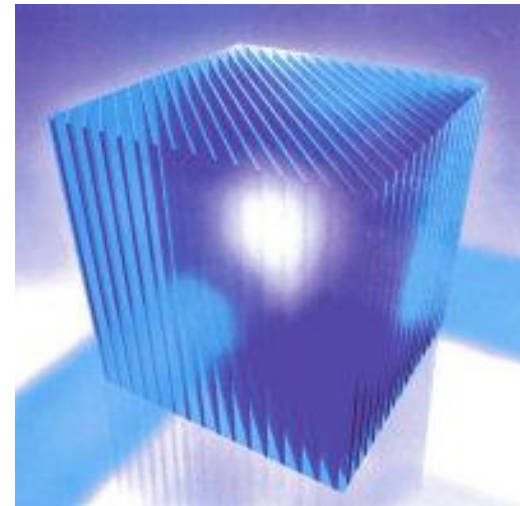


Holografia

Pamięci holograficzne

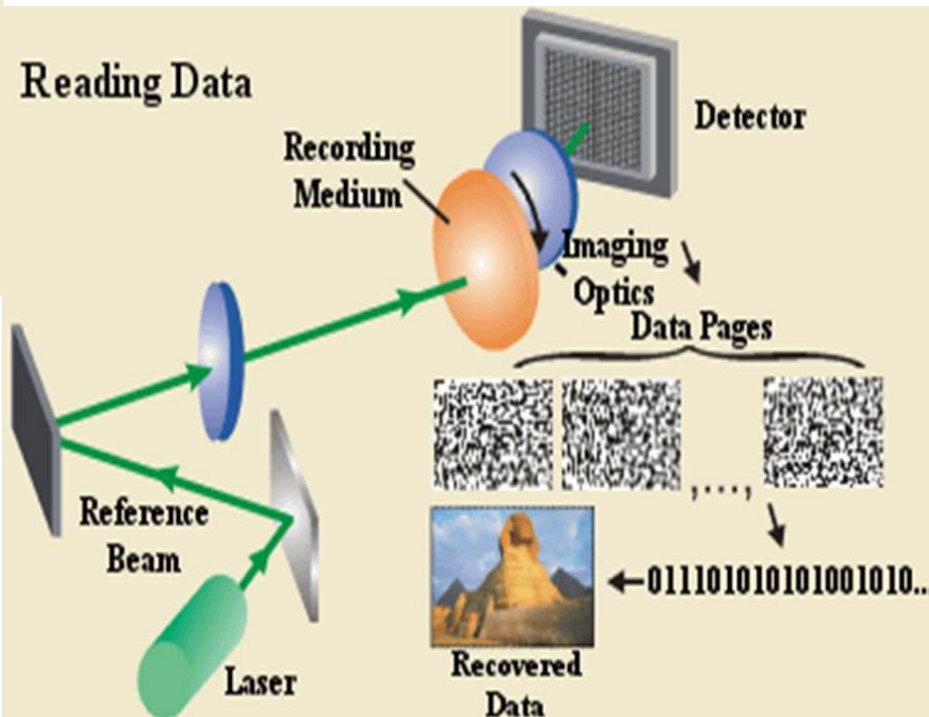
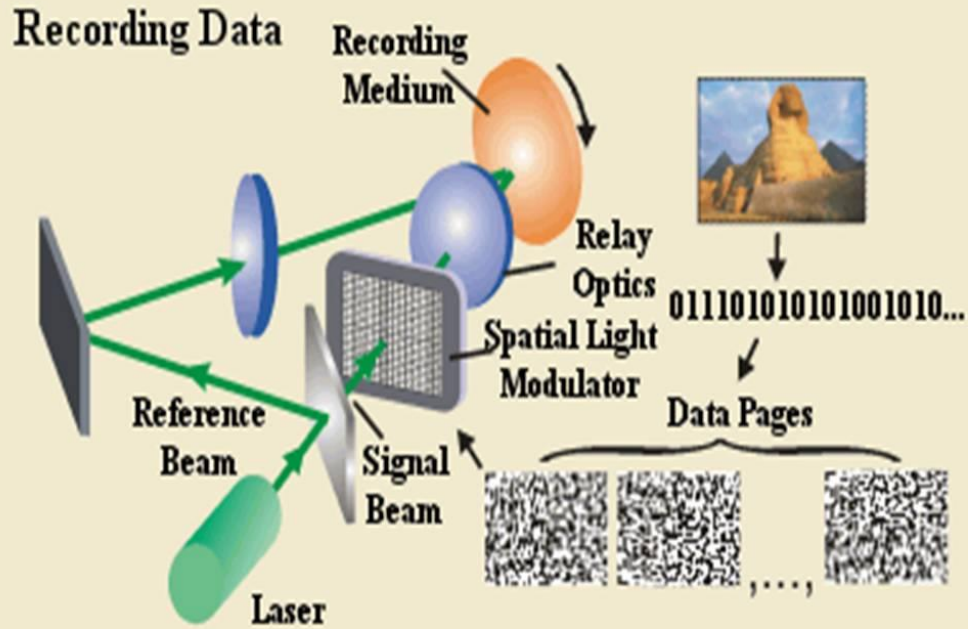


Pamięć skojarzeniowa – wystarczy niepełna informacja do odtworzenia zapisanych danych



Holografia

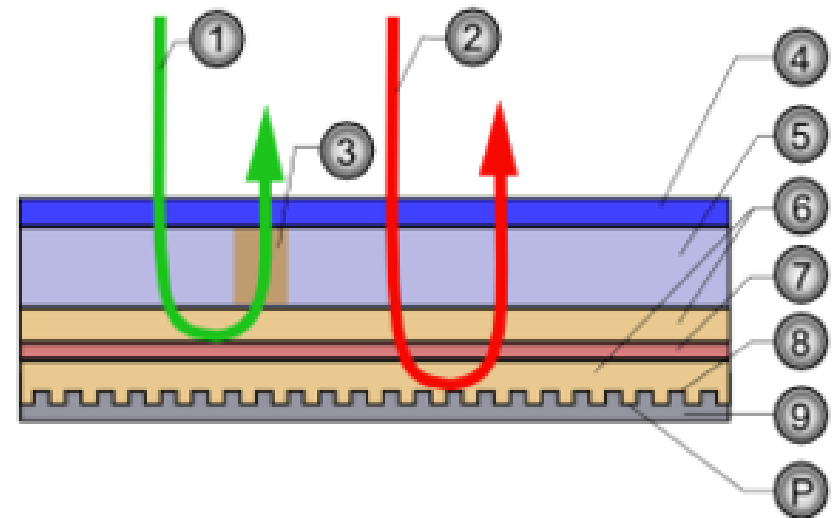
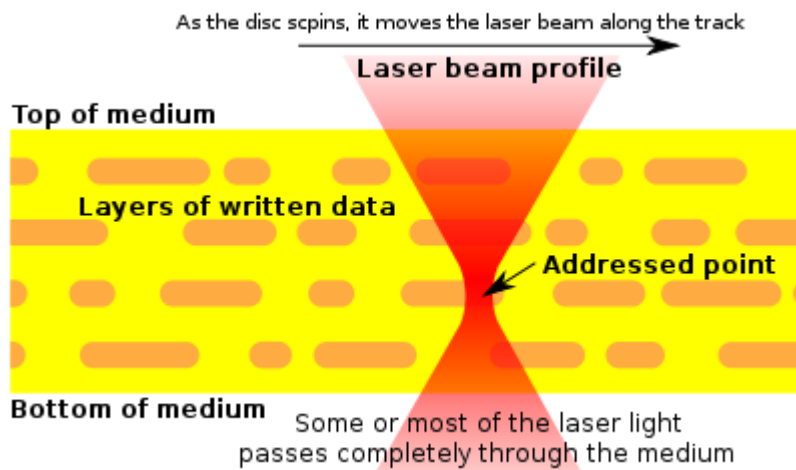
Pamięci holograficzne



Uniwersalny dysk holograficzny - Holographic Versatile Disc (6 TB)

Struktura płyty HVD

1. Zielony laser zapisu/odczytu (532nm)
2. Czerwony laser pozycjonujący/adresujący (650nm)
3. Hologram niosący informację
4. Warstwa poliwęglanowa
5. Warstwa fotopolimerowa (z danymi)
6. Warstwy dystansujące
7. Warstwa dichroiczna
8. Aluminiowa warstwa odbijająca
9. Podłoże przezroczyste
- P. PIT - wgłębienia



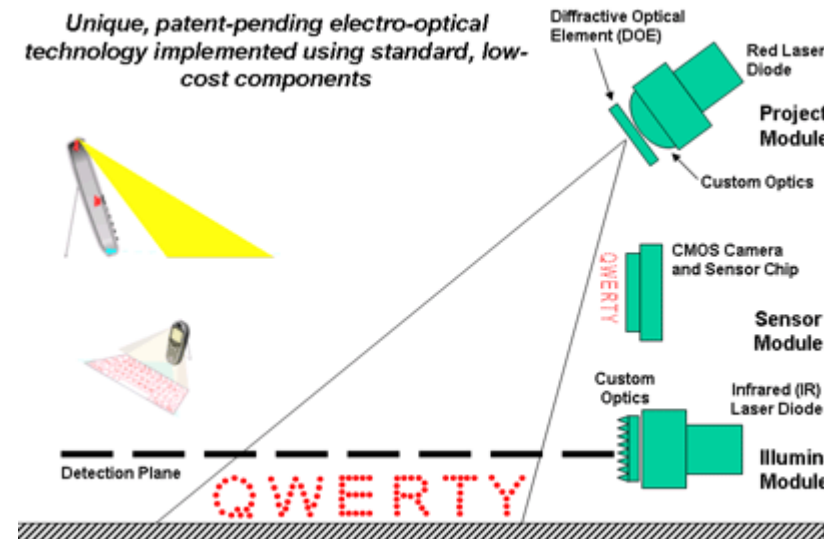
Holografia

optyczne elementy holograficzne (HOE)

Elementy optyczne typu:

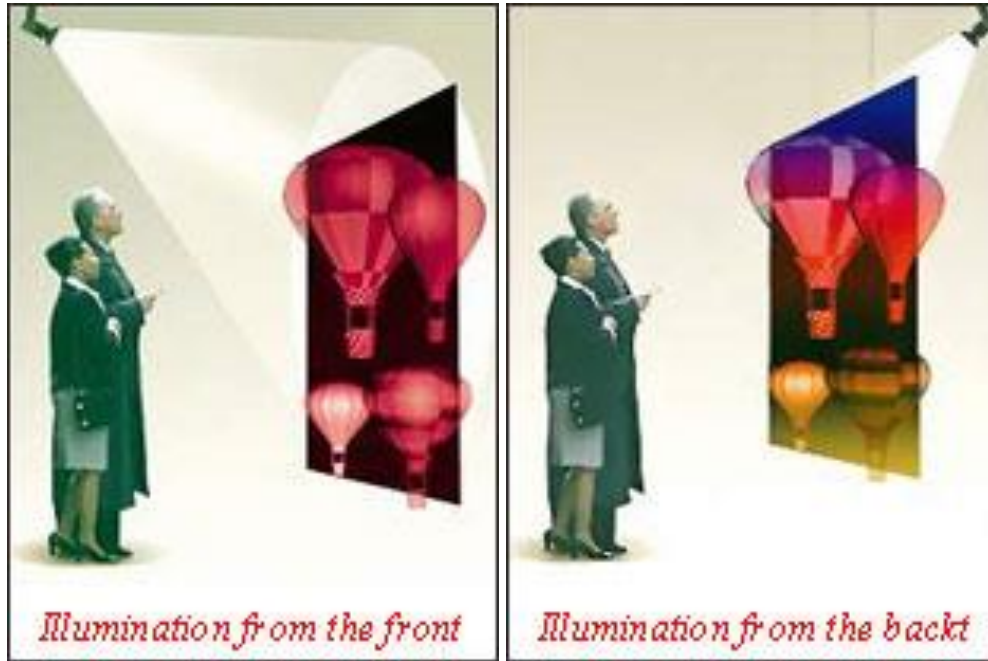
- Soczewka
- Pryzmat
- Zwierciadło
- Dzielnik wiązki
- Siatka

Wykonane metodami holograficznymi.



Holografia

Hologramy obrazowe



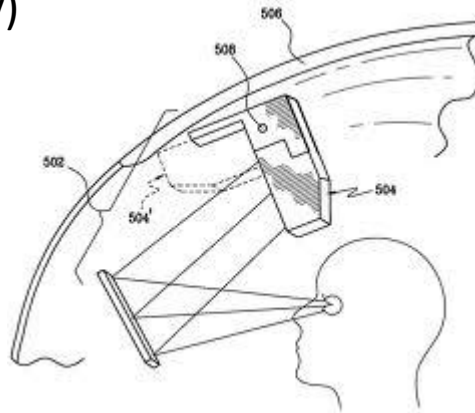
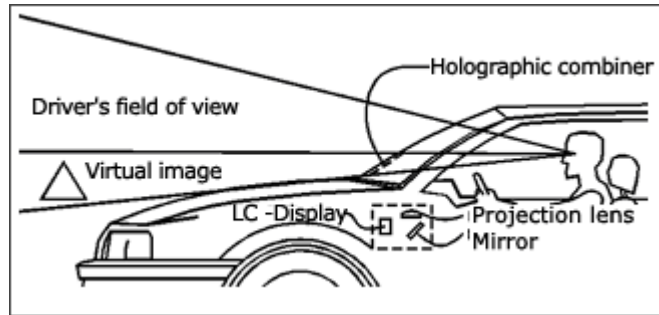
Holografia

zscape

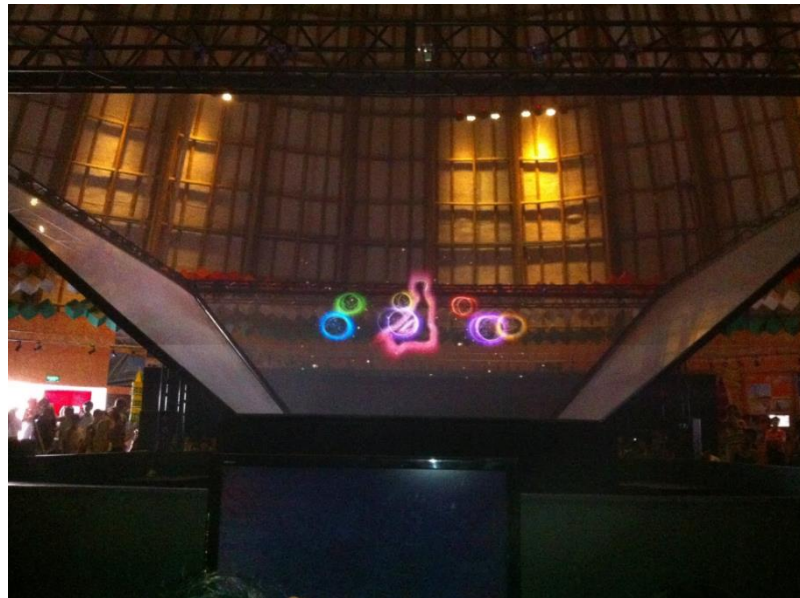


Holografia

Wyświetlacze HUD (Head-Up Display)

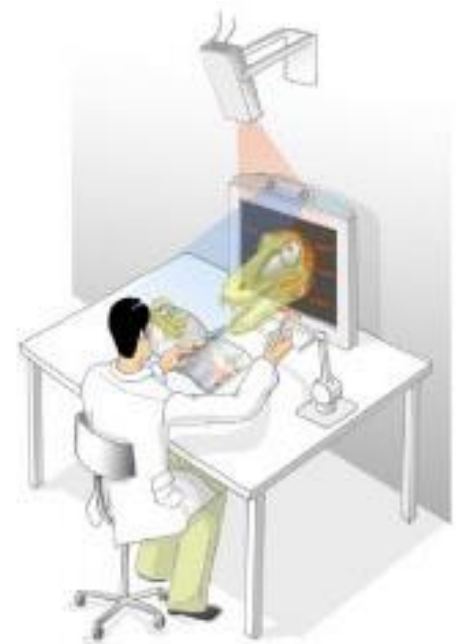


Ta sama zasada



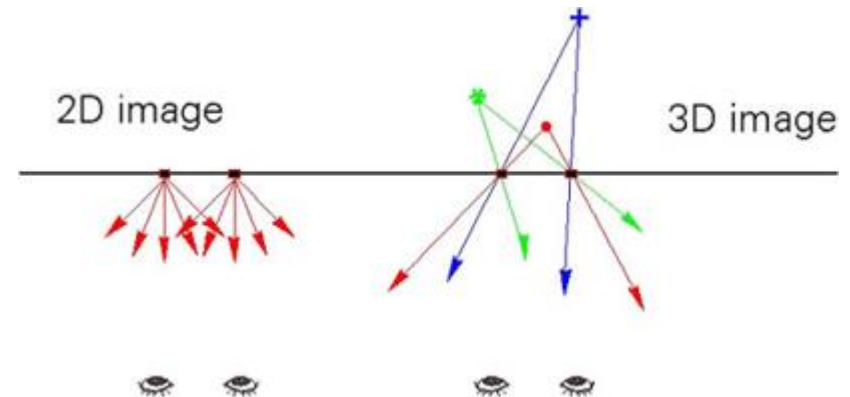
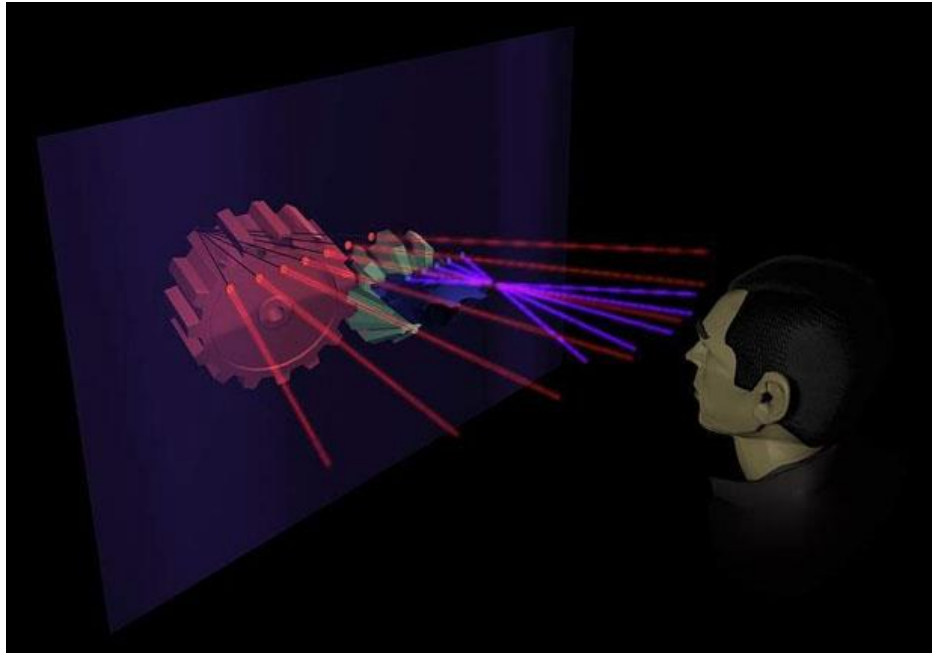
Holografia

Wyświetlacze holograficzne

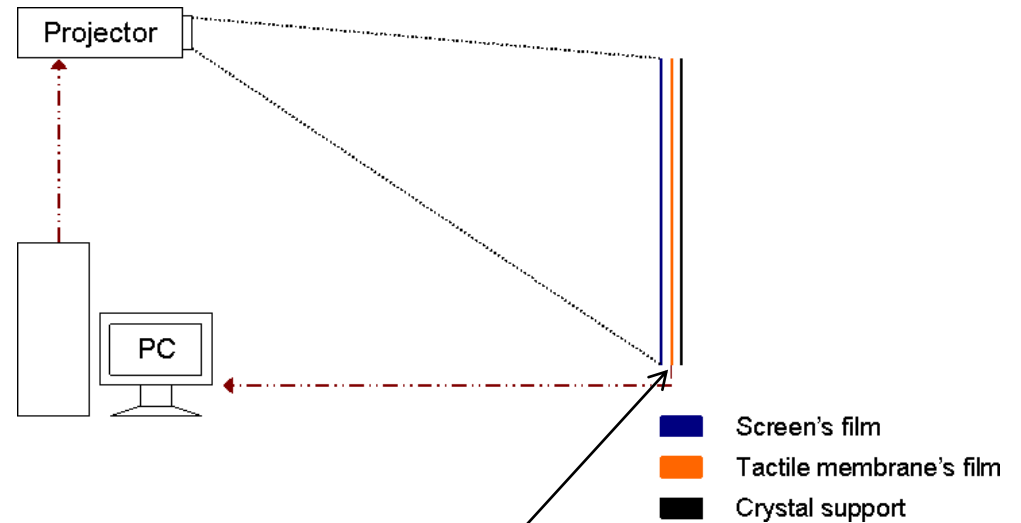


Holografia

holovizio



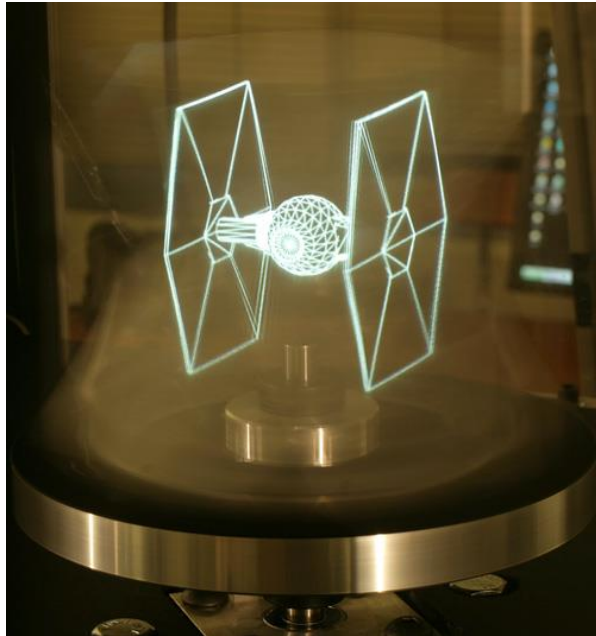
Holografia



Mikrosoczewki

Zapewniają ograniczone wrażenie głębi

Obracający się rozpraszacz

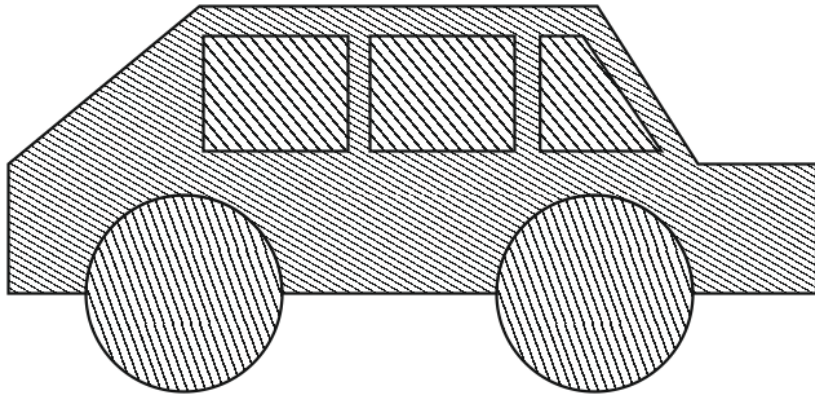


spinning mirror - "holographic diffuser"

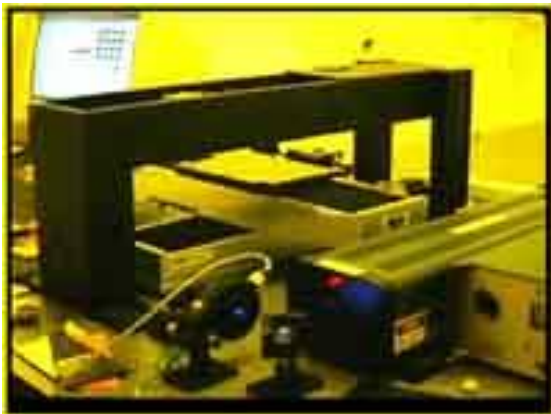
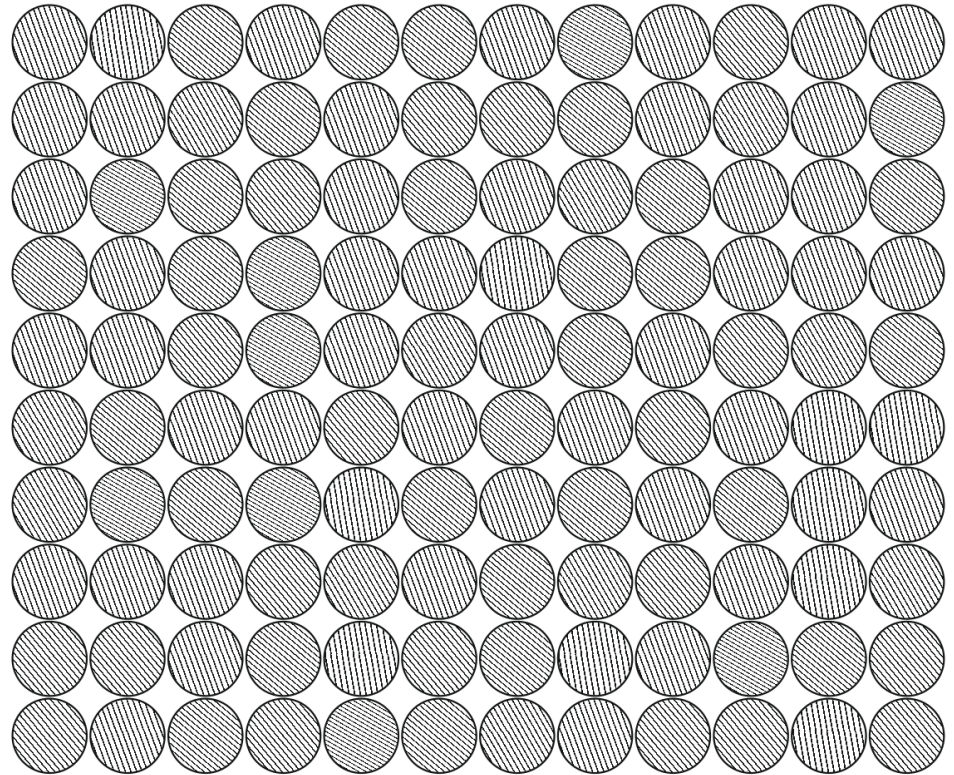


Drukarki holograficzne

Siatki dyfrakcyjne



Dot-matrix hologram

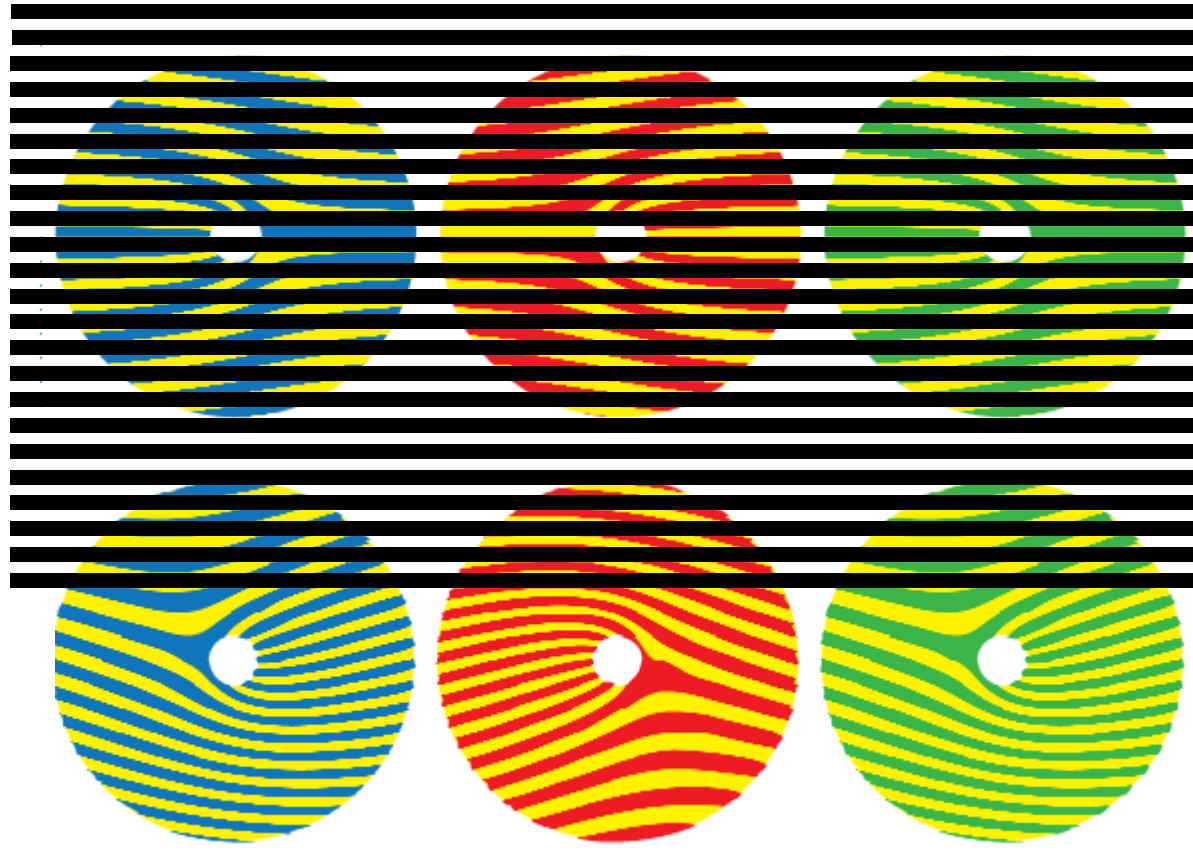


Holografia

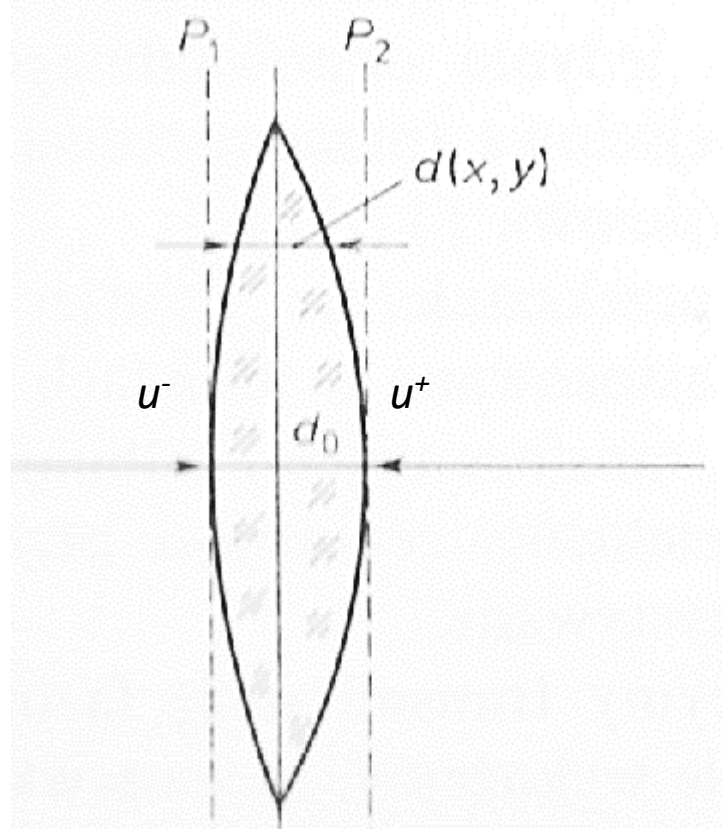
Kinemax (Polskie Systemy Holograficzne)



Kinegrams



Soczewka – przekształcenie fazy fali świetlnej



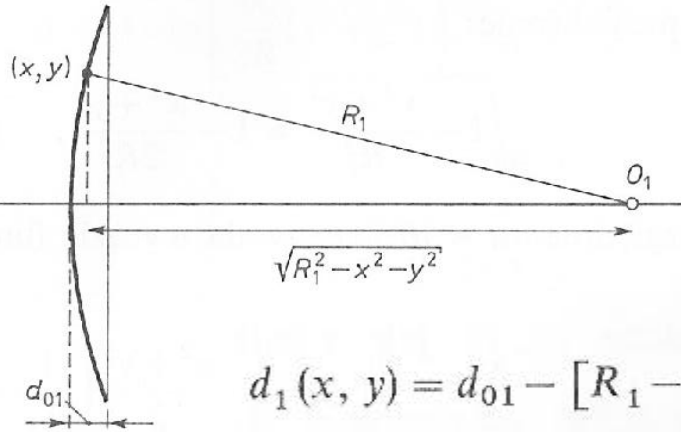
$$u^+(x, y) = \exp[i\varphi(x, y)] u^-(x, y)$$

$$\varphi(x, y) = knd(x, y) + k[d_0 - d(x, y)]$$

$$d(x, y) = d_1(x, y) + d_2(x, y),$$

Soczewka – przekształcenie fazy fali świetlnej

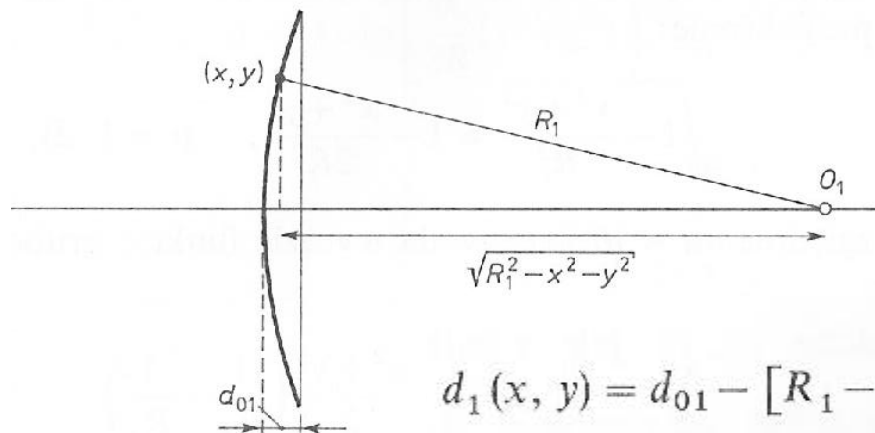
$$d(x, y) = d_1(x, y) + d_2(x, y),$$



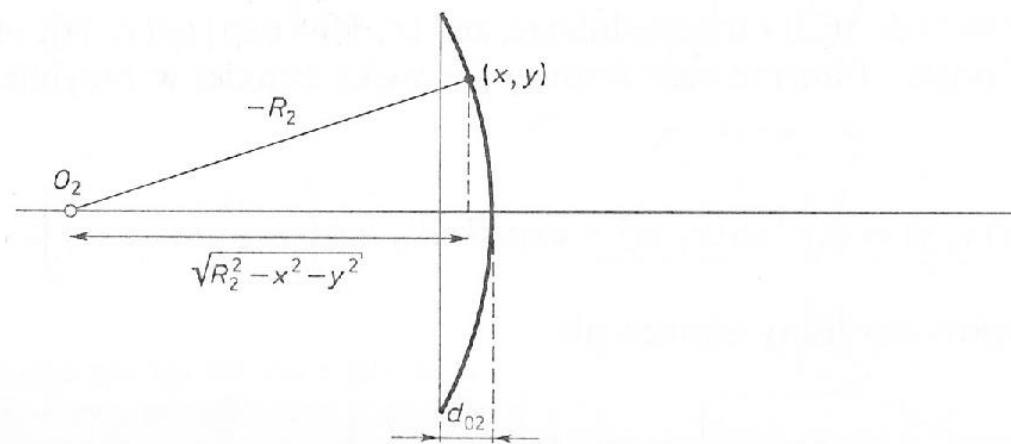
$$d_1(x, y) = d_{01} - [R_1 - \sqrt{R_1^2 - (x^2 + y^2)}] = d_{01} - R_1 \left[1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_1^2}} \right]$$

Soczewka – przekształcenie fazy fali świetlnej

$$d(x, y) = d_1(x, y) + d_2(x, y),$$



$$d_1(x, y) = d_{01} - [R_1 - \sqrt{R_1^2 - (x^2 + y^2)}] = d_{01} - R_1 \left[1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_1^2}} \right]$$



$$d_2(x, y) = d_{02} - [-R_2 - \sqrt{R_2^2 - (x^2 + y^2)}] = d_{02} + R_2 \left[1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_2^2}} \right]$$

Soczewka – przekształcenie fazy fali świetlnej

Dodajemy:

$$d(x, y) = d_0 - R_1 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_1^2}} \right) + R_2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_2^2}} \right).$$

Stosując przybliżenie przyosiowe:

$$\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_i^2}} \approx 1 - \frac{x^2 + y^2}{2R_i^2}, \quad (i = 1, 2),$$

Dostajemy:

$$d(x, y) = d_0 - \frac{x^2 + y^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Soczewka zmienia fazę fali świetlnej: $t(x, y) = \exp[i\varphi(x, y)],$

$$t(x, y) = \exp[i\varphi(x, y)] = \exp(iknd_0) \exp\left[-\frac{ik}{2f}(x^2 + y^2)\right]$$

gdzie: $\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$

Soczewka – przekształcenie fazy fali świetlnej

Rozważmy falę płaską padającą prostopadle na soczewkę o ogniskowej f :

$$u^+(x, y) = A \exp(iknd_0) \exp\left[-\frac{ik}{2f}(x^2 + y^2)\right],$$

A – amplituda padającej fali (przedmiot)

Stałe przesunięcie fazy

Fala sferyczna

Soczewka – przekształcenie fazy fali świetlnej

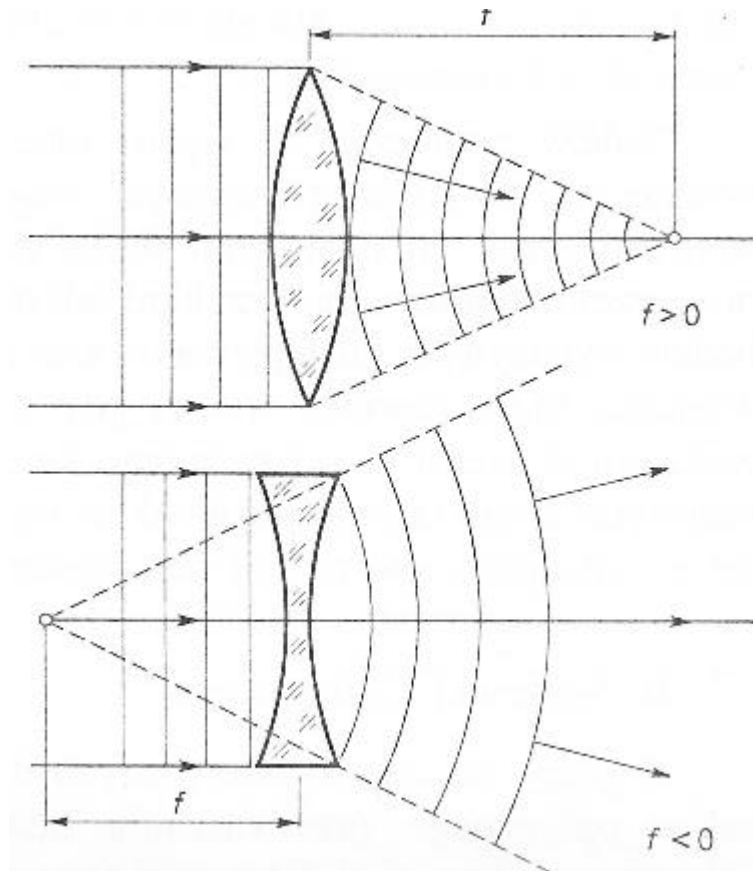
Rozważmy falę płaską padającą prostopadle na soczewkę o ogniskowej f :

$$u^+(x, y) = A \exp(iknd_0) \exp\left[-\frac{ik}{2f}(x^2 + y^2)\right],$$

A – amplituda padającej fali (przedmiot)

Stałe przesunięcie fazy

Fala sferyczna



Soczewka – przekształcenie fazy fali świetlnej

Jeśli oświetlimy soczewkę falą sferyczną:

$$u^-(x, y) = A \exp \left[\frac{ik}{2R} (x^2 + y^2) \right],$$

R – promień krzywizny powierzchni falowej.

$$\frac{1}{R_+} = \frac{1}{R_-} - \frac{1}{f}$$

R_-, R_+ – promień krzywizny przed i za soczewką.

Dla $R_- = f$ dostajemy $R_+ = \infty$

Gdy uwzględnimy aperturę soczewki i pominiemy stałą fazę:

$$t(x, y) = P(x, y) \exp \left[-\frac{ik}{2f} (x^2 + y^2) \right]$$

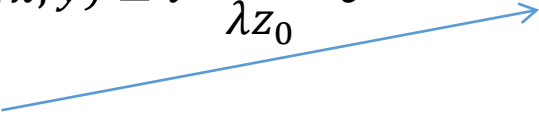
Soczewka jako element realizujący transformatę Fouriera 2D

Z wykładu 5, dyfrakcja:

$$U(x_0, y_0) = \iint_{x,y} h(x_0, y_0, x, y) U_S(x, y) dx dy$$

Dyfrakcja Fresnela:

$$h(x_0, y_0, x, y) \cong i \frac{e^{ik_0 z_0}}{\lambda z_0} e^{i \frac{k_0}{2z_0} \left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \right)}$$

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = x^2 + y^2 + x_0^2 + y_0^2 - 2(xx_0 + yy_0)$$


Soczewka jako element realizujący transformatę Fouriera 2D

Z wykładu 7, dyfrakcja:

$$U(x_0, y_0) = \iint_{x,y} h(x_0, y_0, x, y) U_S(x, y) dx dy$$

Dyfrakcja Fresnela:

$$h(x_0, y_0, x, y) \cong i \frac{e^{ik_0 z_0}}{\lambda z_0} e^{i \frac{k_0}{2z_0} ((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)}$$

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = x^2 + y^2 + \underbrace{x_0^2 + y_0^2} - 2 \underbrace{(xx_0 + yy_0)}$$

Dyfrakcja Fraunhofer:

$$h(x_0, y_0, x, y) \cong i \frac{e^{ik_0 z_0}}{\lambda z_0} e^{i \frac{k_0}{2z_0} (x_0^2 + y_0^2)} e^{i \frac{k_0}{z_0} (xx_0 + yy_0)}$$

Soczewka jako element realizujący transformatę Fouriera 2D

Dyfrakcja Fresnela:

$$h(x_0, y_0, x, y) = i \frac{e^{ik_0 z_0}}{\lambda z_0} e^{i \frac{k_0}{2z_0}(x^2 + y^2)} e^{i \frac{k_0}{2z_0}(x_0^2 + y_0^2)} e^{-i \frac{k_0}{2z_0}2(xx_0 + yy_0)}$$

Soczewka:

$$t(x, y) = P(x, y) \exp \left[-\frac{ik}{2f}(x^2 + y^2) \right]$$

Soczewka jako element realizujący transformatę Fouriera 2D

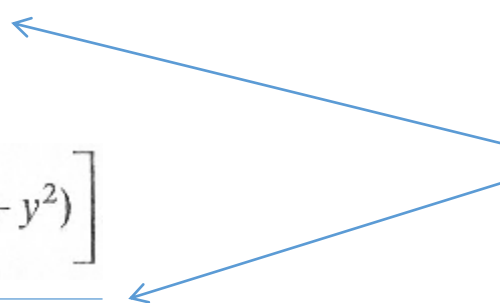
Dyfrakcja Fresnela:

$$h(x_0, y_0, x, y) = i \frac{e^{ik_0 z_0}}{\lambda z_0} e^{i \frac{k_0}{2z_0}(x^2 + y^2)} e^{i \frac{k_0}{2z_0}(x_0^2 + y_0^2)} e^{-i \frac{k_0}{2z_0} 2(xx_0 + yy_0)}$$

Soczewka:

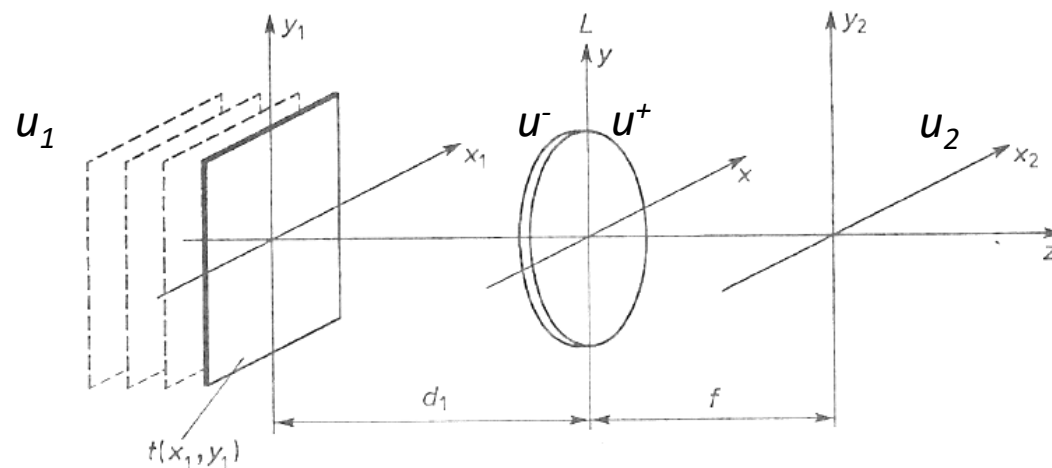
$$t(x, y) = P(x, y) \exp \left[-\frac{ik}{2f}(x^2 + y^2) \right]$$

Znoszą się !



Soczewka jako element realizujący transformatę Fouriera 2D

Przedmiot oświetlony falą płaską:



$$x_0 = x_2$$

$$u_1(x_1, y_1) = A t(x_1, y_1)$$

Dyfrakcja Fresnela pola u^+ :

$$u_2(x_2, y_2) = \frac{\exp(ikf)}{i\lambda f} \exp\left[\frac{ik}{2f}(x_2^2 + y_2^2)\right] \times \\ \times \iint_{-\infty}^{\infty} u^+(x, y) \exp\left[\frac{ik}{2f}(x^2 + y^2)\right] \exp\left[-\frac{ik}{f}(xx_2 + yy_2)\right] dx dy$$

Soczewka jako element realizujący transformatę Fouriera 2D

Pole u^+ to obraz u^- transformowany przez soczewkę:

$$u^+(x, y) = P(x, y) \exp \left[-\frac{ik}{2f} (x^2 + y^2) \right] u^-(x, y).$$

Soczewka jako element realizujący transformatę Fouriera 2D

Pole u^+ to obraz u^- transformowany przez soczewkę:

$$u^+(x, y) = P(x, y) \exp\left[-\frac{ik}{2f}(x^2 + y^2)\right] u^-(x, y).$$

$$u_2(x_2, y_2) = \frac{\exp(ikf)}{i\lambda f} \exp\left[\frac{ik}{2f}(x_2^2 + y_2^2)\right] \times$$

Znoszą się

$$\times \iint_{-\infty}^{\infty} u^+(x, y) \exp\left[\frac{ik}{2f}(x^2 + y^2)\right] \exp\left[-\frac{ik}{f}(xx_2 + yy_2)\right] dx dy$$

$$u_2(x_2, y_2) = C \exp\left[\frac{ik}{2f}(x_2^2 + y_2^2)\right] \iint_{-\infty}^{\infty} u^-(x, y) \exp\left[-\frac{i2\pi}{\lambda f}(xx_2 + yy_2)\right] dx dy$$

gdzie: $C = \frac{\exp(ikf)}{i\lambda f}.$

Soczewka jako element realizujący transformatę Fouriera 2D

$$u_2(x_2, y_2) = C \exp\left[\frac{ik}{2f}(x_2^2 + y_2^2)\right] \boxed{\iint_{-\infty}^{\infty} u^-(x, y) \exp\left[-\frac{i2\pi}{\lambda f}(xx_2 + yy_2)\right] dx dy}$$

Transformata Fouriera

$$u_2(x_2, y_2) = \frac{A}{i\lambda f} \exp\left[\frac{ik}{2f}\left(1 - \frac{d_1}{f}\right)(x_2^2 + y_2^2)\right] \times \\ \times \iint_{-\infty}^{\infty} t(x_1, y_1) \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda f}(x_1x_2 + y_1y_2)\right] dx_1 dy_1$$

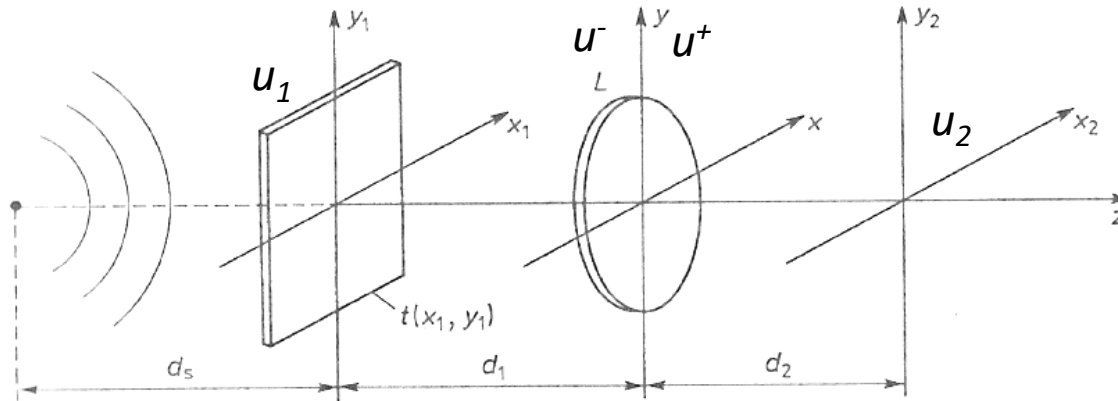
$$u_2(x_2, y_2) = \frac{A}{i\lambda f} \boxed{\exp\left[\frac{ik}{2f}\left(1 - \frac{d_1}{f}\right)(x_2^2 + y_2^2)\right]} \times \\ \times \mathcal{F}\left\{t(x_1, y_1) P\left(x_1 + \frac{d_1}{f}x_2, y_1 + \frac{d_1}{f}y_2\right)\right\},$$

←
Zeruje się gdy $d_1=f$

→
Transformata Fouriera apertury

Soczewka jako element realizujący transformatę Fouriera 2D

Przedmiot oświetlony falą sferyczną rozbieżną:



$$u_1(x_1, y_1) = \frac{1}{i\lambda d_s} \exp\left[\frac{ik}{2d_s}(x_1^2 + y_1^2)\right] t(x_1, y_1)$$

$$\begin{aligned} u_2(x_2, y_2) = & \frac{v}{i^2 \lambda^2 d_s d_1 d_2} \exp\left[\frac{ik}{2d_2}\left(1 - \frac{v}{d_2}\right)(x_2^2 + y_2^2)\right] \times \\ & \times \iint_{-\infty}^{\infty} t(x_1, y_1) \exp\left[\frac{ik}{2}\left(\frac{1}{d_s} + \frac{1}{d_1} - \frac{v}{d_1^2}\right)(x_1^2 + y_1^2)\right] \times \\ & \times \exp\left[-\frac{i2\pi}{\lambda}(x_1 x_2 + y_1 y_2) \frac{v}{d_1 d_2}\right] dx_1 dy_1, \end{aligned}$$

gdzie: $\frac{1}{v} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} - \frac{1}{f}$.

Soczewka jako element realizujący transformatę Fouriera 2D

Przedmiot oświetlony falą sferyczną rozbieżną:

$$u_2(x_2, y_2) = \frac{v}{i^2 \lambda^2 d_s d_1 d_2} \exp \left[\frac{ik}{2d_2} \left(1 - \frac{v}{d_2} \right) (x_2^2 + y_2^2) \right] \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t(x_1, y_1) \exp \left[\frac{ik}{2} \left(\frac{1}{d_s} + \frac{1}{d_1} - \frac{v}{d_1^2} \right) (x_1^2 + y_1^2) \right] \times$$
$$\times \exp \left[-\frac{i2\pi}{\lambda} (x_1 x_2 + y_1 y_2) \frac{v}{d_1 d_2} \right] dx_1 dy_1,$$

Transformata Fouriera

gdzie: $\frac{1}{v} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} - \frac{1}{f}.$

kiedy to się zeruje mamy transformatę Fouriera

Soczewka jako element realizujący transformatę Fouriera 2D

$$\frac{1}{d_s} + \frac{1}{d_1} - \frac{v}{d_1^2} = 0$$

uwzględniając $\frac{1}{v} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} - \frac{1}{f}$.

$$\frac{1}{d_3} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}$$

- wzór soczewkowy

$$d_3 = d_s + d_1$$

$$u_2(x_2, y_2) = \frac{1}{i\lambda f} \exp\left[\frac{ik}{2d_2} \frac{(d_1 + d_s)(f - d_1)}{d_s f} (x_2^2 + y_2^2)\right] \times$$

$$\times \iint_{-\infty}^{\infty} t(x_1, y_1) \exp\left[-\frac{i2\pi(d_s + d_1 - f)}{\lambda d_s f} (x_1 x_2 + y_1 y_2)\right] dx_1 dy_1$$

czynniki skalujący

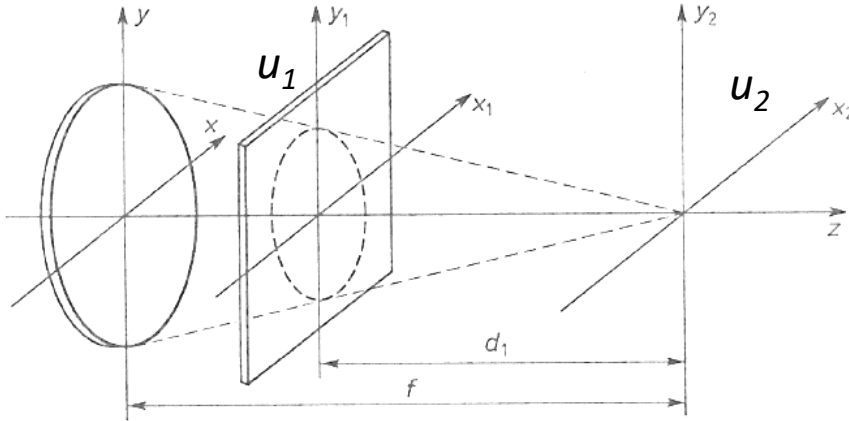
przeskalowana transformata Fouriera

Dla $d_1 = f$ skala transformata Fouriera jak przy fali płaskiej.

Zmiana skali możliwa przez zmianę: λ lub d_1

Soczewka jako element realizujący transformatę Fouriera 2D

Przedmiot oświetlony falą sferyczną zbieżną:



$$u_1(x_1, y_1) = \frac{Af}{d_1} \exp\left[-\frac{ik}{2d_1}(x_1^2 + y_1^2)\right] P\left(x_1 \frac{f}{d_1}, y_1 \frac{f}{d_1}\right) t(x_1, y_1).$$

$$u_2(x_2, y_2) = \frac{Af}{i\lambda d_1^2} \exp\left[\frac{ik}{2d_1}(x_2^2 + y_2^2)\right] \times \\ \times \iint_{-\infty}^{\infty} t(x_1, y_1) P\left(x_1 \frac{f}{d_1}, y_1 \frac{f}{d_1}\right) \exp\left[-\frac{i2\pi}{\lambda d_1}(x_1 x_2 + y_1 y_2)\right] dx_1 dy_1$$

czynniki skalujący