

PROCESY RADIACYJNE W ATMOSFERZE

Materiały do wykładu

Instytut Geofizyki, Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski
Krzysztof Markowicz

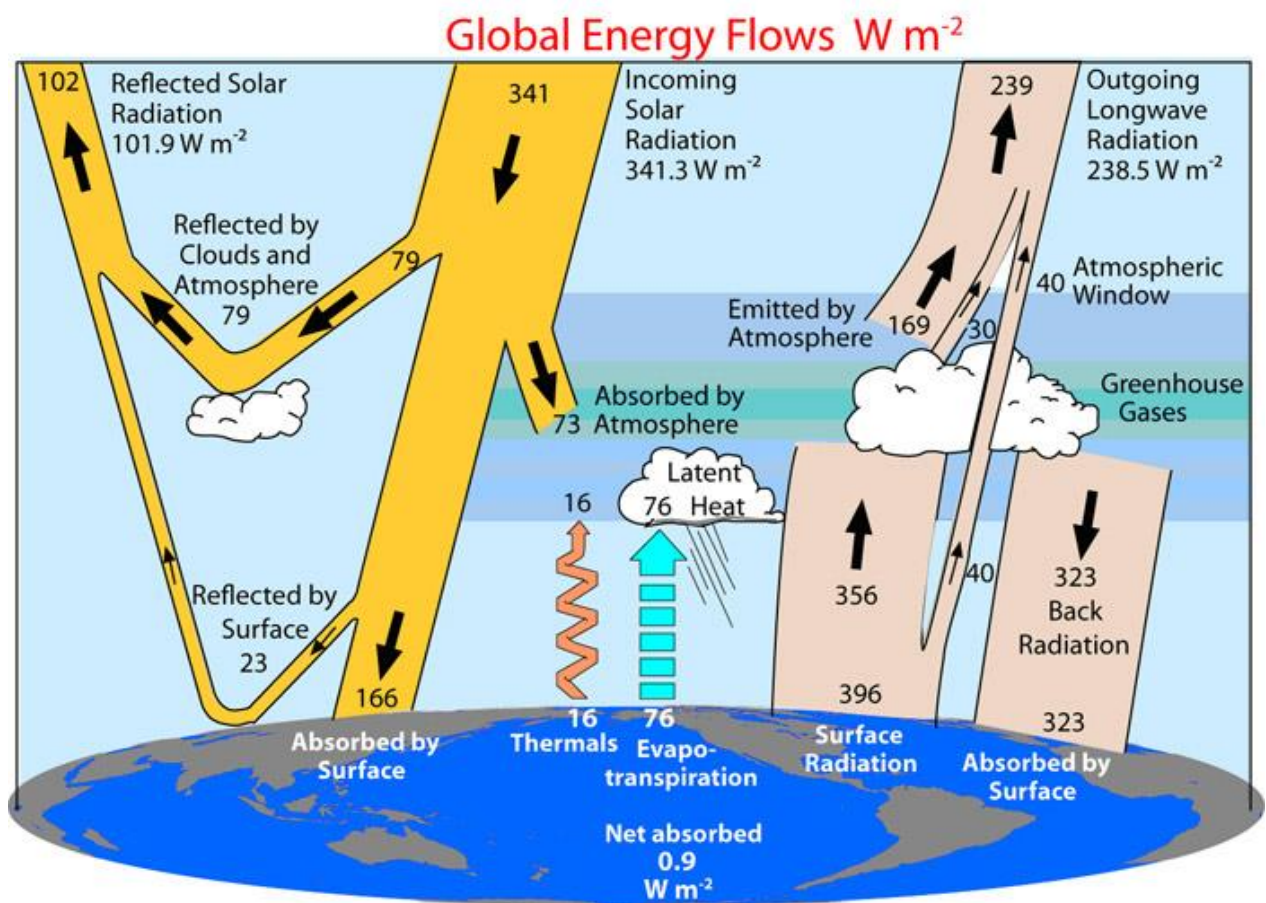
Warszawa, 2022

Spis treści

1.	Wprowadzenie do procesów radiacyjnych w atmosferze	3
1.1	Kąt bryłowy	4
1.2	Promieniowania elektromagnetyczne	5
1.3	Podstawowe wielkości radiacyjne	8
1.4	Promieniowanie ciała doskonale czarnego	10
1.5	Słońce, powierzchnia ziemi i atmosfera jako główne źródła promieniowania	14
2.	Absorpcja promieniowania w atmosferze	16
2.1	Współczynnik absorpcji i transmisja promieniowania	21
2.2	Absorpcja gazów atmosferycznych w podczerwieni	21
3.	Rozpraszanie promieniowania	24
3.1	Rozpraszanie Rayleigh'a	26
3.2	Rozpraszanie Lorenza-Mie	30
3.3	Anomalna teoria dyfrakcji	36
3.4	Macierz Muellera	38
3.5	Rozpraszanie na cząstkach niesferycznych	39
4.	Wstęp do równania transferu promieniowania	44
5.	Rozwiązanie równania transferu w zakresie termalnym	53
6.	Rozwiązanie równania transferu w zakresie promieniowania krótkofalowego	57
6.1	Przybliżenie pojedynczego rozpraszania	57
6.2	Metoda kolejnych rozprożeń	59
6.3	Probabilistyczny aspekt równania transferu – metoda Monte Carlo	61
7.	Ogólne rozwiązanie równania transferu	65
7.1	Przybliżenie 2-strumieniowe	67
7.2	Przybliżenie Eddingtona	70
8.	Pozostałe metody rozwiązania równania transferu	72
8.1	Metoda dodawania dwóch warstw (adding, doubling)	72
8.2	Metoda DISORT	74
8.3	Streamer jako przykład modelu transferu promieniowania w atmosferze	79

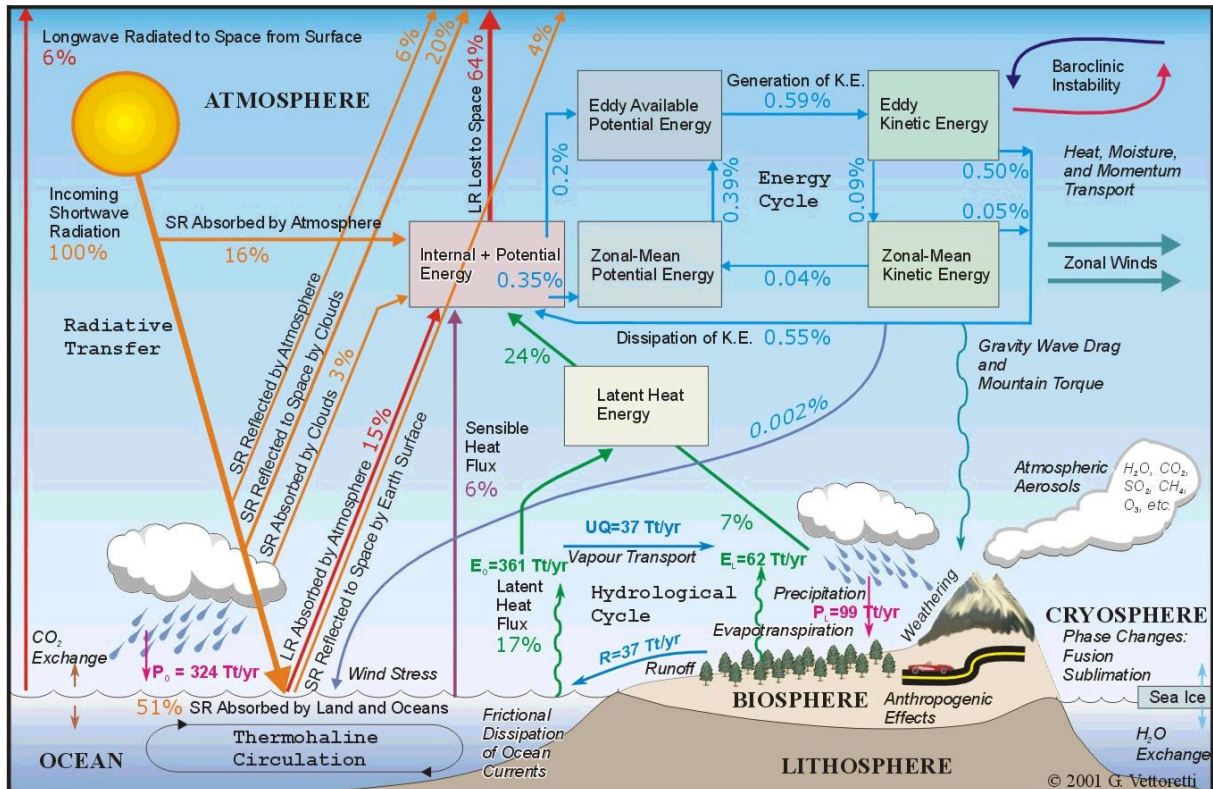
1. Wprowadzenie do procesów radiacyjnych w atmosferze

Procesy radiacyjne zachodzące w atmosferze, na powierzchni ziemi oraz w powierzchniowej warstwie oceanu odgrywają kluczową rolę w kształtowaniu się bilansu energii w systemie klimatycznym (rys 1.1). Promieniowanie emitowane przez Słońce i powierzchnię ziemi jest pochłaniane, rozpraszane oraz emitowane w atmosferze. Promieniowanie jest jednym z głównych źródeł energii w atmosferze oraz jest najważniejszą składową bilansu energii na powierzchni ziemi (rys. 1.2). Natomiast różnice przestrzenne w bilansie energii prowadzą do cyrkulacji powietrza zarówno w skali globalnej (np. cyrkulacja Hadley'a) jak i lokalnej (np. cyrkulacja górsko dolina czy cyrkulacja bryzowa).



Rys. 1.1 Bilans promieniowania słonecznego oraz ziemskiego atmosfery (Trenberth, K.E., J.T. Fasullo, and J. Kiehl, 2009).

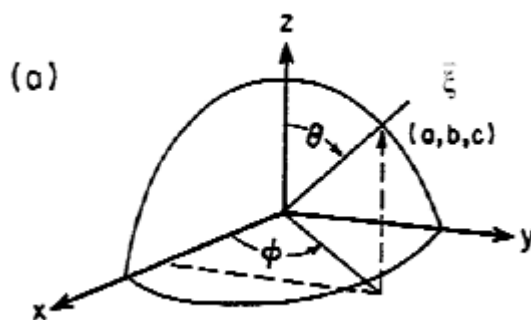
Pochłanianie promieniowania słonecznego ustala równowagę radiacyjną w stratosferze oraz ma kluczowe znaczenie dla równowagi radiacyjno-konwekcyjnej w troposferze. Dostarczana na drodze promieniowania energia stanowi z jednej strony impuls do zapoczątkowania konwekcji w dolnej troposferze, zaś w drugiej strony może ją hamować i prowadzić do stanów równowagi stabilnej.



Rys. 1.2 Strumienie energii pomiędzy powierzchnią Ziemi, atmosferą oraz przestrzenią kosmiczną wyrażone w procentach przychodzącego promieniowania słonecznego

1.1 Kąt bryłowy

Do opisu transferu promieniowania w atmosferze stosowany będzie sferyczny układ współrzędnych. Przez $\vec{\xi}$ oznaczany będzie wektor związany z kierunkiem propagującego się

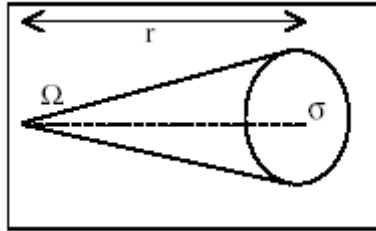


Rys. 1.3 Układ współrzędnych do opisu promieniowania elektromagnetycznego

promieniowaniem i określać go będziemy przez kąt zenitalny θ oraz azymutalny ϕ w układzie sferycznym. Kąt bryłowy oznaczany będzie przez Ω i zdefiniowany jako stosunek pola

powierzchni do kwadratu odległości: $\Omega = \frac{\sigma}{r^2}$ [sr]. Różniczkowy kąt bryłowy w układzie sferycznym ma postać:

$$d\Omega = \frac{d\sigma}{r^2} = \sin \theta d\theta d\phi,$$



Rys. 1.4 Definicja kąta bryłowego

Przykład: kąt bryłowy Słońca widzianego z Ziemi

$$\Omega_{\odot} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\theta} d\theta \sin \theta = 2\pi(1 - \cos \theta)$$

dla małych kątów θ , $\Omega_{\odot} = \pi\theta^2$

$$\theta_{\odot} \approx \frac{r_{\text{sun}}}{R_{\text{sun-earth}}} = 0.0046 \text{ rad} = 0.26^{\circ}$$

$$\Omega_{\odot} = 6.84 \times 10^{-5} \text{ sr}$$

1.2 Promieniowania elektromagnetyczne

Promieniowanie elektromagnetyczne jest poprzeczną falą generowaną przez oscylujące ładunki elektryczne. Prędkość propagacji fal elektromagnetycznych w ośrodku wynosi $v = c/n$, gdzie n jest współczynnikiem załamania i dla powietrza

w temperaturze pokojowej i widzialnym obszarze spektrum wynosi około 1.00029.

Rozważmy płaską falę elektromagnetyczną

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i\vec{k}\vec{x} - i\omega t)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 \exp(i\vec{k}\vec{x} - i\omega t).$$

Po podstawieniu do równań Maxwella

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

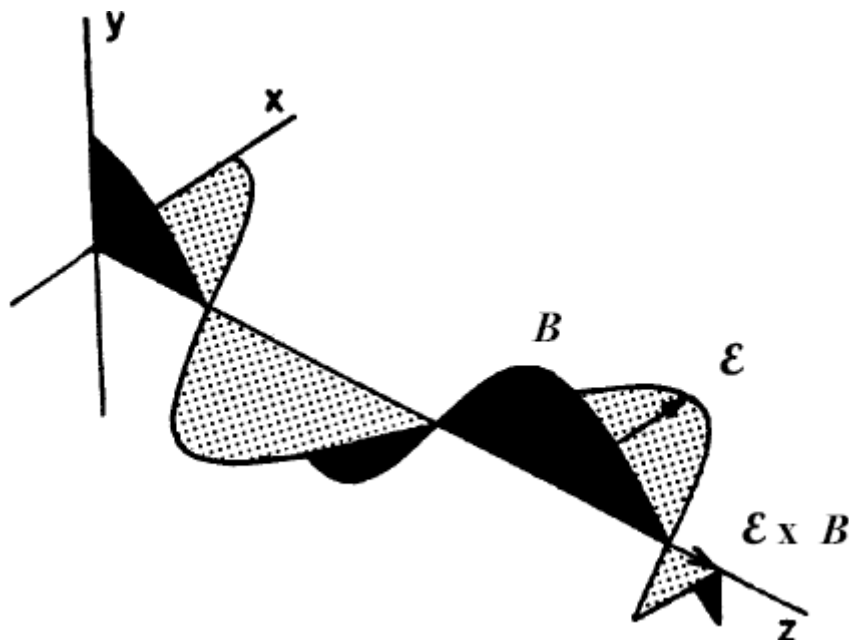
$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_F + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

oraz uwzględniając, że

$$\vec{J}_F = \sigma \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$$



Rys 1.5 Opis promieniowania elektromagnetycznego

otrzymujemy związki na stałe \vec{E}_0 oraz \vec{H}_0

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0$$

$$\vec{k} \cdot \vec{H}_0 = 0$$

$$\vec{k} \times \vec{E}_0 = \omega \mu \vec{H}_0$$

$$\vec{k} \times \vec{H}_0 = -\omega \epsilon \vec{E}_0$$

Mnożąc przedostatnie równie przez $\vec{k} \times$ a następnie wykorzystując ostatnie równie mamy

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}_0) = \omega \mu \vec{k} \times \vec{H}_0 = -\omega^2 \mu \epsilon \vec{E}_0.$$

Wykorzystując następnie tożsamość wektorową

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

otrzymujemy

$$\vec{k} \cdot \vec{k} = \omega^2 \epsilon \mu.$$

Wektor \vec{k} jest określony na płaszczyźnie zespolonej i ma postać

$$\vec{k} = \vec{k}' + i\vec{k}''.$$

Mamy stąd $|\vec{k}'| + i|\vec{k}''| = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$.

Korzystając ze związku

$$N = c \sqrt{\epsilon \mu},$$

gdzie N jest zespolonym współczynnikiem refrakcji ($N = n + im$) ostatecznie otrzymujemy

wzór na płaską falę elektromagnetyczną propagującą się w kierunku osi „z” w postaci

$$\vec{E} = E_0 \exp\left(-\frac{2\pi m z}{\lambda}\right) \exp\left(\frac{i 2\pi n z}{\lambda} - i\omega t\right) \hat{e}_z.$$

Pierwszy czynnik wykładniczy w powyższym równaniu związany jest z zanikiem amplitudy fali elektromagnetycznej i określony jest przez urojoną część współczynnika refrakcji. Rzeczywista część współczynnika refrakcji (współczynnik załamania światła) determinuje prędkość fazową fali.

Energia fal elektromagnetycznych na jednostkę powierzchni prostopadłej do kierunku poruszania i jednostkę czasu jest zdefiniowana przez wektor Poynting'a \vec{S} , gdzie

$$\vec{S} = c^2 \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{H}.$$

Ze względu na dużą zmienność czasową pola elektrycznego \vec{E} oraz magnetycznego \vec{H} w praktyce istotna jest uśredniona po czasie wartość wektora Poynting'a $\langle \vec{S} \rangle$. Biorąc pod uwagę, że pole elektryczne oraz magnetyczne ma postać harmoniczną $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(kx - \omega t)$

łatwo pokazać, że średnia wartość wektora Poynting'a wynosi

$$\langle \vec{S} \rangle \approx \frac{c \epsilon_0}{2} E_0^2.$$

Tak więc, energia fal elektromagnetycznych określona jest przez kwadrat amplitudy pola elektrycznego. Zauważmy, że natężenie promieniowania I jest proporcjonalne do czynnika

wykładniczego $\left[\exp\left(-\frac{2\pi m z}{\lambda}\right) \right]^2 = \exp\left(-\frac{4\pi m z}{\lambda}\right)$ zaś czynnik w wykładniku $\sigma = \frac{4\pi m}{\lambda}$ nosi nazwę współczynnika absorpcji.

Kompletny opis promieniowania wymaga wprowadzenia parametrów opisujących jego polaryzację. W 1852 Stokes zdefiniował następujące cztery parametry

$$I = E_1 E_1^* + E_r E_r^*,$$

$$Q = E_1 E_1^* - E_r E_r^*,$$

$$U = E_1 E_r^* + E_r E_1^*,$$

$$V = -i(E_1 E_r^* - E_r E_1^*),$$

gdzie E_1 oraz E_r są równoległą oraz prostopadłą składową wektora natężenia pola elektrycznego względem płaszczyzny odniesienia. Opisują one wibrację wektora \vec{E} oraz różnice fazy pomiędzy składowymi tego wektora. Zapisując składowe pola elektryczne w postaci harmoniczej

$$E_1 = a_1 \exp[-i(\xi + \delta_1)],$$

$$E_r = a_r \exp[-i(\xi + \delta_r)],$$

można pokazać, że wektor Stokes'a ma następujące współrzędne

$$I = a_1^2 + a_r^2$$

$$Q = a_1^2 - a_r^2$$

$$U = 2a_1 a_r \cos \delta$$

$$V = 2a_1 a_r \sin \delta$$

gdzie δ jest różnicą faz i wynosi $\delta = \delta_r - \delta_1$.

Powyższe wzory opisują pojedynczą falę jednak w rzeczywistość mierząc je dokonuje się uśredniania po wielu falach o niezależnej fazie. Dlatego do opisu polaryzacji używamy uśrednionych po czasie elementów wektora Stokes'a

$$I = \langle a_1^2 \rangle + \langle a_r^2 \rangle$$

$$Q = \langle a_1^2 \rangle - \langle a_r^2 \rangle$$

$$U = \langle 2a_1 a_r \cos \delta \rangle$$

$$V = \langle 2a_1 a_r \sin \delta \rangle$$

Dla światła słonecznego (całkowicie niespolaryzowanego) $Q=U=V=0$.

Istotnym parametrem w opisie polaryzacji promieniowania jest jego stopień polaryzacji.

Można zdefiniować stopień polaryzacji liniowej w następującej postaci

$$LP = \frac{\sqrt{Q^2 + U^2}}{I}$$

oraz stopień polaryzacji kołowej jako

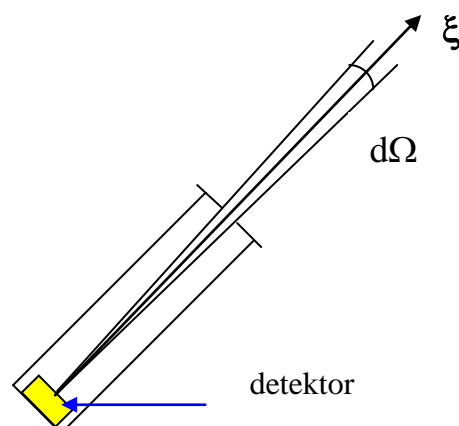
$$CP = \frac{V}{I}$$

1.3 Podstawowe wielkości radiacyjne

Radiancja (radiance/intensity) – ilość energii mierzonej w określonym kierunku w jednostce czasu dt na jednostkę powierzchni poziomej dA , kąta bryłowego $d\Omega$ oraz w wąskim przedziale spektralnym $d\lambda$.

$$I_\lambda = \frac{dE_\lambda}{\cos \theta d\Omega dA dt d\lambda}$$

jednostka: $\frac{W}{m^2 sr \mu m}$

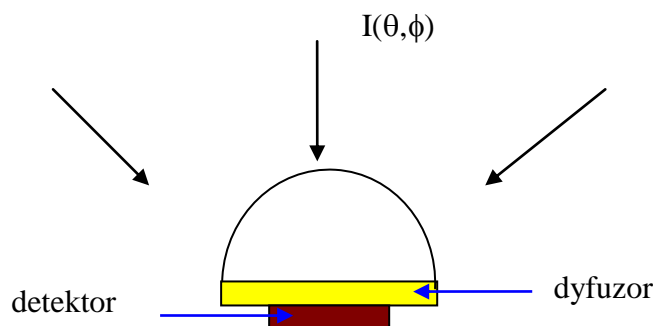


Rys. 1.6 Przyrząd do pomiaru radiancji nieba

W ogólnym przypadku radiacja w atmosferze jest funkcją wektora położenia \vec{r} , kierunku $\vec{\xi}$, długości fali oraz czasu. Zatem, zależy od siedmiu niezależnych zmiennych: trzech przestrzennych, dwóch kątów, długości fali lub częstotliwości i czasu. Jeśli radiacja nie zależy od kierunku promieniowania elektromagnetycznego wówczas nosi nazwę radiacji izotropowej, zaś, jeśli dodatkowo nie zależy od położenia w atmosferze wówczas radiacja jest **jednorodna**.

Strumień (Flux), natężenie promieniowania, irradiancja – ilość energii na jednostkę czasu przechodzącej przez jednostkową powierzchni dA dla wąskiego przedziału spektralnego dλ promieniowania elektromagnetycznego.

$$F_{\lambda} = \frac{dE_{\lambda}}{dA dt d\lambda}$$



Rys. 1.7 Przyrząd do pomiaru strumienia promieniowania

Strumień promieniowania związany jest z całkowitą energią promieniowania pochodzącą z górnej (rys. 1.7) lub dolnej półsfery.

Z definicji radiacji i strumienia promieniowania łatwo zauważyć, że związek tych wielkości

ma postać: $F_{\lambda} = \int_{\Omega} d\Omega I_{\lambda} \cos \theta$.

W układzie sferycznym związek ten ma postać: $F_{\lambda} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I_{\lambda}(\theta, \phi) \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi$.

Dla promieniowania izotropowego mamy prostą zależność $F_{\lambda} = \pi I_{\lambda}$.

Całkowita radiacja oraz strumień promieniowania są zdefiniowane wzorami:

$$F = \int_0^{\infty} d\lambda F_{\lambda} \quad \text{oraz} \quad I = \int_0^{\infty} d\lambda I_{\lambda}$$

Dodatkowo w przypadku strumienia promieniowania wyróżnia się:

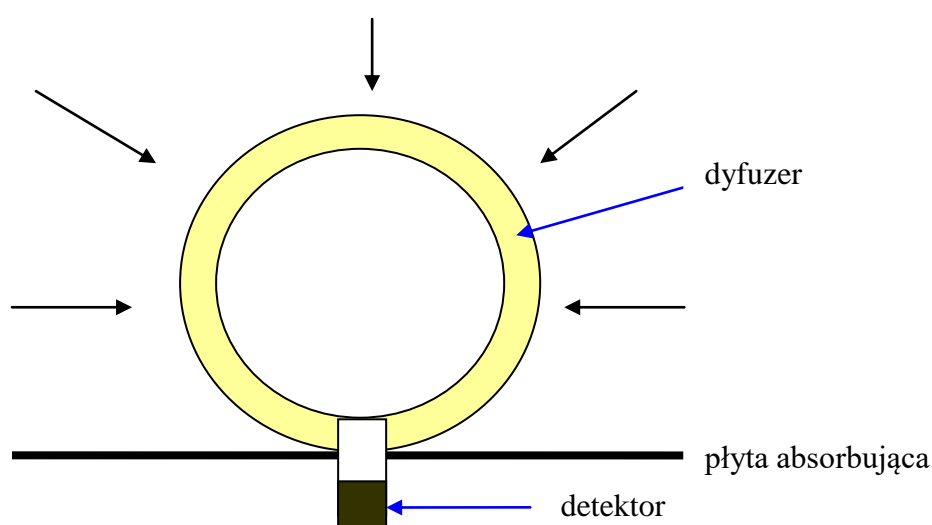
strumień promieniowania bezpośredniego - F_{dir} określający natężenie promieniowania słonecznego pochodzącego z kierunku tarczy słonecznej mierzone na jednostkową

powierzchnię prostopadłą do kierunku propagowania się promieniowania. Ponadto **strumień promieniowania rozproszonego** - F_{dif} zdefiniowany jako natężenie promieniowania rozproszonego na powierzchni płaskiej.

Skalarna irradiancja zdefiniowana jest następującym wzorem

$$F_{\text{o}\lambda} = \int_{\Omega} d\Omega I_{\lambda} .$$

Oznacza to, że skalarna irradiancja sumuje rozkład radiacji z tą samą wagą niezależnie od kąta padania promieniowania. Poniższy rysunek pokazuje schemat przyrządu do pomiaru skalarnej irradiancji dla promieniowania idącego w dół.



Rys. 1.8 Przyrząd do pomiaru skalarnej irradiancji

1.4 Promieniowanie ciała doskonale czarnego

Ciało doskonale czarne - to ciało fizyczne, które pochłania całkowicie padające na niego promieniowanie oraz emituje energię zgodnie z prawem Plancka.

Własności ciała doskonale czarnego:

- Promieniowanie jest izotropowe, jednorodne oraz niespolaryzowane.
- Dla danej długości fali promieniowanie zależy tylko od temperatury ciała.
- Jakikolwiek dwa ciała doskonale czarne o tej samej temperaturze emitują tę samą ilość energii
- Nie istnieją obiekty, które emitują więcej energii, niż ciała doskonale czarne

W równowadze termodynamicznej rozkład spektralny energii emitowanej przez ciało doskonale czarne opisywane jest wzorem Planck'a:

$$B_{\lambda}(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5 (e^{hc/k\lambda T} - 1)},$$

gdzie $h=6.626 \times 10^{-34}$ Js,

$$k=1.3806 \times 10^{-23} \text{ J/K}$$

Emitowana przez doskonale ciało doskonale czarne radiancja jest funkcją długości fali oraz jego temperatury. Całkowita radiancja ciała doskonale czarnego wyrażona jest wzorem:

$$B(T) = \int_0^{\infty} d\lambda B_{\lambda}(T) = \int_0^{\infty} d\lambda \frac{2hc^2}{\lambda^5 (e^{hc/K\lambda T} - 1)}$$

Podstawiając zmienna $x = hc / k\lambda T$ otrzymujemy:

$$B(T) = \frac{2k^4 T^4}{h^3 c^2} \int_0^{\infty} dx \frac{x^3}{e^x - 1}$$

całka oznaczona w powyższym wyrażeniu wynosi $\pi^4/15$. Tak więc całkowita energia wypromieniowania przez ciało doskonale czarne wyraża się wzorem:

$$B(T) = bT^4.$$

Ponieważ ciało doskonale czarne promieniuje energię **izotropowo**, dlatego strumień promieniowania wynosi

$$F = \pi B(T) = \sigma T^4,$$

gdzie σ jest stała Stefana-Boltzmann i wynosi $5.67 \times 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$. Powyższy wzór opisuje prawo Stefana-Boltzmann mówiące o tym, że ciało doskonale czarne promieniuje energie proporcjonalna do czwartej potęgi temperatury absolutnej.

Przykład

Promieniowanie ciała doskonale czarnego temperaturze $T=5650 \text{ K}$ jest 10^5 razy większe niż ciała o $T=300 \text{ K}$.

Jak wynika z rys 1.9 długość fali dla której emitowana jest maksymalna energia zależy od temperatury ciała doskonale czarnego. Różniczkując wzór Plancka po długości fali λ a następnie przyrównując pochodną do zera dochodzimy do prawa przesunięć **Wien'a**:

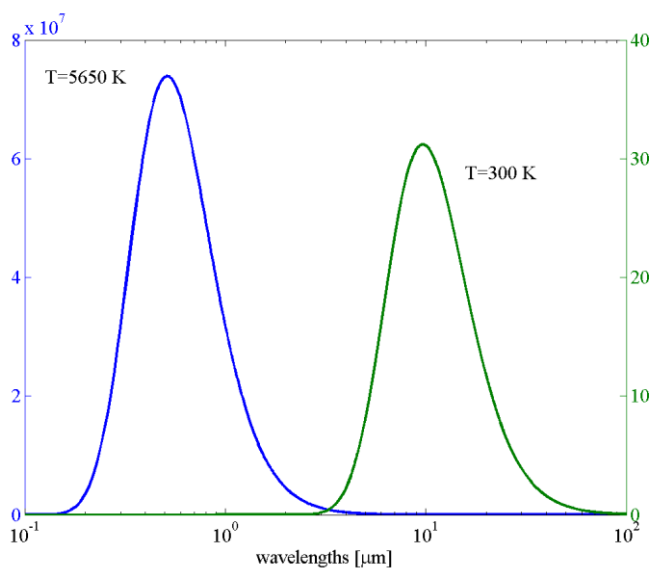
$$\lambda_{\max} = a/T,$$

gdzie $a=2.897 \times 10^{-3} \text{ mK}$.

Przykład

λ_{\max} dla $T=5650 \text{ K}$ wynosi około $0.5 \mu\text{m}$

λ_{\max} dla $T=300 \text{ K}$ wynosi około $10 \mu\text{m}$



Rys. 1.9 Promieniowanie ciała doskonale czarnego o temperaturze $T=5650\text{ K}$ oraz $T=300\text{ K}$

Prawo Kirchhoff'a

Wzór Planck'a opisujący promieniowanie ciała doskonale czarnego odnosi się do warunków równowagi termodynamicznej scharakteryzowanej przez stałą temperaturę ciała oraz izotropowe promieniowanie. Ponieważ ciało doskonale czarne jest w równowadze termodynamicznej z otoczeniem, emituje tyle samo energii co absorbuje.

Definiujemy następujące wielkości:

zdolność emisyjna ϵ_λ - jako stosunek emitowanej przez ciało fizyczne radiacji do radiacji emitowanej przez ciało doskonale czarne (wzór Planck'a) oraz

zdolność absorpcyjna A_λ - jako stosunek promieniowania absorbowanego przez ciało do funkcji Planck'a.

Tak więc w równowadze termodynamicznej mamy: $\epsilon_\lambda = A_\lambda$.

Dla ciała doskonale czarnego dla wszystkich długości fali spełniana jest zależność

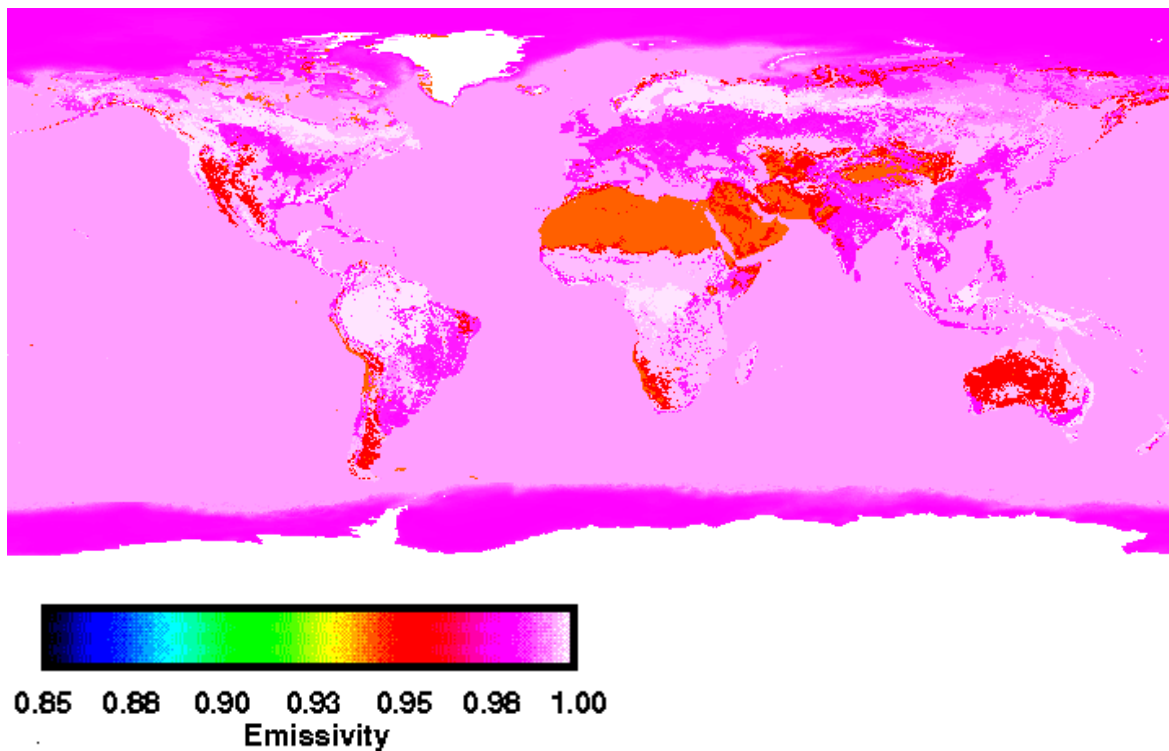
$$\epsilon_\lambda = A_\lambda = 1.$$

W przyrodzie ciała doskonale czarne nie występują, dlatego często definiuje się pojęcie **ciała doskonale szarego**, przez które rozumie się ciało, dla którego zdolność absorpcyjna A jest stała mniejsza od jedności ($A < 1$) i niezależna od długości fali. W tym przypadku całkowita energia emitowana przez ciało może być wyznaczana ze wzoru

$$F = \epsilon \sigma T^4,$$

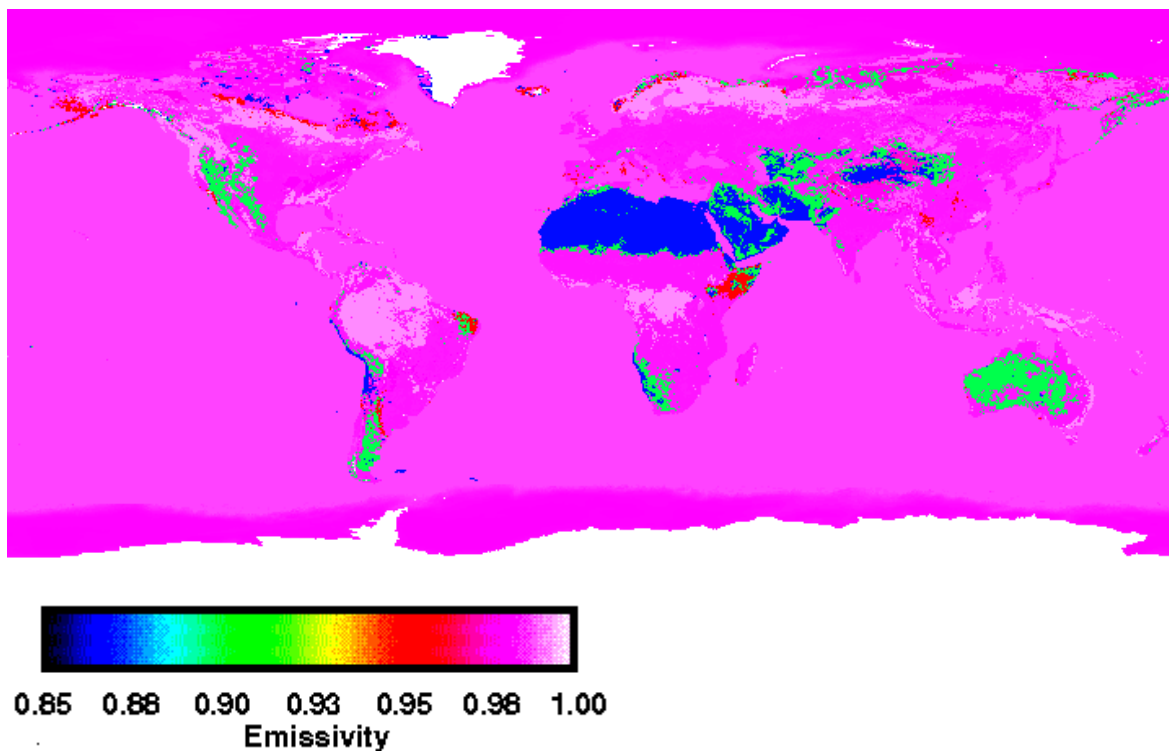
gdzie ϵ jest zdolnością emisyjną ciała doskonale szarego. W rzeczywistości jednak zdolność absorpcyjna oraz emisyjna ciał zależy od długości fali. W tym przypadku nie można explicitnie scałkować wzoru Planck'a.

Przykłady



Rys.1.10 Zdolność emisyjna dla promieniowania długofalowego

Surface	Emissivity
Water	0.993-0.998
Ice	0.98
Green grass	0.975-0.986
Sand	0.949-0.962
Snow	0.969-0.997
Granite	0.898



Rys. 1.11 Zdolność emisyjna w oknie atmosferycznym (8-12 μm)

1.5 Słońce, powierzchnia ziemi i atmosfera jako główne źródła promieniowania

Jak pokazano na Rys. 1.10 zdolność emisyjna powierzchni ziemi jest bliska jedności i dlatego przybliżenie powierzchni ziemi modelem ciała doskonale czarnego jest w pełni uzasadnione. Podobnie jest w przypadku Słońca.

Na Rys. 1.9 widoczne są widma promieniowania Słońca i Ziemi, wynika z nich, iż oba widma są w zasadzie rozłączne. W związku z tym rozpatrując promieniowanie w atmosferze można osobno analizować promieniowanie słoneczne oraz ziemskie. W nomenklaturze meteorologicznej to pierwsze nosi nazwę promieniowania krótko-falowego ($\lambda < 4 \mu\text{m}$), zaś drugie promieniowania długo-falowego ($\lambda > 4 \mu\text{m}$).

Podstawową wielkością w radiacji jest **stała słoneczna** określająca strumień promieniowania bezpośredniego pochodzący od Słońca i docierający do górnej granicy atmosfery. Wynosi ona 1368 Wm^{-2} i pomimo dość mylącej nazwy nie jest wielkością stałą, gdyż zależy od odległości Ziemi - Słońce. Zmienność stałej słonecznej w ciągu roku sięga $\pm 3.3 \%$ czyli około $\pm 45 \text{ Wm}^{-2}$. Oprócz odległości również aktywność Słońca ma wpływ na stałą słoneczną. Wyróżnia się cykl 11 oraz 81 letni w czasie, którego Słońce wzmacnia swoją aktywność zwiększając ilość energii wysyłanej w postaci promieniowania elektromagnetycznego. Jak pokazują wyniki pomiarów bezpośrednich i pośrednich zmiana stała słonecznej związana z aktywnością Słońca wynosi około $1-2 \text{ Wm}^{-2}$.

Promieniowanie słoneczne rozkłada się spektralnie w następujących proporcjach:

- 9 % promieniowanie UV ($\lambda < 0.4 \mu\text{m}$)
- 38 % promieniowanie widzialne ($0.4 < \lambda < 0.7 \mu\text{m}$).
- 53 % promieniowanie podczerwone ($\lambda > 0.7 \mu\text{m}$).

Promieniowanie ziemskie podlega większym zmianom niż promieniowanie słoneczne gdyż temperatura powierzchni ziemi zmienia się znacząco. Maksimum energii wypromieniowywanej przez Ziemię przypada na daleką podczerwień ($10 \mu\text{m}$).

2. Absorpcja promieniowania w atmosferze

Promieniowanie słoneczne i ziemskie podczas propagacji przez atmosferę ulega rozpraszaniu oraz absorpcji. Bezpośrednio z procesem absorpcji związana jest emisja promieniowania. Procesy te mają decydującą rolę na bilans promieniowania na powierzchni ziemi oraz w atmosferze. Znajomość ich jest kluczową podczas wyznaczenia transferu promieniowania w atmosferze. W ramach omawiania procesów absorpcji zamiast długości fali używać będziemy liczby falowej $k[\text{cm}^{-1}]$ ($k=10000/\lambda$) gdzie λ jest w μm

Absorpcja (emisja) promieniowania występuje podczas przejść elektronowych w atomach oraz cząsteczkach. Przy czym struktura pasm absorpcyjnych w przypadku tych ostatnich jest znacznie bardziej skomplikowaną ze względu na przejścia wibracyjne oraz rotacyjne. Wyróżniamy trzy typy spektrum

- Liniowe (Rys 2.1a)
- Pasmowe (Rys 2.1b)
- Ciągłe (kontinuum) (Rys 2.1c)

W celu przeanalizowania struktury widmowej cząsteczek niezbędne jest poznanie ich budowy geometrycznej. Występujące w atmosferze cząsteczki można podzielić na (rys. 2.2):

- Liniowe (CO_2 , N_2O , C_2H_2)
- Symetryczne (NH_3 , CH_3CL)
- Sferycznie symetryczne (CH_4)
- Asymetryczne (H_2O , O_3)

Całkowita energia cząsteczki wyrażona jest przez sumę $E = E_{\text{el}} + E_{\text{vib}} + E_{\text{rot}} + E_{\text{tr}}$, gdzie

E_{el} – energia potencjalna elektronów

E_{vib} – energia kinetyczna-wibracyjna energia cząsteczek

E_{rot} – energia kinetyczna ruchu obrotowego cząsteczek

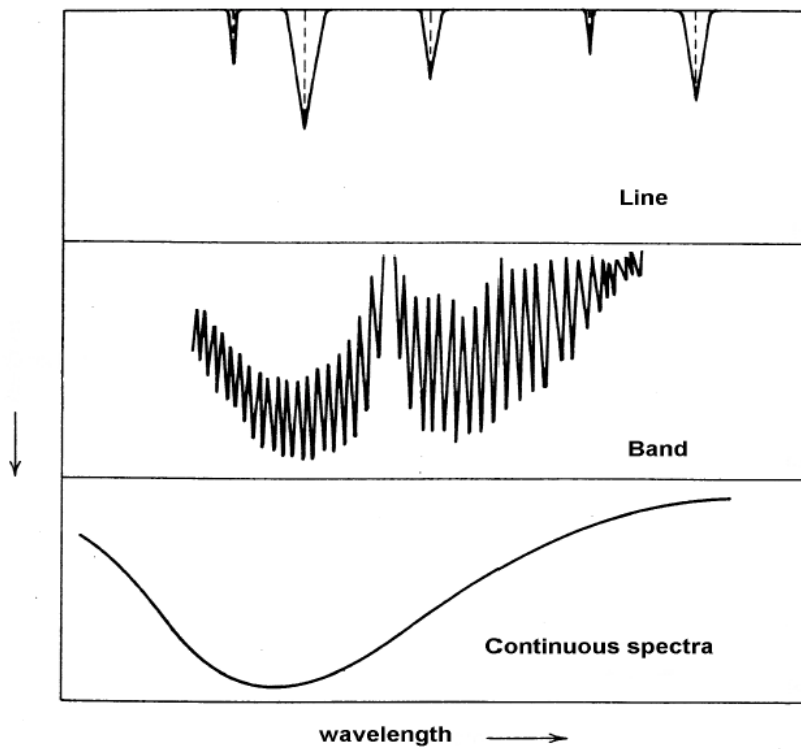
E_{tr} – energia kinetyczna wymiany podczas zderzania cząsteczek

Ze względu na fakt, iż energie cząsteczek spełniają relacje $E_{\text{rot}} < E_{\text{tr}} < E_{\text{vib}} < E_{\text{el}}$ wynika, że z przejściami elektronowymi związane są linie widmowe w obszarze widzialnym i ultrafioletu, z przejściami wibracyjnymi absorpcja promieniowania od bliskiej do dalekiej podczerwieni, z przejściami rotacyjnymi absorpcja w dalekiej podczerwieni oraz w obszarze mikrofal.

Monochromatyczne linie absorpcyjne nie są praktycznie nigdy obserwowane w przyrodzie, gdyż linie widmowe ulegają poszerzeniu. Wyróżnia się:

- Poszerzenie naturalne
- Poszerzenie dopplerowskie

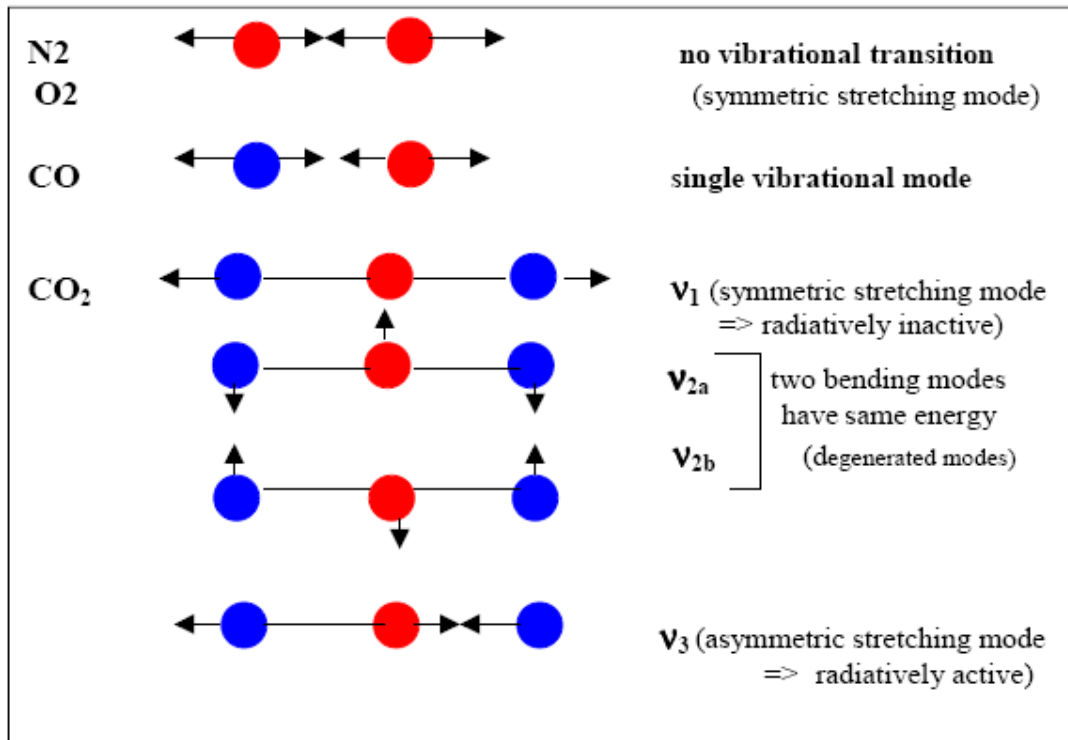
- Poszerzenie ciśnieniowe (zderzeniowe)



Rys. 2.1 Liniowe, pasmowe oraz ciągłe typy spektrum

Molecule	Structure	Permanent dipole moment	May acquire dipole moment
N ₂	N —●—●— N	No	No
O ₂	O —●—●— O	No	No
CO	C —●—●— O	Yes	Yes
CO ₂	O —●—●— C —●— O	No	Yes (in two vibrational modes)
N ₂ O	N —●—●— N —●— O	Yes	Yes
H ₂ O	<pre> ● / \ / \ / \ / \ / \ / \ / \ / \ / \ ● ● H H </pre>	Yes	Yes
O ₃	<pre> ● / \ / \ / \ / \ / \ / \ / \ / \ / \ ● ● O O </pre>	Yes	Yes
CH ₄	<pre> ● / \ / \ / \ / \ / \ / \ / \ / \ / \ ● ● H H </pre>	No	Yes (in two vibrational modes)

Rys. 2.2 Budowa geometryczna różnych cząsteczek spotykanych w atmosferze



Rys. 2.3 Wibracyjne mody własne cząsteczek dwu i trój atomowych.

Poszerzenie dopplerowskie wynika z przesunięcia częstotliwości fali emitowanej lub absorbowanej przez poruszające się cząsteczki. Atomy lub cząsteczki podlegające rozkładowi Maxwella będą miały różne prędkości, więc będą widziały fotony przesunięte w czerwoną lub niebieską stronę widma. W tym przypadku im wyższa temperatura gazu, tym większe są różnice w prędkościach i większe poszerzenie linii. Poszerzenie wskutek ciśnienia jest związane z modyfikacją poziomów energetycznych atomów lub cząsteczek podczas ich zderzenia. W tym przypadku poszerzenie zależy od gęstości gazu.

Opisując kształt linii widmowych poza częstotliwością podstawową ν_0 (długości fali) musimy uwzględnić szerokość rozkładu. Poszerzenie ciśnieniowe najczęściej opisywane jest przez profil Lorentz'a

$$f_L(\nu - \nu_0) = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{(\nu - \nu_0)^2 + \alpha^2}$$

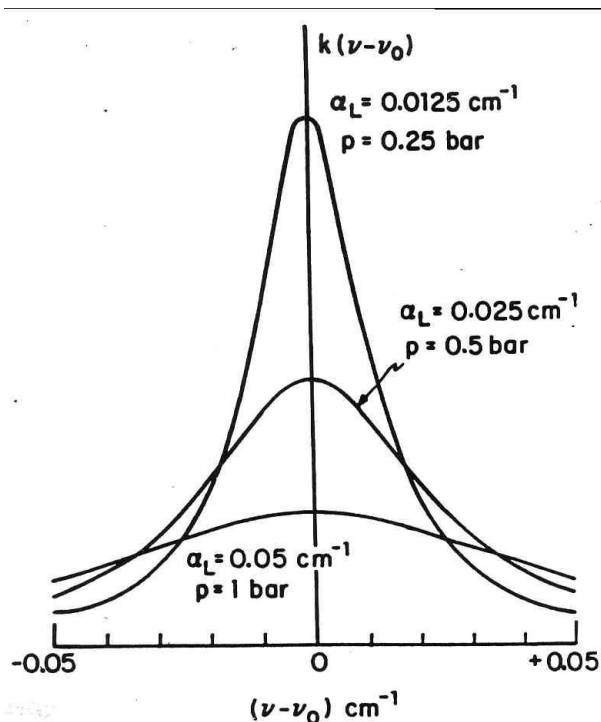
gdzie f_L jest parametrem kształtu zaś, ν_0 określa środek linii widmowej, α jest szerokością połówkową linii widmowej zdefiniowane wzorem:

$$\alpha(P, T) = \alpha_0 \frac{P}{P_0} \left(\frac{T_0}{T} \right)^{1/2}$$

gdzie α_0 jest szerokością połówkową dla warunków standardowych ($T=273\text{ K}$, $p=1013.25\text{ mb}$) i zmienia się w przedziale od 0.01 do 0.1 cm^{-1} dla większości optycznie czynnych gazów atmosferycznych.

Uwagi:

- Zależność kształtu linii widmowych od ciśnienia jest istotna w niższych warstwach atmosfery. Przyjmuje się, że poszerzenie ciśnieniowe ma znaczenie od powierzchni ziemi do 40 km , gdzie ciśnienie zmienia się o 3 rzędy wielkości.
- Profil Lorentza odgrywa fundamentalną rolę w transferze promieniowania w dolnej atmosferze.
- Zderzenia pomiędzy tymi samymi typami cząsteczek prowadzą do znacznie większego poszerzenia w porównaniu do zderzeń pomiędzy różnymi cząsteczkami. Ponieważ aktywne optycznie gazy w atmosferze mają małą koncentrację, więc dominuje drugi typ zderzeń molekuł.



Rys. 2.4 Poszerzenie ciśnieniowe dla linii o szerokości połówkowej 0.05 cm^{-2} w zależności od ciśnienia atmosferycznego.

Poszerzenie Dopplerowskie opisywane jest przy pomocy parametru kształtu f_d w postaci:

$$f_D(\tilde{\nu} - \tilde{\nu}_0) = \frac{1}{\alpha_D \sqrt{\pi}} \exp \left[- \left(\frac{\tilde{\nu} - \tilde{\nu}_0}{\alpha_D} \right)^2 \right]$$

gdzie α_d jest szerokością połówkową w [cm^{-1}] i wyraża się wzorem

$$\alpha_D = \frac{\tilde{\nu}_0}{c} \sqrt{2k_B T / m} = 4.3 \times 10^{-7} \tilde{\nu}_0 \sqrt{T / M_A}$$

gdzie m jest masą molekuly, zaś M_A jest masą atomowa molekuly lub atomu.

Przykład:

Rozważmy poszerzenie linii absorpcyjną CO dla liczby falowe 2140 cm^{-1} w temperaturze 300K

$$\alpha_D = \frac{\tilde{\nu}_0}{3 \times 10^8} \sqrt{2 \times 1.38 \times 10^{-23} \times 300 / 29 \times 1.66 \times 10^{-27}} = 4.3 \times 10^{-7} 2140 \sqrt{300 / 29} = 3 \times 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$$

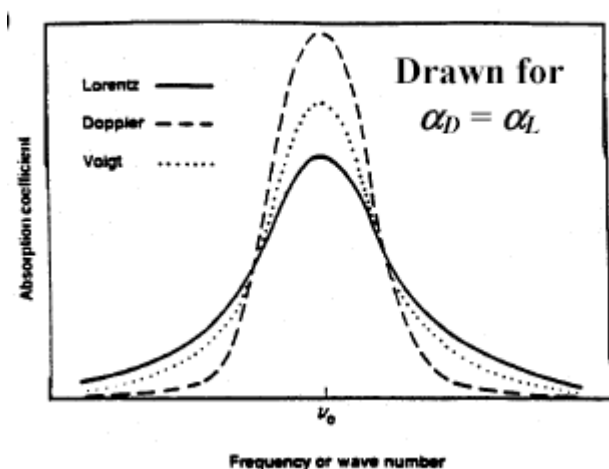
Uwagi:

- Poszerzenie dopplerowskie jest istotne na wysokości od 20 do 50 km.

Poszerzenie ciśnieniowe oraz dopplerowskie nie może być rozważane oddzielnie w obszarze niskiego ciśnienia (około 40 km nad powierzchnia ziemi), dlatego do opisu linii widmowych stosuje się tzw. profil Voigt zdefiniowany w następujący sposób

$$f_{\text{Voigt}}(\tilde{\nu} - \tilde{\nu}_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f_L(\tilde{\nu}' - \tilde{\nu}_0) f_D(\tilde{\nu} - \tilde{\nu}') d\nu' =$$

$$\frac{\alpha}{\alpha_D \pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\tilde{\nu}' - \tilde{\nu}_0)^2 + \alpha^2} \exp\left[-\left(\frac{\tilde{\nu} - \tilde{\nu}'}{\alpha_D}\right)^2\right] d\nu'$$



Rys. 2.5 Profil Lorentza, Dopplera, Voigta

Właściwości profilu Voigt'a

- Dla wysokiego ciśnienia poszerzenie dopplerowskie jest wąskie, dlatego profil Voigt'a jest taki sam jak Lorentza.
- Dla niskiego ciśnienia zachowanie profilu Voigt'a jest bardziej skomplikowane i trudno w nim odróżnić poszerzenie dopplerowskie od ciśnieniowego.

2.1 Współczynnik absorpcji i transmisja promieniowania

Współczynnik absorpcji (masowy współczynnik absorpcji) zdefiniowany jest przez położenie (w przestrzeni częstotliwości), intensywność linii widmowej oraz jej kształt i wyraża się wzorem

$$k_\nu = S f(\nu - \nu_0)$$

gdzie S i f spełniają związki:

$$S = \int k_\nu d\nu$$

$$\int f(\nu - \nu_0) d\nu = 1$$

Transmisję promieniowania monochromatycznego T_ν definiujemy jako

$$T_\nu = \exp(-\tau_\nu)$$

gdzie τ_ν jest grubością optyczną zdefiniowaną przez współczynnik absorpcji

$$\tau = \int_{u_1}^{u_2} k_\nu du$$

gdzie u jest drogą optyczną

$$u = \int_{z_1}^{z_2} \rho(z) dz$$

Zauważmy, że jednostką tak zdefiniowanego współczynnika absorpcji jest $[\text{kg}^{-1}\text{m}^2]$ i dlatego nosi on nazwę masowego współczynnika absorpcji w odróżnieniu od współczynnika absorpcji, którego jednostką jest $[\text{m}^{-1}]$. Ten ostatni jest iloczynem przekroju czynnego na absorpcję oraz koncentracji cząstek w jednostkowej objętości. Ponadto zdefiniowana powyżej transmisja promieniowania zmienia się od jedności do zera.

Uwagi

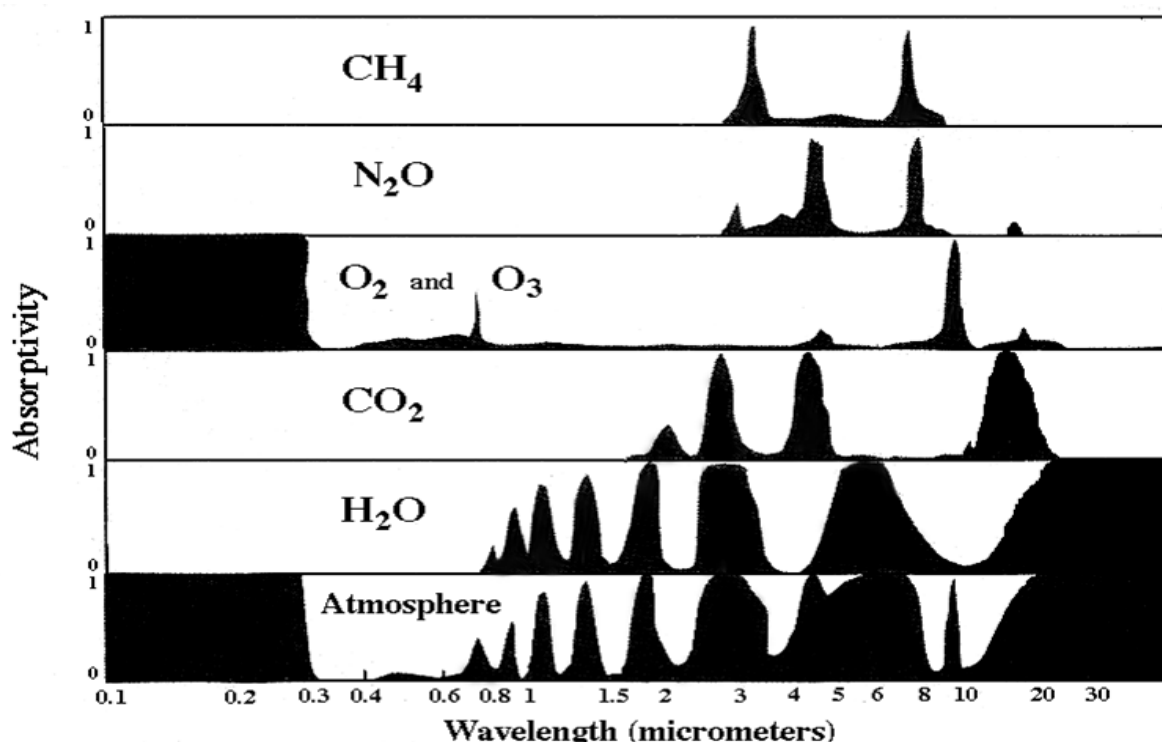
- wzór na transmisję jest poprawny tylko wtedy, gdy atmosfera jest horyzontalnie jednorodna lub, gdy promieniowanie propaguje się pionowo w górę lub w dół.
- gdy k_ν jest stałe wzdłuż kierunku propagacji $\tau_\nu = \kappa_\nu u$
- τ_ν zależy w ogólności od częstotliwości oraz drogi optycznej

2.2 Absorpcja gazów atmosferycznych w podczerwieni

Promieniowanie ziemskie oddziałuje silnie z gazami atmosferycznymi a w szczególności z parą wodną oraz dwutlenkiem węgla i ozonem. W związku z tym, znaczna część promieniowania ziemskiego emitowanego przez powierzchnię ziemi jest absorbowana w atmosferze. Jedynie w obszarze tzw. **okna atmosferycznego** (8-12 μm) absorpcja promieniowania jest niewielka poza obszarem około 9.6 μm , gdzie występuje pasmo

absorpcyjne ozonu. Promieniowanie o długość fali większej od 14 μm jest całkowicie absorbowane w atmosferze przez widmo kontinuum CO_2 i pary wodnej.

Współczynniki absorpcji najważniejszych gazów atmosferycznych opisane są w bazie danych HITRAN (<http://www.cfa.harvard.edu/hitran/>). Wartości tych współczynników zdefiniowane są jako funkcję temperatury, ciśnienia oraz długości fali. Baza danych stale jest udoskonalana i regularnie wydawana jest kolejna edycja. Wyniki obserwowanych w atmosferze oraz obliczanych teoretycznie współczynników absorpcji różnią się dla pewnych gazów. Przykładem jest tu para wodna, przypadku której różnica prawdopodobnie wynika z faktu pominięcia, w obliczeniach numerycznych, istnienia dimerów wody występującej w atmosferze.

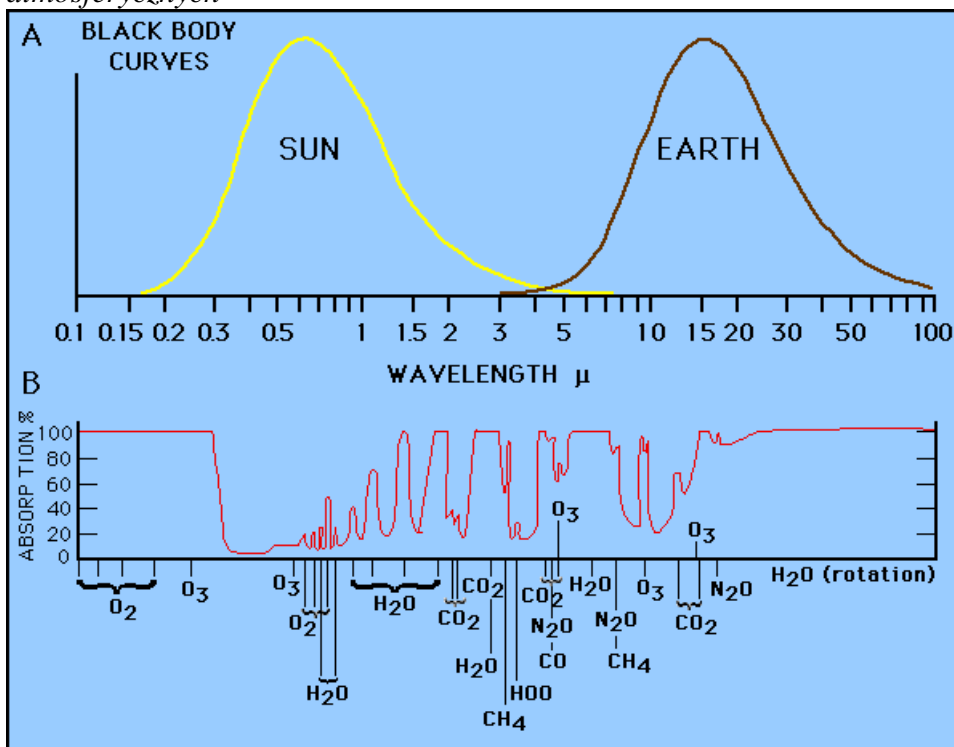


Rys. 2.6 Absorpcja promieniowania atmosfery w zależności od długości fali i typu gazu.

Promieniowanie słoneczne jest w znacznie większym stopniu przepuszczane przez atmosferę niż promieniowanie ziemskie. Obszar widzialny charakteryzuje się bardzo małą absorpcją. Zaliczyć do niej można słabe pochłanianie przez ozon, tlen oraz aerozole. Promieniowanie mniejsze od 0.3 μm praktycznie nie dociera do powierzchni ziemi wskutek silnej absorpcji przez ozon w stratosferze oraz przez tlen w wyższych warstwach atmosfery. W bliskiej podczerwieni występują słabe pasma absorpcyjne tlenu oraz pary wodnej. W przypadku tej ostatniej szerokość intensywności pasm absorpcyjnych rośnie silnie w kierunku dłuższych fal.

Gas	Center ν (cm^{-1}) (λ (μm))	Transition	Band interval (cm^{-1})
H₂O	-	pure rotational	0-1000
	1594.8 (6.3)	ν_2 ; P, R	640-2800
	continuum*	far wings of the strong lines; water vapor dimmers (H_2O) ₂	200-1200
CO₂	667 (15)	ν_2 ; P, R, Q overtone and combination	540-800
	961 (10.4)		850-1250
	1063.8 (9.4)	ν_3 ; P, R overtone and combination	2100-2400
	2349 (4.3)		
O₃	1110 (9.01)	ν_1 ; P, R	950-1200
	1043 (9.59)	ν_3 ; P, R	600-800
	705 (14.2)	ν_2 ; P, R	600-800
CH₄	1306.2 (7.6)	ν_4	950-1650
N₂O	1285.6 (7.9)	ν_1	1200-1350
	588.8 (17.0)	ν_2	520-660
	2223.5 (4.5)	ν_3	2120-2270
CFCs			700-1300

Rys. 2.7 Najważniejsze oscylacyjne i rotacyjne linie absorpcyjne niektórych gazów atmosferycznych



Rys. 2.8 Widmo promieniowania słonecznego oraz całkowita absorpcja w atmosferze.

3. Rozpraszanie promieniowania

Rozpraszanie promieniowania jest procesem związanym ze zmianą kierunku propagacji fali elektromagnetycznej. W atmosferze najważniejszą rolę odgrywa rozpraszanie elastyczne (bez zmiany długości fali). Rozpraszanie nieelastyczne (np. rozpraszanie Ramana) jest drugorzędne. Pomimo tego jest często zaniedbywane małe to jednak wykorzystuje się je w technikach teledetekcyjnych. Rozpraszanie odgrywa kluczową rolę dla promieniowania słonecznego, podczas gdy w dalekiej podczerwieni ma mniejsze znaczenie i w wielu rozważaniach może być pominięte.

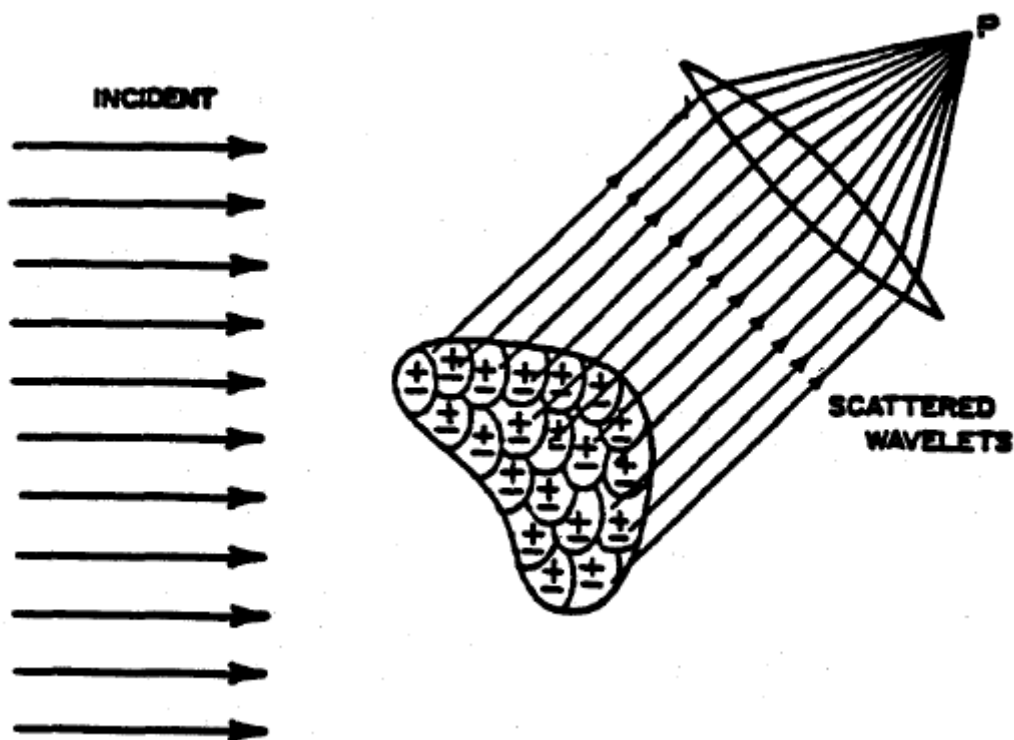
W paragrafie tym będziemy rozpatrywać rozpraszanie na pojedynczej cząstce. Pojedyncze rozpraszanie, bo o nim mowa zakłada, że natężenie pola elektrycznego po rozproszeniu na pojedynczej cząstce zależy jedynie od zewnętrznego pola. Tak, więc jeśli odległość pomiędzy cząstkami jest dostatecznie duża (całkowite promieniowanie rozproszone pochodzące od sąsiednich cząstek jest małe w porównaniu z polem zewnętrznym), to przybliżenie pojedynczego rozpraszania jest w pełni uzasadnionym. Dodatkowo będziemy zakładać, że cząstki są rozłożone w przestrzeni losowo, czyli opisywane przez rozkład Poissona. Oznacza to, że rozpraszanie jest niespójne (incoherent) gdyż nie ma związku pomiędzy fazami fal rozproszonych.

W atmosferze najczęściej wyróżnia się rozpraszanie typu Rayleigh'a, Mie oraz geometryczne. Pierwsze z nich opisuje rozpraszanie na cząstkach małych (w porównaniu z długością fali), drugie na cząstkach dużych (o wymiarach porównywalnych lub większych od długości fali). Rozpraszanie geometryczne występuje gdy rozmiary cząstki są dużo większe od długości fali. Jednak rozpraszanie typu Mie opisuje oddziaływanie promieniowania elektromagnetycznego z cząstkami o dowolnym rozmiarze w porównaniu z długością fali padającej. Mimo to wyróżnia się rozpraszanie typu Rayleigh'a ze względu na jego stosunkowo proste analityczne rozwiązanie.

Rozważmy jednorodne promieniowanie padające na cząstkę. Pobudzone do drgania w cząstce dipole elektryczne emitują spójne promieniowanie o tej samej długości fali. Pole elektryczne w punkcie P jest sumą pola padającego oraz rozproszonego na cząstce. W ogólności faza poszczególnych fal w punkcie P zależy od kąta rozproszenia, dlatego oczekujemy zależności promieniowania rozproszonego od kierunku. Jeśli jednak cząstka jest mała w porównaniu z długością fali, to promieniowanie emitowane przez dipole jest w fazie. Dlatego w tym przypadku spodziewamy się niewielkich zmian wraz z kątem rozpraszania. Gdy rozmiary cząstki stają się większe, rośnie również wzajemne wzmocnienie i osłabienie

pola elektrycznego od poszczególnych dipoli. W związku z tym promieniowanie rozproszone na dużych cząstkach posiada wiele maksimów i minimów interferencyjnych. Relacje pomiędzy fazami fal elektromagnetycznych zależą w ogólności od czynników geometrycznych: kąt rozproszenia, rozmiar cząstki, jej kształt. Amplituda oraz faza indukowanych dipoli w cząstce zależy natomiast od własności substancji, z jakiej jest ona zbudowana.

Jak stwierdzono powyżej promieniowanie elektromagnetyczne padając na ośrodek materialny polaryzuje go (nie mylić z polaryzacją promieniowania) prowadząc do powstania dipoli elektrycznych. Polaryzacja ośrodka na jednostkę objętości \vec{P} związana jest z względnym współczynnikiem przenikalności elektrycznej ϵ_r oraz padającym polem elektrycznym \vec{E} wzorem $\vec{P} = (\epsilon_r - 1)\epsilon_0\vec{E}$.



Rys. 3.1 Rozpraszanie promieniowania elektromagnetycznego

Rozpatrzmy polaryzację pojedynczego dipola w ośrodku materialnym, na który pada zewnątrz pole elektryczne \vec{E} . Polaryzacja pojedynczego dipola elektrycznego \vec{p} wyraża się wzorem $\vec{p} = \alpha\vec{E}'$, gdzie α jest polaryzowalnością ośrodka zaś \vec{E}' jest całkowitym polem elektrycznym. Zauważmy, że w ogólności współczynnik polaryzowalności jest tensorem.

Jeśli przez N oznaczymy liczbę dipoli w jednostce objętości to polaryzacja ośrodka wynosi $\vec{P} = N\vec{p}$.

Kluczowym problemem w procesach rozpraszania staje się wyznaczenie wewnętrznego pola elektrycznego \vec{E}_{int} , które w ośrodkach o dużej gęstości może być zasadniczo różne od zewnętrznego pola elektrycznego. W przypadku, gdy odległość pomiędzy molekułami ośrodka jest znacznie większa niż długość fali wówczas całkowite pole elektryczne rośnie na skutek oddziaływania sąsiednich dipoli zgodnie ze wzorem:

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{E}_{\text{int}} = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} = \frac{\vec{E}}{3}(\epsilon_r + 2).$$

Łatwo pokazać, że zachodzi związek

$$N\alpha = 3\epsilon_0 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2}$$

zwany równaniem Clausius'a-Mosotti'ego. Wiąże ono mikroskopową polaryzowalność ośrodka z makroskopową α względną przenikalnością elektryczną materii ϵ_r .

3.1 Rozpraszanie Rayleigh'a

Rozpatrzmy małą, jednorodną i sferyczną cząstkę o promieniu znacznie mniejszym od długości padającej fali λ . Korzystając z klasycznego rozwiązania równania Maxwella w przypadku daleko-polowym (wzór Hertza):

$$\vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \vec{p}}{\partial t^2} \sin \gamma$$

gdzie γ jest kątem pomiędzy wektorem momentu dipolowego a kierunkiem obserwacji.

Uwzględniając, że moment dipolowy można przedstawić w postaci harmoniczej

$$\vec{p} = \vec{p}_0 e^{-ik(r-ct)}$$

gdzie $kc = \omega$ częstotnością kołową

Pole elektryczne promieniowania rozproszonego wyraża się wzorem

$$\vec{E} = -\vec{E}_0 \frac{e^{-ik(r-ct)}}{r} k^2 \alpha \sin \gamma$$

Zdefiniujmy pewną płaszczyznę przez kierunek padającego i rozproszonego promieniowania a następnie dokonajmy dekompozycji składowych pola elektrycznego na: składową prostopadłą E_{or} i równoległą E_{ol} do tej płaszczyzny. Wówczas składowe promieniowania rozproszonego mają postać

$$E_r = -E_{or} \frac{e^{-ik(r-ct)}}{r} k^2 \alpha \sin \gamma_1$$

$$E_l = -E_{ol} \frac{e^{-ik(r-ct)}}{r} k^2 \alpha \sin \gamma_2$$

gdzie $\gamma_1 = \pi/2$ i $\gamma_2 = \pi/2 - \Theta$ zaś Θ jest kątem rozpraszania.

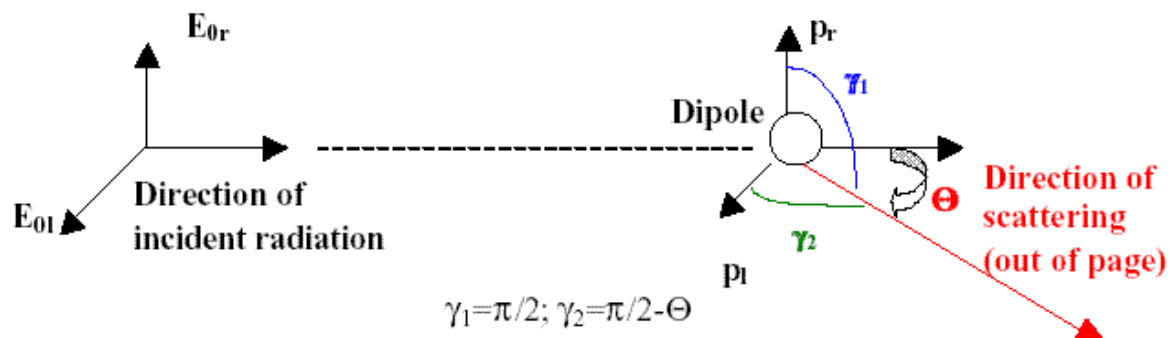
Korzystając z relacji pomiędzy natężeniem pola elektrycznego a radiancją promieniowania ($I = \text{const}|E|^2$) możemy zapisać wzór na radiancję promieniowania rozproszonego w postaci:

$$I_r = \frac{I_{or} k^4 \alpha^2}{r^2}$$

$$I_l = \frac{I_{ol} k^4 \alpha^2}{r^2} \cos^2 \Theta$$

gdzie I_r , I_l są polaryzacyjnymi składowymi promieniowania. Całkowita intensywność promieniowania rozproszonego wyraża się wzorem

$$I = I_r + I_l = (I_{or} + I_{ol} \cos^2 \Theta) \frac{k^4 \alpha^2}{r^2}$$



Rys. 3.2 Płaszczyzna rozpraszania oraz kąt rozproszenia.

Jeśli padające na cząstkę promieniowanie jest niespolaryzowane (np. promieniowanie słoneczne) wówczas obie składowe intensywności są równe i wynoszą $I_o/2$. W tym przypadku całkowita intensywność promieniowania rozproszonego wynosi

$$I = \frac{I_o}{r^2} \alpha^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^4 \frac{1 + \cos^2 \Theta}{2}$$

Wnioski:

- Natężenie promieniowania rozproszonego jest odwrotnie proporcjonalne do czwartej potęgi długości fali. Tak więc rozpraszanie promieniowania bardzo szybko zmniejsza się z długością fali i dlatego rozpraszanie Rayleigh'a ma istotne znaczenie w obszarze widzialnym oraz w ultrafiolecie. Ponieważ promieniowanie nieba (poza tarczą słoneczną) składa się tylko z promieniowania rozproszonego tak, więc rozpraszanie Rayleigh'a jest odpowiedzialne za błękitny kolor nieboskłonu.

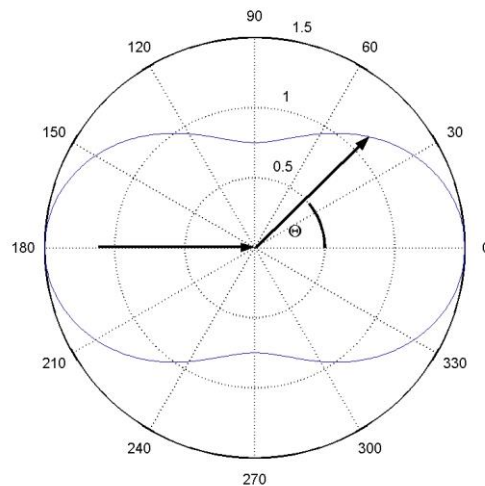
- Rozpraszanie Rayleigh'a jest anizotropowe, jednak odstępstwo od izotropowości nie jest duże.
- Rozpraszanie Rayleigh'a jest symetryczne tzn. natężenie promieniowania rozproszonego do przodu i do tyłu jest takie samo.

Rozkład kątowy promieniowania rozproszonego jest opisywany przy pomocy funkcji fazowej

$P(\Theta)$. W przypadku rozpraszania Rayleigh'a ma ona postać: $P(\Theta) = \frac{3}{4}(1 + \cos^2 \Theta)$.

Własności funkcji fazowej:

- Normalizacja $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{P(\cos \Theta)}{4\pi} \sin \Theta d\Theta d\phi = 1$
- $P(\cos \Theta)$ ze względu na normalizację ma interpretację gęstości prawdopodobieństwa. Określa więc prawdopodobieństwo, że padający na cząstkę foton zostanie rozproszony pod kątem Θ .



Rys. 3.3 Funkcja fazowa dla rozpraszania Rayleigha

Intensywność promieniowania rozproszonego, można zapisać w postaci

$$I(\Theta) = \frac{I_0}{r^2} \alpha^2 \frac{128\pi^5}{3\lambda^4} \frac{P(\Theta)}{4\pi}.$$

Strumień promieniowania rozproszonego w odległość r od cząstki rozpraszającej jest równy całce po gęstości strumienia promieniowania ($I\Delta\Omega$) i może być obliczony ze wzoru

$$F = \int_{\Omega} d\Omega (I\Delta\Omega) r^2$$

gdzie $r^2 d\Omega$ jest powierzchnią (definicja kąta bryłowego). Ostatecznie strumień promieniowania wynosi

$$F = F_0 \frac{128 \pi^5}{3 \lambda^4} \alpha^2$$

gdzie F_0 oznacza strumień promieniowania padającego ($F_0 = I_0 \Delta \Omega$).

Definiujemy przekrój czynny na rozpraszanie jako

$$\sigma_s = \frac{F}{F_0} = \alpha^2 \frac{128 \pi^5}{3 \lambda^4}.$$

Określa on jaka część pierwotnej energii jest usuwana z fali padającej w skutek rozpraszania. Intensywność promieniowania rozproszonego w funkcji przekroju czynnego wyraża się wzorem

$$I(\Theta) = I_0 \frac{\sigma_s P(\Theta)}{r^2 4\pi}$$

Powyższy wzór jest uniwersalny i prawdziwy dla rozpraszania na cząstkach, których rozmiary są porównywalne i większej od długości fali.

Można pokazać, że polaryzowalność α jest związana z współczynnikiem refrakcji m oraz liczbą cząstek N_s w jednostce objętości **wzorem Lorentza-Lorenza**

$$\alpha = \frac{3}{4\pi N_s} \frac{m^2 - 1}{m^2 + 2}.$$

Dla widzialnej części promieniowania słonecznego urojona część współczynnika refrakcji molekuł powietrza jest zanedbywana mała. Część rzeczywista, pomimo, że jest bliska jedności wykazuje zależność od długości fali. Można ją przybliżyć korzystając z następującego wzoru empirycznego $(m_r - 1) \times 10^8 = 6432.8 + \frac{2949810}{146 - \lambda^{-2}} + \frac{25540}{41 - \lambda^{-2}}$ gdzie λ jest w mikrometrach. Biorąc pod uwagę, że rzeczywista część współczynnika refrakcji jest bliska jedności, wzór na polaryzowalność powietrza przyjmuje postać

$$\alpha = \frac{1}{4\pi N_s} (m_r^2 - 1).$$

Podobnie wzór na przekrój czynny przyjmuje postać

$$\sigma_s = \frac{8\pi^3 (m_r - 1)^2}{3\lambda^4 N_s^2} f(\delta)$$

gdzie dodany czynnik $f(\delta)$ uwzględnia anizotropowe właściwości molekuł powietrza (odstępstwo od sferyczności cząsteczek) i zdefiniowany jest on w następujący sposób

$$f(\delta) = \frac{6 + 3\delta}{6 - 7\delta}.$$

Czynnik δ wynosi dla powietrza ok. 0.035.

3.2 Rozpraszanie Lorenza-Mie

Rozpraszanie Rayleigha występuje dla cząsteczek, których promień (lub jego ekwiwalent objętościowy) cząstki jest znacznie mniejszy od długości fali. Dla większych cząsteczek proces rozpraszania opisywany jest przez teorie Lorenz-Mie, którzy w latach 1890 oraz 1908 rozwiązali niezależnie od siebie problem rozpraszania promieniowania na jednorodnych sferach. Zdefiniujmy użyteczną wielkość zwaną parametrem wielkości x taki, że $x=2\pi a/\lambda$, gdzie a jest promieniem cząsteczki. Teoria Lorenz-Mie ($x \geq 1$) opisuje metodę rozwiązywania równań Maxwella. Sprowadza się ona do rozwiązania równania dla pola elektrycznego $\nabla^2 \vec{E} + k^2 m^2 \vec{E}$ oraz identycznego dla pola magnetycznego $\nabla^2 \vec{H} + k^2 m^2 \vec{H}$ z warunkami brzegowymi na sferze. W metodzie tej obliczane jest wewnętrzne pole elektryczne jako suma zewnętrznego oraz pola pochodzącego od wewnętrznych cząstkach. Można pokazać, że składowe pola rozproszonego na dużych cząstkach w przybliżeniu dalekopowym ma postać

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_r \end{bmatrix} = \frac{\exp(ikz - ikr)}{ikr} \begin{bmatrix} S_2(\Theta) & 0 \\ 0 & S_1(\Theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{01} \\ E_{0r} \end{bmatrix}$$

gdzie amplitudy S_1 i S_2 wynoszą

$$S_1(\Theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n \pi_n(\cos \Theta) + b_n \tau_n(\cos \Theta)]$$

$$S_2(\Theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [b_n \pi_n(\cos \Theta) + a_n \tau_n(\cos \Theta)]$$

zaś funkcje kątowe π_n oraz τ_n określone są wzorami

$$\pi_n(\cos \Theta) = \frac{1}{\sin \Theta} P_n^1(\cos \Theta)$$

$$\tau_n(\cos \Theta) = \frac{d}{d\Theta} P_n^1(\cos \Theta)$$

P_n^1 jest stowarzyszonym wielomianem Legendre'a. Ponadto przekroje czynne na rozpraszanie i ekstynkcję (rozpraszanie plus absorpcja) wyrażają się wzorami

$$\sigma_s = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (|a_n|^2 + |b_n|^2)$$

$$\sigma_e = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \operatorname{Re}(a_n + b_n)$$

Współczynniki a_n i b_n mogą być obliczone ze wzorów

$$a_n = \frac{m\psi_n(mx)\psi_n'(x) - \psi_n(x)\psi_n'(mx)}{m\psi_n(mx)\xi_n'(x) - \xi_n(x)\psi_n'(mx)}$$

$$b_n = \frac{\psi_n(mx)\psi_n'(x) - m\psi_n(x)\psi_n'(mx)}{\psi_n(mx)\xi_n'(x) - m\xi_n(x)\psi_n'(mx)}$$

gdzie funkcje ψ oraz ξ są funkcjami Ricatti-Bessela odpowiadającymi sferycznym funkcjom Bessela. Parametr wielkości we wzorach na a_n i b_n zdefiniowany jest dla długości fali wewnątrz ośrodka i wynosi $\lambda = \lambda_o / m_p$ zaś współczynnik refrakcji $m = m_p / m_a$, gdzie m_p określa współczynnik refrakcji dla cząsteczki zaś m_a dla powietrza.

Teoria Mie opisuje bardzo ważną klasę procesów rozpraszania w atmosferze, która obejmuje rozpraszanie na aerozolah, kropelkach wody, czy kryształkach lodu. Do opisu rozpraszania Mie często stosuje się efektywny przekrój czynny na rozpraszanie Q_s

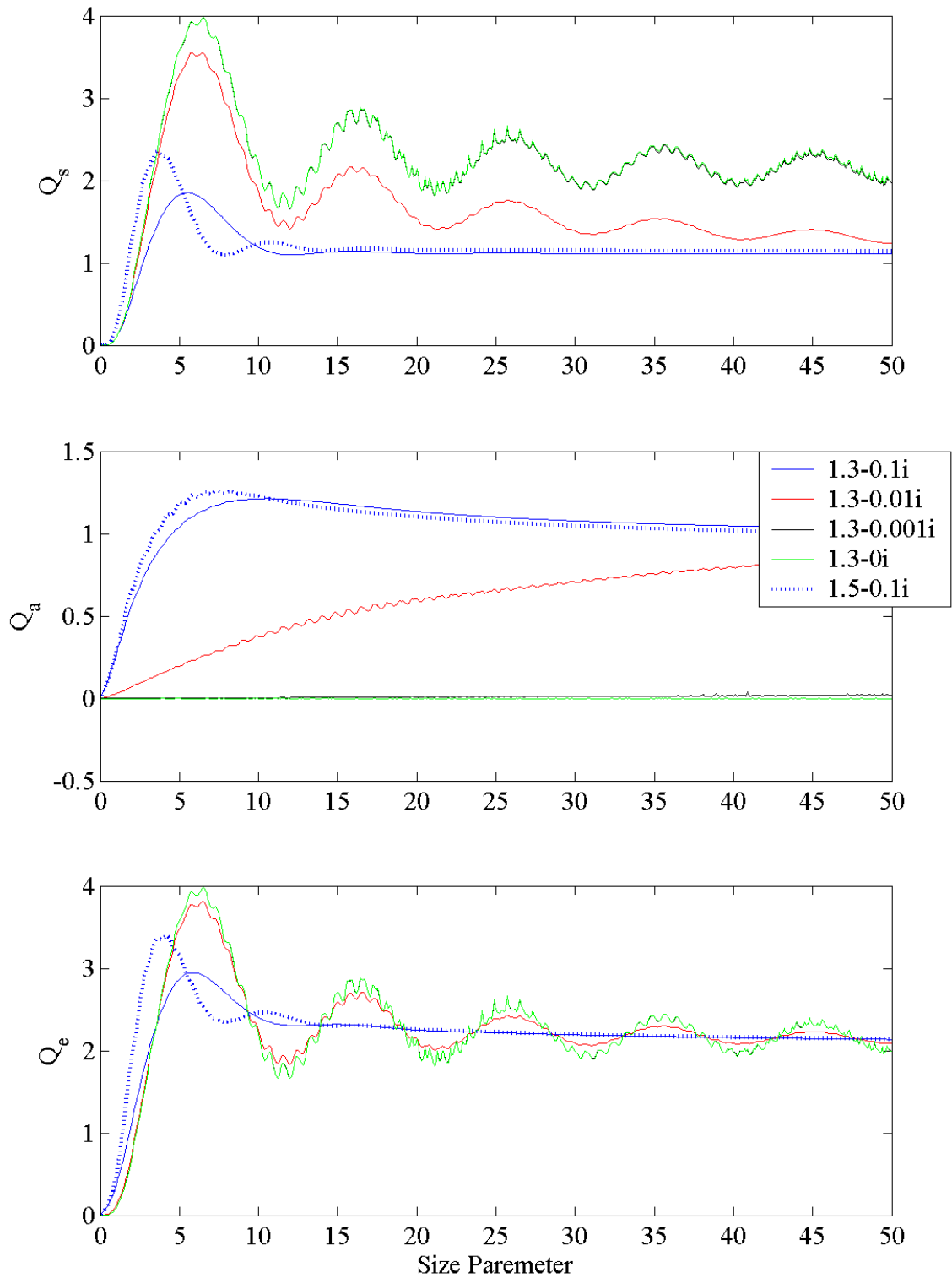
$$Q_s = \frac{\sigma_s}{\pi r^2}$$

Podobnie wprowadza się efektywny przekrój czynny na absorpcję Q_a oraz ekstynkcję Q_e

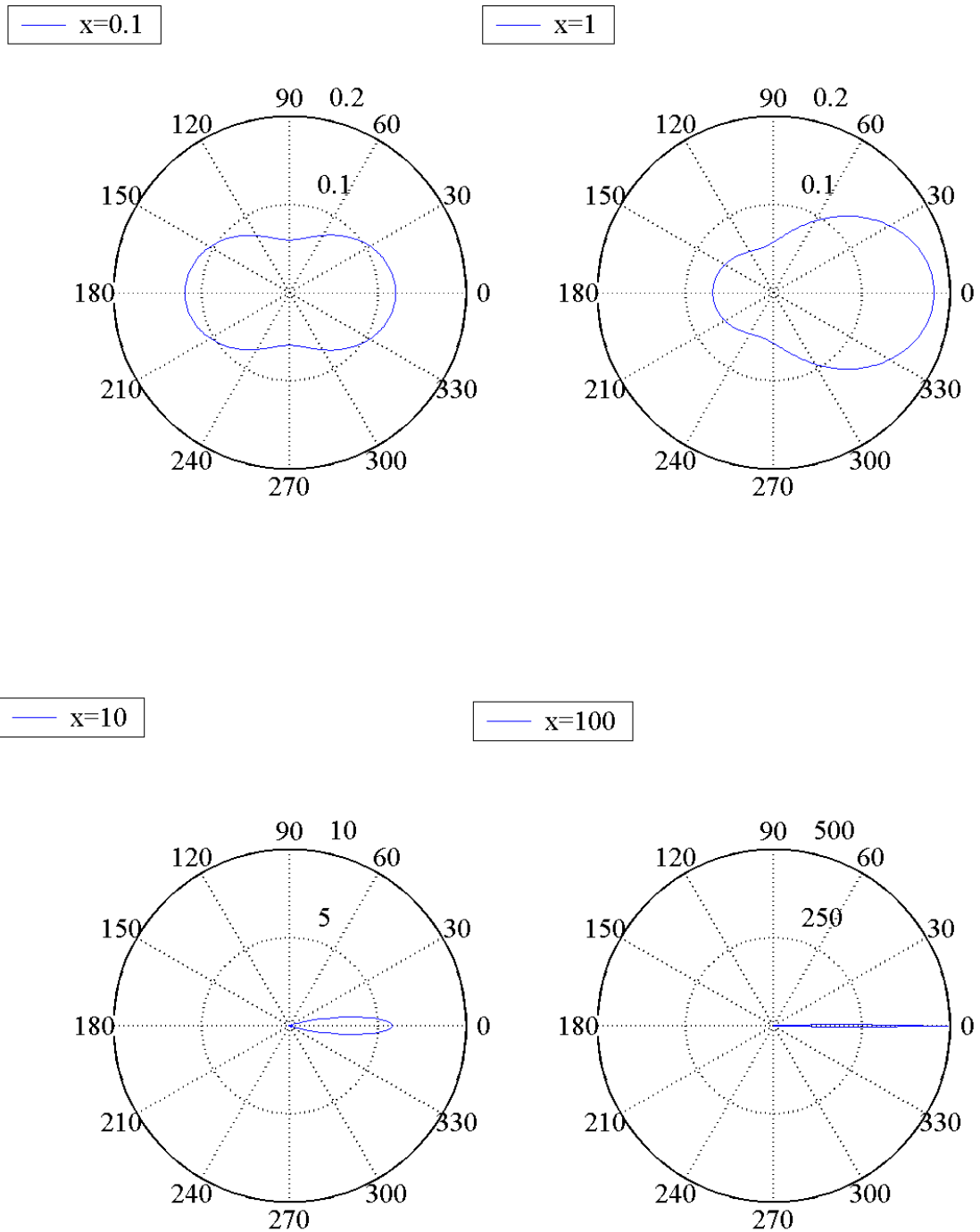
$$Q_a = \frac{\sigma_a}{\pi r^2} \text{ oraz } Q_e = \frac{\sigma_e}{\pi r^2} \text{ gdzie } Q_e = Q_a + Q_s.$$

Przekrój czynny na absorpcję jest zdefiniowany analogicznie, jak dla rozpraszania zaś przekrój czynny na ekstynkcję jest sumą przekrojów na absorpcję oraz rozpraszanie.

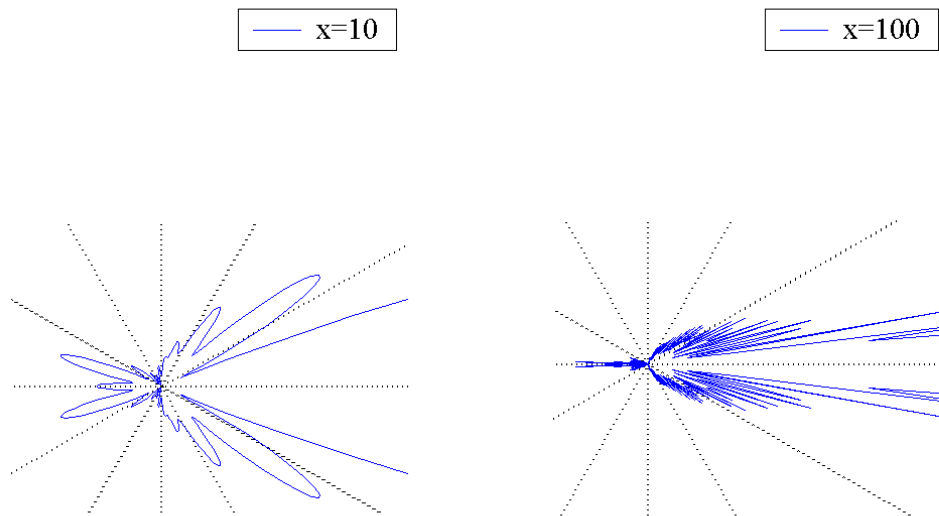
Efektywny przekrój czynny na rozpraszanie, jako funkcja parametru wielkości wykazuje wiele charakterystycznych długo okresowych sinusoidalnych oscylacji (Rys. 3.4a), na które nałożone są oscylacje o większej częstotliwości. Oscylacje te związane są z interferencją fali przechodzącej przez cząstkę z falą, która ulega dyfrakcji. Te ostatnie zależą od części urojonej współczynnika refrakcji (odpowiedzialnego za absorpcję promieniowania). Dla silnie absorbujących cząstek oscylacje te są zupełnie niewidoczne. Rzeczywista część współczynnika refrakcji odpowiada za przesunięcia głównych oscylacji efektywnego współczynnika przekroju czynnego na rozpraszanie. Pierwsze maksimum przypada dla parametru wielkości około 6 czyli dla promienia cząsteczki równego długości fali padającej. Przekrój czynny dla tego maksimum może przekraczać czterokrotnie geometryczny przekrój czynny (πr^2). Podobną zależnością wykazuje się efektywny przekrój czynny na ekstynkcję (Rys. 3.4c). W granicy dużych cząstek ($x \gg 1$) przekrój czynny jest dwa razy większy od przekroju geometrycznego. Wynik ten jest zaskakujący i nosi nazwę paradoksu geometrycznego lub paradoksu ekstynkcji. W obszarze geometrycznym i w sytuacjach z życia codziennego np. cienie przedmiotów nie obserwujemy aby przekrój czynny był dwa razy większy niż przekrój geometryczny. Wynika to z faktu, iż najczęściej obserwujemy cienie przedmiotu w bliskiej odległości w której przybliżenie daleko-polowe nie ma sensu. Zauważmy co się dzieje się z cieniem przedmiotu gdy oddalamy go ekranu na którym rzuca cień.



Rys. 3.4 Efektywny przekrój czynny na (a) rozpraszanie, (b) absorpcję oraz (c) ekstynkcję dla cząstek o różnym współczynniku refrakcji



Rys. 3.5 Funkcje fazowe na rozpraszanie dla różnych parametrów wielkości. Współczynnik refrakcji dla wszystkich przypadków $n=1.5-0.001i$



Rys. 3.6 Kształt funkcji fazowych (powiększenie Rys. 3.5 c,d) dla parametru wielkości $x=10$ oraz wykresie=100.

Na wykresie 3.4b przedstawiony jest efektywny przekrój czynny na absorpcję. W granicy geometrycznej (dużych cząstek) efektywny przekrój czynny dąży do jedności, o ile urojona część współczynnika refrakcji jest niezerowa. W przeciwnym wypadku jest stały równy zero. Dla cząstek silnie absorbujących współczynnik ten osiąga maksimum jednak jego położenie zależy od części rzeczywistej współczynnika refrakcji. W przypadku cząstek słabo absorbujących (typowe cząstki w atmosferze) rośnie on monotonicznie wraz z parametrem wielkości. Kształt funkcji fazowych na rozpraszanie (Rys. 3.5) wykazuje silną anizotropię rosnącą wraz z parametrem wielkości x . Już dla cząstek o promieniu porównywalnym z długością fali promieniowania padającego promieniowanie rozpraszane jest praktycznie tylko do przodu. Ponadto, wraz ze wzrostem parametru wielkości rośnie liczba kątów, dla których obserwuje się charakterystyczne maksima oraz minima (rezonansowe). Można zauważyć (Rys. 3.6), że pewien wzrost intensywności rozpraszania obserwuje się w kierunku wstecznym, przy jednoczesnym spadku rozpraszania dla kątem 90° .

Rozważmy natężenie pola elektrycznego w dalekiej odległości od cząstki przy kącie rozproszenia bliskim zeru ($\Theta \approx 0$). Załóżmy, że na cząstkę pada spolaryzowane promieniowanie w kierunku prostopadłym, wówczas natężenie pola elektrycznego wynosi

$$E_{rs} = \frac{e^{-ikr+ikz}}{ikr} S_1(0) E_{ro}.$$

W dalekiej odległości od cząstki ($x, y \ll z$) możemy zapisać $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \approx z + \frac{x^2 + y^2}{2z}$.

Superpozycja pola elektrycznego związanego z falą padającą oraz rozproszoną w kierunku ($\Theta \approx 0$) wyraża się wzorem

$$E_{ro} + E_{rs} \approx E_{ro} \left[1 + \frac{S_1(0)}{ikz} e^{-ik(x^2+y^2)/2z} \right].$$

Odpowiadająca temu polu radiancja promieniowania

jest proporcjonalna do wyrażenia $|E_{ro} + E_{rs}|^2$. Oznaczmy przez $1+Z$ wyrażenie w nawiasie kwadratowym wówczas kwadrat modułu tego wyrażenia wynosi:

$$|E_{ro} + E_{rs}|^2 = (1+Z)(1+\bar{Z}),$$

gdzie \bar{Z} jest sprzężeniem zespolonym. Ponieważ interesuje nas rozwiązanie w dalekiej odległości, więc wyrażenie, w którym występuję $1/z^2$ pomijamy. Zatem mamy:

$$|E_{ro} + E_{rs}|^2 = 1 + Z + \bar{Z} = 1 + 2\text{Re}(Z) \text{ i ostatecznie}$$

$$|E_{ro} + E_{rs}|^2 \approx |E_{ro}|^2 \left[1 + \frac{2}{kz} \text{Re} \left\{ \frac{S_1(0)}{i} e^{-ik(x^2+y^2)/2z} \right\} \right].$$

Dzieląc obustronnie przez stały czynnik $|E_{or}|^2$ oraz całkując po przekroju geometrycznym cząstki mamy

$$\frac{1}{|E_{ro}|^2} \iint dx dy |E_{ro} + E_{rs}|^2 = \pi a^2 + \sigma_e.$$

gdzie po prawej stronie równania mamy pole przekroju cząstki oraz przekrój czynny na ekstynkcję. Interpretacja fizyczna drugiego czynnika jest następująca: promieniowanie w kierunku do przodu jest redukowane w takim stopniu jakby cząstka miała geometryczny przekrój równy σ_e . Jeśli założymy, że zmiana granic całkowania w przypadku drugiego członu w powyższym wzorze na całkowanie po całej płaszczyźnie (x, y) jest małą poprawką to wówczas mamy

$$\int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} e^{-ik(x^2+y^2)/2z} dx dy = \frac{2\pi z}{ik}.$$

W rezultacie otrzymujemy podstawowy wzór na ekstynkcję, dla

jednorodnej i sferycznej cząstki

$$\sigma_e = \frac{4\pi}{k^2} \text{Re}[S(0)]$$

lub

$$Q_e = \frac{4}{x^2} \text{Re}[S(0)]$$

gdzie $S(0)=S_1(0)=S_2(0)$.

3.3 Anomalna teoria dyfrakcji

Dla dużych wartości parametru wielkości ($x \gg 1$) i tzw. cząstek miękkich $|m-1| \ll 1$ istnieje przybliżona teoria, zwana anomalną teorią dyfrakcji (ADT), która w przybliżeniu opisuje oddziaływanie cząstek z falami elektromagnetycznymi. Drugi warunek (miękkich cząstek) oznacza, że promień światła biegnący wewnątrz cząstki jest zanedbywalnie słabo odchylony od pierwotnego kierunku. Podobnie odbicie od cząstki może być pominięte ze względu na małą różnicę współczynnika odbicia cząstki i powietrza. Ekstynkcja promieniowania jest więc zdominowana przez absorpcje, co stanowi podstawę fizyczną anomalnej teorii dyfrakcji. Natężenie pola elektrycznego po przejściu przez cząstkę (w kierunku do przodu, $\Theta=0^\circ$) E jest superpozycją natężenia pola padającego na cząstkę E_0 i rozproszonego na niej E_{sca} wyraża się wzorem $E = E_0 + E_{\text{sca}}$.

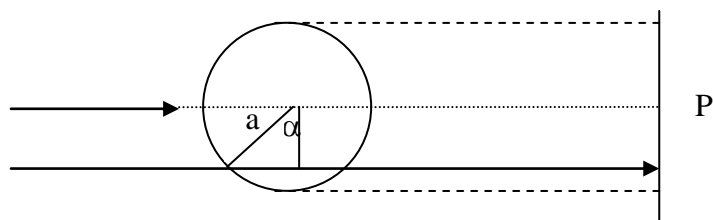
Teoria ADT zakłada, że fala elektromagnetyczna za cząstką może być wyrażona przez różnicę faz promienia, który przechodzi przez cząstkę i promienia, który ulega dyfrakcji na jej brzegu. Zatem

$$E = \tilde{E}_0 e^{i\phi_0} [1 + e^{-i\Delta\phi}]$$

gdzie różnica faz $\Delta\phi$ może być wyznaczona na podstawie elementarnych rozważań geometrycznych $\Delta\phi = 2x(m-1) \sin \alpha = \rho \sin \alpha$,

gdzie ρ ($\rho = 2x[m-1]$) jest względnym opóźnieniem fazy pomiędzy promieniem biegnącym wzdłuż promienia cząstki a promieniem biegnącym na zewnątrz cząstki. W obszarze cienia geometrycznego cząstki pole elektryczne padające na płaszczyznę P ma postać

$$E = \tilde{E}_0 e^{i\phi_0} e^{-i\Delta\phi}.$$



Rys. 3.7 Objaśnienie do anomalnej teorii dyfrakcji

Jeśli przyjmiemy, że natężenie pola padającego jest równe jedności wówczas zmiana pola elektrycznego ($E_0 - E$) w kierunku ($\Theta=0$) jest proporcjonalne do A

$$A = \iint (1 - e^{-ip \sin \alpha}) dx dy .$$

gdzie całkowanie przebiega po cieniu geometrycznym cząstki.

Element powierzchni w układzie biegunowym (na płaszczyźnie P) ma postać $dx dy = r dr d\phi = a \cos \alpha d(a \cos \alpha) d\phi$.

Związku z tym, powyższą całkę można zapisać następująco

$$A = \int_0^{2\pi/2} \int_0^a (1 - e^{-ip \sin \alpha}) a^2 \cos \alpha d \cos \alpha d\phi .$$

Całkując otrzymujemy wyrażenie $A = 2\pi a^2 K(ip)$,

$$\text{gdzie } K(ip) = \frac{1}{2} + \frac{e^{-ip}}{ip} + \frac{e^{-ip} - 1}{(ip)^2} .$$

Przekrój czynny na ekstynkcję σ_e , jest proporcjonalny do różnicy promieniowania rozproszonego I. Korzystając z zależności $I \propto |E|^2$ otrzymujemy: $dI \propto 2d|E|$. Można pokazać, że $\sigma_e = 2\text{Re}(A)$, a więc efektywny przekrój czynny na ekstynkcję wynosi

$$Q_e = \frac{\sigma_e}{\pi a^2} = 4\text{Re}[K(ip)] = 2 - \frac{4}{\rho} \sin \rho + \frac{4}{\rho^2} (1 - \cos \rho) .$$

ADT umożliwia wyznaczenie również przekroju czynnego na absorpcję promieniowania. Droga optyczna promienia przechodzącego przez cząstkę (Rys. 3.5) wynosi

$$l = 2a \sin \alpha . \text{ Współczynnik absorpcji natomiast } k_i = m_i \frac{2\pi}{\lambda}$$

gdzie m_i jest urojoną częścią współczynnika refrakcji. Wynika stąd, że przekrój czynny na absorpcję wynosi

$$\sigma_a = \iint (1 - e^{-2lk_i}) dx dy$$

gdzie czynnik e^{-2lk_i} oznacza osłabienie promieniowania związane z absorpcją przez cząstkę.

Całkując (analogicznie jak powyżej) w układzie biegunowych dostajemy końcowy wzór

$$Q_a = \frac{\sigma_a}{\pi a^2} = 1 + \frac{2}{b} e^{-b} + \frac{2}{b^2} (e^{-b} - 1)$$

gdzie $b = 4xm_i$.

Anomalna teoria dyfrakcji nie pozwala na wyznaczanie funkcji fazowych a jedynie współczynników rozpraszania i absorpcji ograniczonych dla dużych cząstek o współczynniku refrakcji bliskim jedności. Teoria ta zaskakująco dobrze zgadza się dla mały wartości parametru wielkości x z dokładnym rozwiązaniem wynikającym z teorii Lorenza-Mie.

3.4 Macierz Muellera

Opis stanu polaryzacji promieniowania wymaga uogólnienia definicji funkcji fazowej, która jak do tej pory była wielkością skalarną. Składowe natężenia pola elektrycznego po rozproszeniu na pojedynczej cząstce wyrażają się wzorem

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_r \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} S_2 & S_3 \\ S_4 & S_1 \end{pmatrix} \frac{e^{-ikr+ikz}}{ikr} \begin{bmatrix} E_{ol} \\ E_{or} \end{bmatrix}$$

gdzie wyrażenia $S_{1,..,4}$ są elementami macierzy amplitudy rozpraszania. Z wcześniejszych rozważań wynika, że dla sferycznych i jednorodnych cząstek pozadiagonalne wartości macierzy S znikają. Obliczmy całkowitą energię na jednostkę czasu oraz długości fali niesioną przez falę rozproszoną

$$r^2 \int_{\Xi} I_s d\Omega = \frac{I_o}{k^2} \int_{\Xi} |S(\Theta)|^2 d\Omega$$

gdzie całkowanie przebiega po sferze Ξ .

Całkowita energia promieniowania rozproszonego jest równa z drugiej strony $I_o \sigma_s$, gdyż σ_s określa przekrój czynny na rozpraszanie a więc $I_o \sigma_s$ jest energią padającą na cząstkę. Z powyższych wzorów wynika, że przekrój czynny na rozpraszanie wyraża się wzorem

$$\sigma_s = \frac{1}{k^2} \int |S(\Theta)|^2 d\Omega.$$

Wygodnie jest więc zapisać wyrażenie na funkcję fazową w postaci

$$\frac{P(\Theta)}{4\pi} = \frac{|S(\Theta)|^2}{k^2 \sigma_s}.$$

Całkując to obustronnie po sferze Ξ otrzymujemy warunek zachowania energii będący jednocześnie znormalizowaniem funkcji fazowej

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Xi} P(\Theta) d\Omega = 1.$$

W celu opisanego rozpraszania przy użyciu parametrów Stokesa musimy wprowadzić macierz fazową. Można pokazać, że dla pewnej klasy cząstek ma ona następującą postać

$$\hat{P}(\Theta) = \frac{1}{k^2 \sigma_s} \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{33} & S_{34} \\ 0 & 0 & -S_{34} & S_{44} \end{pmatrix}$$

gdzie

$$S_{11} = \frac{1}{2} (|S_2|^2 + |S_1|^2) = S_{22}$$

$$S_{12} = \frac{1}{2} (|S_2|^2 - |S_1|^2)$$

$$S_{33} = \operatorname{Re}(S_2^* S_1) = S_{44}$$

$$S_{34} = \operatorname{Im}(S_2^* S_1).$$

Powyższa macierz Muellera $\hat{P}(\Theta)$ opisuje rozpraszanie nie tylko na cząstkach sferycznych ale również na niesferycznych o pewnej symetrii obrotowej. Zauważmy, że dla cząstek sferycznych $S_{11} = S_{22}$ oraz $S_{33} = S_{44}$ oraz dodatkowo dla rozpraszania Rayleigha $S_{12} = 0$ dla kąta rozpraszania zero oraz 180° . Ostatecznie promieniowanie rozproszone może być wyrażone wzorem macierzowym

$$\begin{pmatrix} I_s \\ Q_s \\ U_s \\ V_s \end{pmatrix} = \frac{\sigma_s}{k^2 r^2} \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{33} & S_{34} \\ 0 & 0 & -S_{34} & S_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_o \\ Q_o \\ U_o \\ V_o \end{pmatrix}$$

Warunek normalizacji musi być spełniony tylko dla pierwszego elementu diagonalnego

$$\frac{1}{4\pi} \int \frac{S_{11}}{k^2 \sigma_s} d\Omega = 1.$$

W ogólnym przypadku (tutaj nie rozważanym) macierz Muellera posiada 16 niezerowych elementów rzeczywistych.

3.5 Rozpraszanie na cząstkach niesferycznych

Rozpraszanie Mie pozwala na obliczenia rozpraszania tylko dla prostych geometrii (np. jednorodne kule, elipsoidy obrotowe). W przypadku skomplikowanych kształtów (drobiny piasku czy kryształki lodu) trzeba stosować teorie rozpraszania dla niesferycznych cząstek. Jedną z nich jest teoria dyskretnych dipoli wprowadzona przez Purcella oraz Pennypackera w 1973 roku. W teorii tej padające promieniowanie o natężeniu E_o jest rozpraszane przed zbiór dipoli, z których składa się cząstka. Zakłada się, że opisywane pole promieniowania rozproszonego E_s znajdują się daleko od cząstki i jest sumą pól wytworzonych przez zewnętrzne promieniowanie oraz wytworzone przez każdy z dipoli

$$E_s = E_o + \sum_{\text{dipole}} E_{\text{dip}}.$$

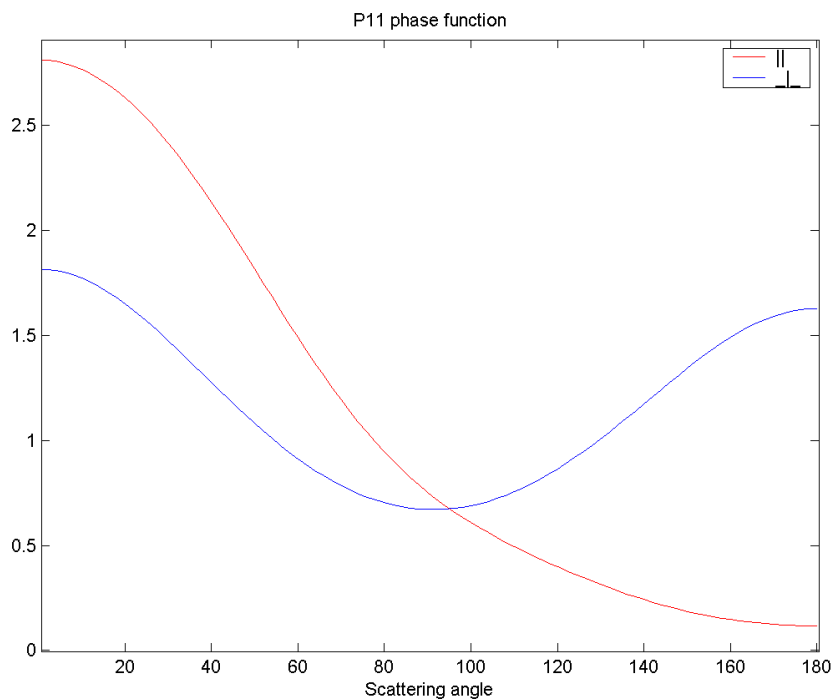
Pole elektryczne w każdym dipolu definiowane jest przez pozycje indeksu „j” i określone przez moment dipolowy

$$p_j = \alpha_j E_{\text{dip},j}.$$

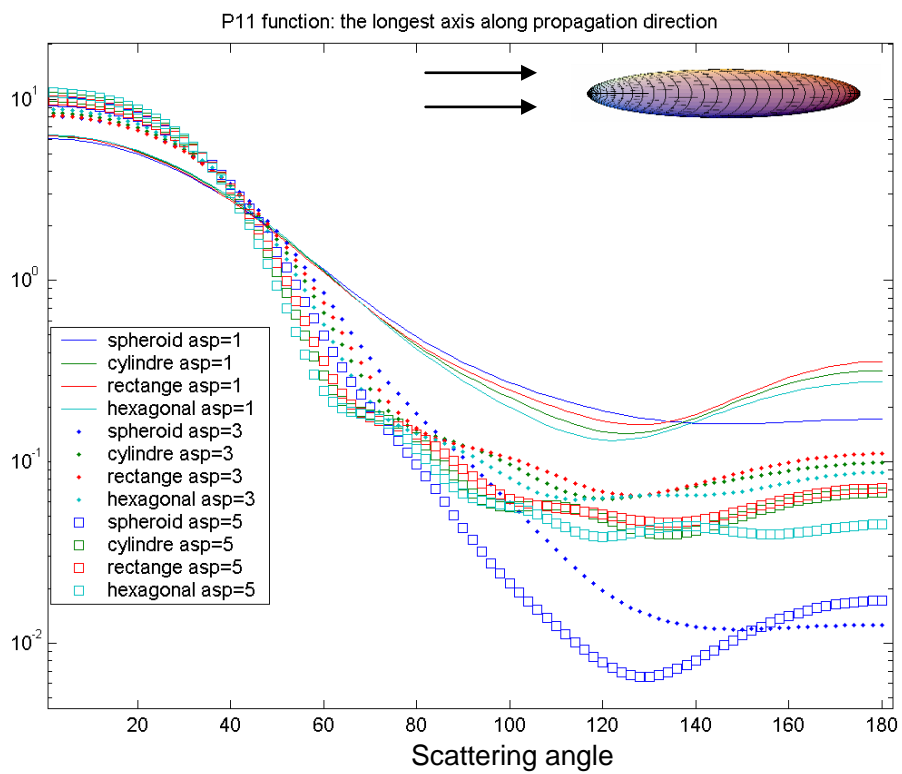
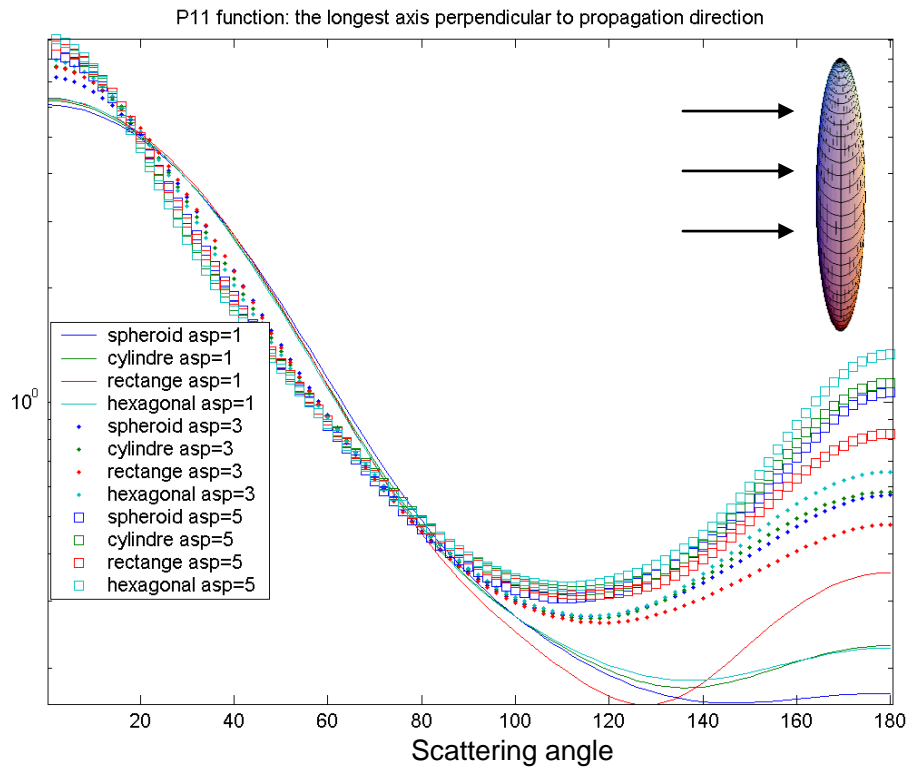
Ponadto pole elektryczne w każdym dipolu jest superpozycją zewnętrznego pola oraz wewnętrznego związanego z N-1 dipolami. Zatem

$$p_j = \alpha_j \left[E_o - \sum_{j \neq k} A_{jk} p_k \right]$$

gdzie $-A_{jk}p_k$ jest wkładem do pola elektrycznego w miejscu dipola j pochodzącym od oscylacji dipola w miejscu k . W metodzie DDA (Discrete Dipole Approximation) powyższe równanie rozwiązywane jest dla wszystkich $p_j, j=1, \dots, N$. W dalszej części pomijamy szczegóły tej metody odsyłając do literatury [B.T. Dranie, P.J. Flauta, 2000]. Zauważmy jedynie, że metoda ta wymaga odwrócenia dużej, bo $3N \times 3N$ macierzy zespolonej. Ponadto, musi być spełniona następująca relacja $|m|kd < 1/3$, gdzie d jest odległością między dipolami. Dla przykładu rozwiązanie problemu rozpraszania dla promieniowanie o długości $0.5 \mu\text{m}$ na kropli wody o promieniu $1 \mu\text{m}$ z lepszą dokładnością niż 5% wymaga użycia 65400 dipoli. Metoda ta jest efektywna w przypadku parametru wielkości x mniejszego od 20-30. Dla wyższych wartości, szczególnie dla reżimu rozpraszania geometrycznego, stosuje się metody geometryczne polegające na wzięciu pod uwagę procesów dyfrakcji od odbicia od cząsteczki rozpraszającej. Wykres 3.8 przedstawia funkcję fazową dla rozpraszania na cząstkach sferoidalnych. W przypadku gdy dłuższa oś cząstki jest ustawiona równoległe do padającego promieniowania wówczas kształt funkcji fazowej przypomina rozpraszanie Rayleigha (parametr asymetrii $g=0.02$). W drugim przypadku gdy orientacja cząsteczki zmienia się o 90 stopni funkcja fazowa wykazuje asymetrie dla rozpraszania do przodu (parametr asymetrii $g=0.41$). Wyniki te są odzwierciedleniem wielkości sferoidy gdyż parametr wielkości dla odpowiadającej jej kuli (ta sama objętość) wynosił 0.63 . W przypadku ustawienia prostopadłego padające promieniowanie polaryzuje elementy cząstki podobnie jak w przypadku rozpraszania Rayleigh (mały parametr wielkości w kierunku propagacji promieniowania). Podczas ustawienia równoległego długość cząstki jest porównywalna z długością fali i polaryzacja elementów cząsteczki jest zróżnicowana.



Rys. 3.8 Funkcja fazowa dla rozpraszania na sferoidach obrotowych w przypadku równoległego oraz prostopadłego ustawienia padającego promieniowania w stosunku do dłuższej osi cząsteczki. Parametr wielkości w obu przypadkach wynosi 0.63 zaś stosunek dłuższej do krótszej osi elipsoidy wynosi 5.



Rys. 3.9 Funkcja fazowa w zależności od różnego kształtu cząstek w przypadku prostopadłego (a) oraz równoległego (b) ustawienia padającego promieniowania w stosunku do dłuższej osi cząsteczki.

Rys. 3.9 obrazuje zróżnicowanie funkcji fazowej dla cząstek o różnym stosunku dłuższej do krótszej osi w przypadku: sferoidy, cylindra, prostopadłościanu oraz równoległościanu sześciokątnego. Pierwszy z wykresów odpowiada orientacji prostopadłej zaś drugi równoległej do kierunku padania promieniowania. W obu przypadkach wpływ kształtu obiektu rozpraszającego jest znaczący szczególnie rozpraszania wstecznego. W przypadku ustawienia prostopadłego „rozciąganie” cząstki prowadzi do mniej izotropowego rozpraszania zaś w przypadku równoległym „rozciąganie” cząstki prowadzi do wzrostu anizotropii rozpraszania. Jest to zgodne z wynikami diskutowanymi powyżej i zobrazowanymi na wykresie 3.8.

3.6 Rozpraszanie w reżimie geometrycznym

Rozpraszanie na dużych cząstkach w porównaniu do długości fali może być rozwiązywane na drodze optyki geometrycznej. Parametr wielkości w tym przypadku jest co najmniej rzędu stu a najlepiej rzędu tysiąca. W tym przypadku rozważamy jedynie procesy odbicia od powierzchni cząstki oraz refrakcji (ugięcia) wewnątrz cząstki. Często stosowaną metodą służącą do wyznaczania własności optycznych jest metoda Monte Carlo. Polega ono na symulowaniu zachowania tysięcy fotonów padających na cząstkę w różnym miejscu. Każdy proces fizyczny jest symulowany przy użyciu generatora liczb losowych o rozkładzie zależnym od współczynnika refrakcji cząstki. Końcowym wynikiem symulacji jest rozkład gęstości fotonów rozpraszanych w kąt bryłowy oraz liczba fotonów zaabsorbowanych wewnątrz cząstki. Pozwala to wyznaczyć własności optyczne w tym funkcję fazową. Więcej o metodzie Monte Carlo stosowanej do rozwiązywania transferu promieniowania będzie w kolejnych rozdziałach.

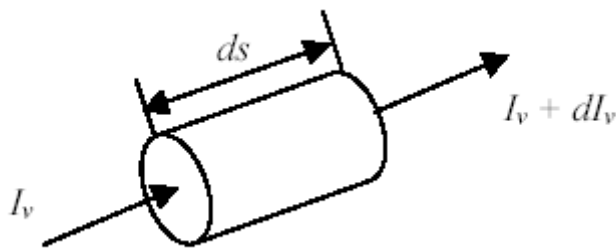
4. Wstęp do równania transferu promieniowania

W niniejszym paragrafie przedstawione będzie wprowadzenie do równania transferu promieniowania. Pomimo, że rozpatrywany będzie przypadek atmosfery to jednak równanie transferu jest uniwersalne i obowiązuje w innych ośrodkach np. w wodzie (optyka oceanu). W poprzednich paragrafach omówiono procesy absorpcji, rozpraszania oraz emisji, które opisywane były dla pojedynczych molekuł czy atomów. Obecnie zastanowimy się jak opisywać promieniowanie przechodzące przez warstwę powietrza zawierającą dużą liczbę cząstek. Będziemy zakładać, iż są one rozłożone w przestrzeni w sposób losowy (opisywane rozkładem Poissona).

Ekstynkcja jest podstawowym procesem, który decyduje o osłabieniu promieniowania przechodzącego przez dany ośrodek materialny. Zmiana radiancji dI_v na odcinku drogi ds jest empirycznie związana z promieniowaniem padającym I_λ prawem ekstynkcji Lamberta

$$dI_v = -\sigma_{\text{ext}} I_v ds$$

gdzie σ_{ext} jest współczynnikiem ekstynkcji [1/m], który zależy od długości fali. Ekstynkcja promieniowania obejmuje procesy absorpcji oraz rozpraszania. Oba procesy prowadzą do usuwania fotonów z pierwotnej wiązki, przy czym w pierwszym fotony są pochłanianie, zaś w drugim rozpraszane poza pierwotny kierunek propagacji.



Rys. 4.1 Prawo ekstynkcji.

Współczynnik ekstynkcji jest więc związany z współczynnikiem absorpcji σ_{abs} oraz rozpraszania σ_{sca} wzorem $\sigma_{\text{ext}} = \sigma_{\text{abs}} + \sigma_{\text{sca}}$. Fundamentalnym bezwymiarowym parametrem w przypadku transferu promieniowania jest grubość optyczna τ zdefiniowana dla promieniowania propagującego się pionowo w atmosferze jako $d\tau = \sigma_{\text{ext}} ds$. Ponadto zdefiniowany wcześniej przekrój czynny na ekstynkcję σ_{ext} wiąże się ze współczynnikiem ekstynkcji w przypadku, gdy ośrodek składa się z identycznych cząstek o koncentracji N

$[1/m^3]$ wzorem $\sigma_{\text{ext}} = N\sigma_e$. Podobnie efektywny przekrój czynny Q_e cząstek o promieniu a $\sigma_{\text{ext}} = \pi Na^2 Q_e$. Analogiczne wzory obowiązują dla współczynników absorpcji oraz rozpraszania.

Prawo Lamberta jest najprostszą postacią równania transferu promieniowania, które będziemy zapisywać w postaci

$$\frac{dI_v}{ds} = -\sigma_{\text{ext}} I_v.$$

Rozwiązanie jego nosi nazwę prawa Beera i określa wykładniczy zanik promieniowania w ośrodku materialnym

$$I_v(s'') = I_v(s') \exp(-\tau_v)$$

$$\text{gdzie } \tau_v = \int_{s'}^{s''} \sigma_{\text{ext}}(s) ds.$$

Rozwiązanie to jest jednym z bardziej rozpowszechnionych i najprostszych form rozwiązania równania transferu dla bezpośredniego promieniowania słonecznego. Wykorzystywane jest często w technikach teledetekcyjnych opartych na pomiarach bezpośredniego promieniowania słonecznego. Właśnie w tym ostatnim przypadku prawo Beera jest spełnione tylko w przypadku monochromatycznego promieniowania.

W ogólnym przypadku, gdy interesuje nas radiancja z innego kierunku niż tylko w kierunku od Słońca czy też strumienie promieniowania musimy w równaniu transferu promieniowania uwzględnić tzw. źródła. Produkcja radiancji w kierunku $\vec{\xi}$ jest związana z dwoma procesami: emisja (zgodnie z prawem Kirchhoffa) oraz rozpraszaniem promieniowanie, które pierwotnie poruszało się w innym kierunku. W pierwszym przypadku wzrost radiancji wzdłuż drogi ds , wynosi

$$dI_v = \sigma_{\text{abs}} J_v^a ds$$

gdzie J_v^a jest funkcją źródłową. W dolnej atmosferze, gdzie mamy równowagę termodynamiczną $J_v^a = B_v$ (funkcja źródłowa jest równa funkcji Planck'a). Tak więc zmiana radiancji wzdłuż drogi ds wynosi

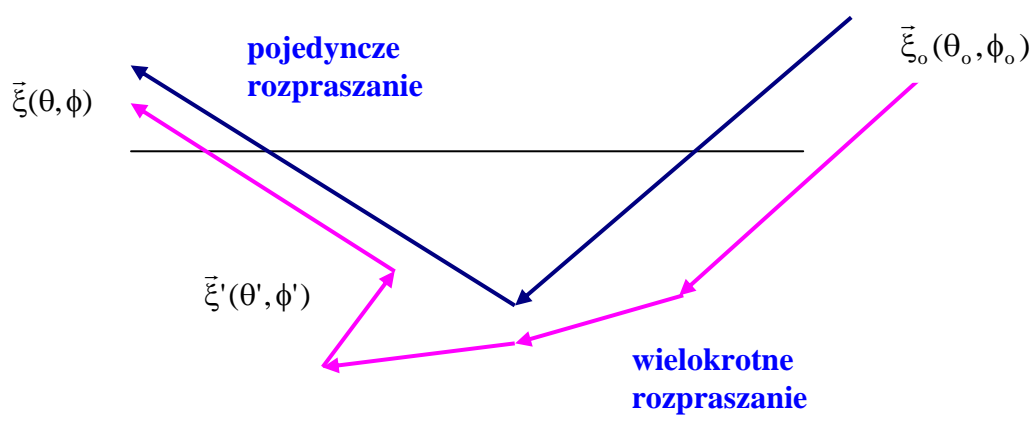
$$dI_v = dI_v(\text{emisja}) + dI_v(\text{ekstynkcja}).$$

Równanie transferu promieniowania ma więc postać

$$\frac{dI_v}{ds} = -\sigma_{\text{ext}} I_v + \sigma_{\text{abs}} J_v^a.$$

Równanie to opisuje transfer promieniowania w ośrodku, w którym brak jest rozpraszania, a występuje jedynie absorpcja i emisja promieniowania.

Rozważmy ośrodek (atmosferę), w którym występuje rozpraszanie. Niech $\vec{\xi}_0$ oznacza pierwotny kierunek propagacji zaś $\vec{\xi}$ kierunek końcowy fotonu.



Rys. 4.2 Pojedyncze i wielokrotne rozpraszanie w warstwie powietrza.

Rozpraszanie będziemy dzielić na dwa typy: pojedyncze oraz wielokrotne. Przy czym wyróżniamy rozpraszanie pojedyncze tylko dlatego, że opis matematyczny dla tego przypadku jest znacznie prostszy. Z definicji funkcji fazowej dla rozpraszania wynika, że natężenie promieniowania w kierunku $\bar{\xi}'$ jest całką po rozkładzie radiancji z wagą określoną przez funkcję fazową. Wzrost radiancji wzdłuż drogi ds wynosi

$$dI_v = ds \sigma_{sca} J_v^s$$

gdzie funkcja źródłowa dla rozpraszania ma postać

$$J_v^s = \frac{1}{4\pi} \int I(\xi') P(\xi, \xi') d\Omega'.$$

Stosunek współczynnika rozpraszania do ekstynkcji nosi nazwę współczynnika pojedynczego rozpraszania ω , który jest podstawowym parametrem określającym własności optyczne ośrodka

$$\omega = \frac{\sigma_{sca}}{\sigma_{ext}} = \frac{\sigma_{ext} - \sigma_{abs}}{\sigma_{ext}} = 1 - \frac{\sigma_{abs}}{\sigma_{ext}}.$$

Z definicji współczynnika pojedynczego rozpraszania wynika, że zmienia się on od 0 do 1 przy czym gdy wynosi jeden to ośrodek nie absorbuje promieniowania. Parametr ten może być interpretowany jako prawdopodobieństwo, że foton zostanie rozproszony podczas oddziaływania z materią.

Ogólne równanie transferu promieniowania ma postać

$$\frac{dI_v}{ds} = -\sigma_{ext} (I_v - J_v)$$

gdzie pełna funkcja źródłowa

$$J_v = (1 - \omega) B_v + \frac{\omega}{4\pi} \int I(\xi') P(\xi, \xi') d\Omega'.$$

Funkcja fazowa dla rozpraszania zależy od 4 kątów (dwóch związanych z promieniowaniem padającym oraz dwóch z promieniowaniem rozproszonym) $P(\bar{\xi}, \bar{\xi}') = P(\theta, \phi; \theta', \phi')$. Można ją jednak zapisać w zależności od kąta rozproszenia Θ , (patrz wykład 3). Z geometrii sferycznej wynika, że

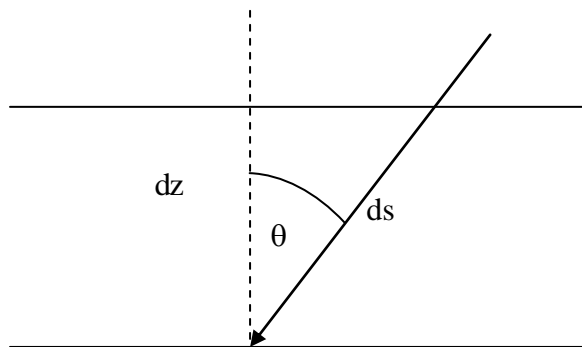
$$\cos \Theta = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi').$$

Równanie transferu ostatecznie ma postać

$$\frac{dI_v}{d\tau} = -I_v + (1 - \omega)B_v + \frac{\omega}{4\pi} \int I(\theta', \phi') P(\theta, \phi; \theta', \phi') \sin \theta' d\theta' d\phi'.$$

Powyższe równanie jest równaniem całkowo różniczkowym na radiancję w kierunku $\bar{\xi}(\theta, \phi)$. Zależy ono od 7 niezależnych zmiennych: 3 związanych z położeniem, dwóch z kierunkiem propagacji promieniowania oraz czasem i długością fali. W równaniu transferu promieniowania nie występuje explicite czas, gdyż jest to równanie stacjonarne. Zakładamy, że promieniowanie propaguje się z nieskończoną prędkością i stan stacjonarny ustala się natychmiast.

W fizyce atmosfery często wyróżnia się pionową współrzędną, gdyż w tym kierunku gradienty wielkości fizycznych są znacznie większe niż w płaszczyźnie horyzontalnej. W wielu przypadkach rozwiązując równanie transferu promieniowania w atmosferze można pominąć zmienność horyzontalną (zakładamy horyzontalną jednorodność). Przybliżenie to nosi nazwę płasko-równoległej atmosfery, w której ciśnienie, temperatura i inne wielkości zależą tylko od współrzędnej pionowej z . Wówczas droga geometryczna ds wyraża się wzorem $ds = dz / \cos \theta$.



Rys. 4.3 Przybliżenie płasko-równoległe

Wprowadzając oznaczenie μ dla wyrażenia $\cos \theta$ otrzymujemy równanie transferu promieniowania w postaci

$$\mu \frac{dI_v}{d\tau} = -I_v + (1 - \omega)B_v + \frac{\omega}{4\pi} \int I(\theta', \phi') P(\theta, \phi; \theta', \phi') \sin \theta' d\theta' d\phi'.$$

Wielkość $m=1/\mu$ nazywa się masą optyczną atmosfery, która jest równa masie słupa atmosfery nachylonego pod kątem θ do masy pionowego słupa atmosfery.

W przypadku atmosfery płasko-równoległej redukujemy liczbę zmiennych niezależnych do 5-ciu, gdyż pozostaje już tylko jedna współrzędna kartezjańska z . Nawet jeśli atmosfera jest horyzontalnie jednorodna, to jednak dla dużych kątów zenitalnych ($\theta > 60^\circ$) uwidacznia się krzywizna Ziemi. W przypadku płasko-równoległej atmosfery droga geometryczna promieniowania tuż przy horyzoncie staje się nieskończona, podczas gdy w rzeczywistości droga ta jest oczywiście skończona. Zauważmy, że w Polsce podczas najkrótszych dni w grudniu górowanie Słońca w południe nie przekracza 15° , a zatem przybliżenie to nie może być stosowane. Wprowadza się, więc funkcję Chapmana $Ch(R, \mu)$, która jest równa masie optycznej atmosfery (air mass factor) i zależy od promienia Ziemi R oraz cosinusa kąta zenitalnego μ i dla izotermicznej atmosfery o temperaturze T ma postać:

$$Ch(R, \mu) = \frac{Mg}{RT} \int_0^{TOA} \exp\left(-\frac{gM}{RT} \left[\sqrt{R_o^2 + 2R_o x \mu + x^2} - R_o \right]\right) dx$$

gdzie całkowanie przebiega od powierzchni ziemi to górnej granicy atmosfery (TOA). Natomiast M oznacza masę molowe powietrza, g przyspieszenie grawitacyjne, R uniwersalną stałą gazową, zaś R_o jest promieniem Ziemi. Dla kąta zenitalnego 90° (Słońce znajduje się na horyzoncie) funkcja Chapmana wynosi około 37. Oznacza to, że promieniowanie przechodzi tyle samo razy więcej przez atmosferę, niż gdyby było w zenicie. Powyższy wzór nie uwzględnia refrakcji atmosferycznej, która dla kąta zenitalnego 90° jest maksymalna i wynosi około 0.5° .

Równanie transferu promieniowania wymaga sprecyzowania warunków brzegowych, co w przypadku atmosfery musi mieć miejsce na górnej granicy atmosfery oraz na powierzchni ziemi. W pierwszym przypadku zakładamy, że poza Słońcem nie ma innych źródeł promieniowania a promieniowanie słoneczne nie wpływa na promieniowanie długofalowe. Tak więc warunek brzegowy na górnej granicy atmosfery ma postać (tzw. Radiancja promieniowania odgórnego)

$$I_\lambda^\downarrow = F_{o\lambda} \delta(\cos \theta_o - \cos \theta) \delta(\phi_o - \phi)$$

gdzie $F_{o\lambda}$ jest spektralną stałą słoneczną, zaś $\delta()$ jest deltą Diraca, gdyż zakładamy że szerokość kątowa słońca jest zaniedbywana. Drugi warunek brzegowy (na powierzchni) nie może być zapisany podobnie jak na górnej granicy atmosfery gdyż promieniowania oddolne zależy od promieniowania padającego na powierzchnię ziemi. Warunek brzegowy na

powierzchni sprowadza się, więc do podania warunku wiążącego promieniowanie idące w górę tuż nad powierzchnia i promieniowanie idące w dół. Definiujemy więc pojęcie albedo A , przez które będziemy rozumieć stosunek natężenie promieniowania odbitego od powierzchni F_o^\uparrow do natężenia promieniowania padającego na powierzchnię F_o^\downarrow

$$A = \frac{F_o^\uparrow}{F_o^\downarrow}.$$

Definicja ta jednak dotyczy tylko natężenia promieniowania a nie radiancji, która występuje w równaniu transferu promieniowania. Ponadto większość typów powierzchni wykazuje silną zależność albedo od kąta padania promieniowania. Rozkład promieniowania (radiancji) nieba zależy od wielu czynników, a zatem tak zdefiniowane albedo jest też funkcją padającego promieniowania. Dodatkowo więc wprowadza się tzw. dwukierunkowy współczynnik odbicia ρ (BRDF-Bidirectional Reflectance Distribution Function), który zależy od czterech kątów: dwóch związanych z promieniowaniem padającym i dwóch z kierunkiem obserwacji promieniowania odbitego. BRDF jest zdefiniowany w ten sposób, że wartość jego zależy już tylko od własności samej powierzchni. Dwukierunkowy współczynnik odbicia ρ jest stosunkiem radiancji odbitej od powierzchni ziemi do energii padającej na nią

$$\rho(\vec{\xi}', \vec{\xi}) \equiv \frac{dI_v^\uparrow(\vec{\xi})}{I_v^\downarrow(\vec{\xi}') \cos \theta' d\Omega'}$$

gdzie $dI_v^\uparrow(\vec{\xi})$ jest radiancją promieniowania odbitego od powierzchni ziemi w kąt bryłowy $d\Omega$ wokół kierunku $\vec{\xi}$. Typowe powierzchnie zawierają się pomiędzy dwoma ekstremalnymi typami: całkowicie rozproszeniową oraz zwierciadlaną. Przypadkiem pierwszej jest np. śnieg, piasek. Drugiej zaś lustro, ale również w przybliżeniu płaska powierzchnia oceanu. Jeśli radiancja promieniowania odbitego od powierzchni całkowicie rozproszeniowej jest niezależna od kąta obserwacji wówczas mówimy o powierzchni typu Lamberta. BRDF dla tej powierzchni jest niezależny od kierunku padającego i odbitego promieniowania. Wówczas dwukierunkowy współczynnik odbicia wynosi $\rho(\vec{\xi}', \vec{\xi}) = \rho_L$

gdzie ρ_L jest współczynnikiem odbicia Lambertowskiego zależnym od długości fali. Z definicji BRDF-u wynika, że radiancja promieniowania odbitego wynosi dla tej powierzchni

$$I_v^\uparrow = \rho_L \int d\Omega' \cos \theta' I_v^\downarrow(\vec{\xi}') = \rho_L F_v^\downarrow.$$

Tak więc w przypadku idealnej powierzchni Lambertowskiej odbicie od powierzchni jest proporcjonalne do padającego na nią strumienia promieniowania i nie zależy od kierunku obserwacji.

Przykład

1) Załóżmy, że na powierzchnie Lamberta pada promieniowanie słoneczne z kierunku $\vec{\xi}_o(\theta_o, \phi_o)$ o radiancji

$$I^\downarrow(\vec{\xi}') = F_o^s \delta(\cos \theta' - \cos \theta_o) \delta(\phi' - \phi_o).$$

Strumień promieniowania wynosi, więc $F^\downarrow = F_o^s \cos \theta_o$. Radiancja promieniowania odbitego w kierunku $\vec{\xi}$ wynosi $I_v^\uparrow(\vec{\xi}) = \rho_L \mu_o F_o^s$.

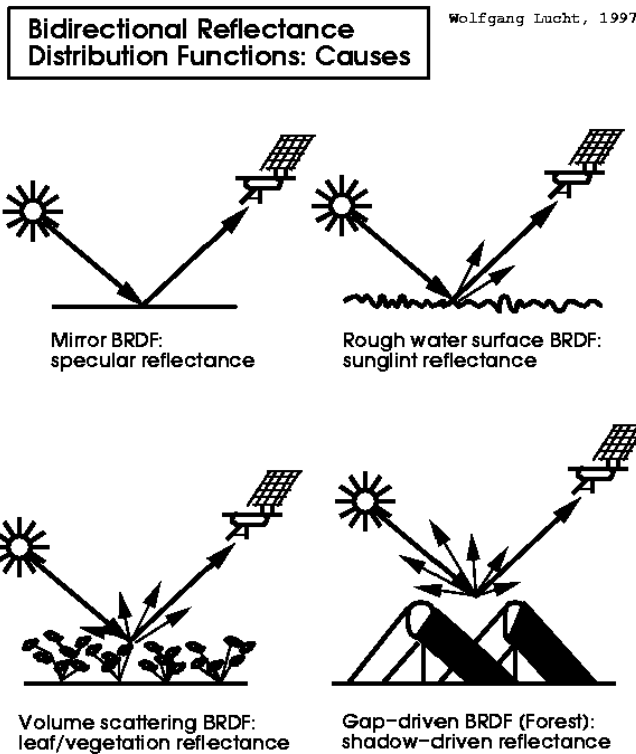
2) W przypadku powierzchni o odbiciu zwierciadlanym radiancja promieniowania odbitego jest proporcjonalna do radiancji promieniowania padającego i ograniczona do kierunku $\vec{\xi}(\theta, \phi)$. Kąt zenitalny i azymutalny promieniowania odbitego wynosi, zatem $\theta = \theta'$ oraz $\phi = \phi' + \pi$.

Stała proporcjonalności jest spektralną funkcją odbicia $\rho_s(\nu, \theta)$, która zależy od kąta odbicia $\theta = \theta'$ oraz częstotliwości (długości fali). Dla promieniowania słonecznego z kierunku $\vec{\xi}_o(\theta_o, \phi_o)$ radiancja promieniowania odbitego ma postać

$$I_v^\uparrow(\vec{\xi}) = \rho_s F_o^s \delta(\cos \theta_o - \cos \theta) \delta(\phi - [\phi_o + \pi])$$

oraz odpowiadający mu strumień

$$F^\uparrow = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \cos \theta F_o^s \rho_s(\theta) \delta(\cos \theta_o - \cos \theta) \delta(\phi - [\phi_o + \pi]) = \rho_s(\theta_o) F_o^s \cos \theta_o.$$



Rys. 4.4 Odbicie promieniowania od powierzchni ziemi.

W ogólności odbicie od powierzchni jest sumą odbicia zwierciadlanego $\rho_s(\vec{\xi}', \vec{\xi})$ oraz rozproszonego $\rho_d(\vec{\xi}', \vec{\xi})$

$$\rho(\vec{\xi}', \vec{\xi}) = \rho_s(\vec{\xi}', \vec{\xi}) + \rho_d(\vec{\xi}', \vec{\xi}).$$

Radiancja promieniowania odbitego wynosi

$$I_v^\uparrow(\vec{\xi}) = \rho_s(\theta) I_v^\downarrow(\theta, \phi' + \pi) \cos \theta + \int d\Omega' \cos \theta' \rho_d(\vec{\xi}', \vec{\xi}) I_v^\downarrow(\vec{\xi}').$$

Odbicie zwierciadlane wyznaczane jest z równań Fresnela na podstawie stałych optycznych. Tyczy się to jedynie powierzchni wody, gdyż tylko w tym przypadku odbicie zwierciadlane jest dominujące. W przypadku wody albedo silnie zależy od kąta zenitalnego Słońca i dla małych kątów zenitalnych jest ono w przybliżeniu stałe i wynosi około 0.02. Powyżej kąta 40° albedo zaczyna szybko rosnać i dla kąta zenitalnego 70° wynosi już 0.2.

Rozważmy promieniowanie słoneczne padające na powierzchnie ziemi z kierunku $\vec{\xi}_o(\theta_o, \phi_o)$. Radiancja promieniowania odbitego przez powierzchnie wynosi

$$I_v^\uparrow(\vec{\xi}) = F_o^s \int d\Omega' \cos \theta' \rho_d(\vec{\xi}', \vec{\xi}) \delta(\cos \theta' - \cos \theta_o) \delta(\phi' - \phi_o) = F_o^s \cos \theta_o \rho_d(\vec{\xi}_o, \vec{\xi})$$

Strumień promieniowania rozproszonego od powierzchni ziemi wyraża się wzorem

$$F^\uparrow = \int d\Omega \cos \theta I_v^\uparrow(\vec{\xi}) = F_o^s \cos \theta_o \int d\Omega \cos \theta \rho_d(\vec{\xi}_o, \vec{\xi}).$$

Stosunek promieniowania odbitego do strumienia padającego nosi nazwę albedo A i wynosi

$$A \equiv \rho(\vec{\xi}_o, 2\pi) = \frac{F^\uparrow}{F_o^s \cos \theta_o} = \int d\Omega \cos \theta \rho_d(\vec{\xi}_o, \vec{\xi}).$$

gdzie 2π w wyrażeniu $\rho(\vec{\xi}_o, 2\pi)$ oznacza całkowanie po półsfery.

BRDF-y pełnią istotną funkcję w metodach teledetekcji satelitarnej i do problemu powrócimy w dalszej części wykładu. W tej części wprowadzamy jeszcze pojęcie sferycznego albedo. Jest ono wygodne przy omawianiu bilansu energetycznego całej Ziemi. W celu uproszczenia sytuacji założymy, że własności optyczne planety są jednorodne na całej sferze. Rozważmy wkład od pierścienia na Ziemi, dla którego kąt zenitalny Słońca wynosi θ_o . Jeśli przez R oznaczymy promień Ziemi, to wielkość $R \sin \theta_o$ jest promieniem pierścienia na sferze zaś jego powierzchnia wynosi $2\pi R^2 \sin \theta_o \cos \theta_o d\theta_o$. Energia promieniowania słonecznego F_o^s padająca na ten pierścień jest równa iloczynowi F_o^s oraz powierzchni pierścienia. Energia odbita przez pierścień wynosi zatem $2\pi R^2 F_o^s \rho(\vec{\xi}_o, 2\pi) \sin \theta_o \cos \theta_o d\theta_o$. Całkując po całym dysku otrzymujemy całkowitą energię odbitą od powierzchni ziemi. Sferyczne albedo jest zdefiniowane jako stosunek całkowanej

po dysku energii odbitej do energii padającej.

$$\langle \rho \rangle \equiv \frac{2\pi R^2 F_0^s \int_0^1 d\mu_o \mu_o \rho(\bar{\xi}_o, 2\pi)}{\pi R^2 F_0^s} = 2 \int_0^1 d\mu_o \mu_o \rho(\bar{\xi}_o, 2\pi).$$

Po zdefiniowaniu warunków brzegowych wracamy do równania transferu promieniowania w atmosferze. Jak stwierdzono powyżej promieniowanie słoneczne na górnej granicy atmosfery jest zapisywane w postaci iloczynu delt Diraca. Uwzględnienie tego prowadzi do następującej formy równania transferu

$$-\mu \frac{dI_v}{d\tau} = -I_v + J_v.$$

gdzie funkcja źródłowa ma postać

$$J = (1 - \omega) B_v + \frac{\omega}{4\pi} F_0^s P(\theta, \phi; \theta_o, \phi_o) e^{-\tau/\mu_o} + \frac{\omega}{4\pi} \int I(\theta', \phi') P(\theta, \phi; \theta', \phi') \sin \theta' d\theta' d\phi'.$$

Pojawiający się po lewej stronie minus w równaniu transferu promieniowania wynika z faktu, że dla promieniowania odgórnego kąt zenitalny jest większy od 90° a więc cosinus tego kąta jest ujemny. Pierwszy człon w funkcji źródłowej związany jest z emisją promieniowania w podczerwieni, drugi z pojedynczym rozpraszaniem promieniowania słonecznego, zaś trzeci z rozpraszaniem wielokrotnym. Ostatni człon, jak można się spodziewać, sprawia najwięcej problemów podczas rozwiązywania równania transferu promieniowania.

5. Rozwiązanie równania transferu w zakresie termalnym

Zajmiemy się obecnie metodami rozwiązywania wyprowadzonego na poprzednim wykładzie równania transferu promieniowania w atmosferze. Ze względu na fakt, iż widmo promieniowania słonecznego jest niemal rozłączne z widmem promieniowaniem ziemskiego uzasadnionym staje się rozpatrywanie tych przypadków osobno.

Przypadek promieniowania długofalowego

Rozważmy na początek promieniowanie ziemskie i załóżmy, że procesy rozpraszania w tym przypadku mogą być pominięte. Założenie to jednak może być niespełnione, gdyż duże cząstki, które nie absorbują całkowicie promieniowania (np. cząstki piasku) mogą efektywnie rozpraszać promieniowanie w oknie atmosferycznym. Pomijając tą sytuację równanie transferu promieniowania długofalowego ma postać

$$\frac{dI_v}{d\tau} = -I_v + B_v(T).$$

Równanie to nosi nazwę równania Schwarzschilda, a różniczka grubość optycznej jest równa $d\tau = k_\lambda \rho ds$

gdzie k_λ jest masowym współczynnikiem absorpcji [$m^2 \text{ kg}^{-1}$]. Funkcja źródłowa w tej sytuacji zależy jedynie od temperatury (dla monochromatycznego promieniowania), a zatem problem jest lokalny w przeciwieństwie do ogólnego równania transferu promieniowania gdzie rozpraszanie sprawia, że problem z punktu widzenia matematycznego nie jest lokalny. Grubość optyczna τ jest mierzona prostoliniowo (przy zaniedbaniu refrakcji w atmosferze) wzdłuż kierunku określającego propagację promieniowania. Rozwiązanie równania Schwarzschilda składa się z dwóch części: promieniowania padającego osłabionego przez absorpcję ośrodka na drodze od punktu P_1 do P_2 , oraz emitowanego pomiędzy P_1 i P_2 i następnie osłabionego podczas dalszej drogi.

Używając czynnika całkującego e^τ dla równania Schwarzschilda, możemy zapisać je w postaci

$$\frac{dI}{d\tau} e^\tau + I e^\tau = \frac{d}{d\tau} (I e^\tau) = B e^\tau$$

Grubość optyczna od punktu P_1 do punktu pośredniego P jest dana wzorem

$$\tau(P_1, P) = \int_{P_1}^P k \rho ds = \int_0^P k \rho ds - \int_0^{P_1} k \rho ds = \tau(P) - \tau(P_1)$$

Całkowanie równanie transferu od punktu P_1 do P_2 prowadzi do

$$\int_{\tau(P_1)}^{\tau(P_2)} dt \frac{d}{dt} (Ie^t) = \int_{\tau(P_1)}^{\tau(P_2)} dt B(t) e^t .$$

Rozwiązując to równanie dla punktu P_2 mamy

$$\begin{aligned} I[\tau(P_2)] &= I[\tau(P_1)] \exp(-\tau(P_2) + \tau(P_1)) + \int_{\tau(P_1)}^{\tau(P_2)} dt B(t) \exp(t - \tau(P_2)) \\ &= I[\tau(P_1)] \exp(-\tau(P_1, P_2)) + \int_{\tau(P_1)}^{\tau(P_2)} dt B(t) \exp(t(P_1 - P_2)) \\ &= I[\tau(P_1)] T_r(P_1, P_2) + \int_{T_r(P_1, P_2)}^1 dT_r(P_1, P_2) B(t) . \end{aligned}$$

gdzie T_r w ostatnim równaniu oznacza transmisję.

Przykład

Rozważmy atmosfera izotermiczną ze stałą wartością masowego współczynnika absorpcji k_λ .

Jeśli przeddefiniujemy grubość optyczną tak, że $\tau(P_1) = 0$, to wówczas

$$\begin{aligned} I[\tau(P_2)] &= I[\tau(P_1)] \exp(-\tau(P_2)) + B \int_0^{\tau(P_2)} dt \exp(t - \tau(P_2)) \\ &= I[\tau(P_1) = 0] \exp(-\tau(P_2)) + B[1 - \exp(-\tau(P_2))] \end{aligned}$$

Jeśli ośrodek jest optycznie cienki ($\tau(P_2) \ll 1$), wówczas drugi czynnik jest proporcjonalny do $B\tau(P_2)$ a promieniowanie w punkcie P_2 jest zdominowane przez promieniowanie początkowe. Dla ośrodków grubych optycznie ($\tau(P_2) \gg 1$) radiancja w punkcie końcowym wynosi $I(P_2) = B_v(T)$

Rozważmy ogólną sytuację, gdy dopuszczamy, że promieniowanie może propagować się ukośnie (słab geometry). W tym przypadku definiuje się połówkowe radiacje oznaczające promieniowanie biegnące w dół I_v^\downarrow oraz w górę I_v^\uparrow

$$I_v^\uparrow(\tau, \theta, \phi) \equiv I_v(\tau, \theta < \pi/2, \phi)$$

$$I_v^\downarrow(\tau, \theta, \phi) \equiv I_v(\tau, \theta > \pi/2, \phi)$$

Definicje te odpowiadają $u = \cos \theta \geq 0$ oraz $u = \cos \theta < 0$ gdzie $\mu = |u|$. Równanie transferu (bez rozpraszania) można zapisać teraz w postaci dwóch równań

$$\mu \frac{dI_v^\uparrow(\tau, \mu, \phi)}{d\tau} = I_v^\uparrow(\tau, \mu, \phi) - B_v(\tau)$$

$$-\mu \frac{dI_v^\downarrow(\tau, \mu, \phi)}{d\tau} = I_v^\downarrow(\tau, \mu, \phi) - B_v(\tau)$$

Zmienną niezależną w tym przypadku jest grubość optyczna związana z absorpcją. Jest ona mierzona w kierunku od górnej granicy atmosfery w dół. Przyjmujemy, że na górnej granicy

atmosfery $\tau = 0$ zaś na powierzchni ziemi $\tau = \tau_*$. Podobnie jak w przypadku poprzednich rozważań używamy czynnika całkującego, ale teraz w postaci $e^{\tau/\mu}$. Całkując obustronnie drugie z równań mamy

$$\int_0^{\tau_*} d\tau \frac{d}{d\tau} (I_v^\downarrow e^{\tau/\mu}) = I_v^\downarrow(\tau_*, \mu, \phi) e^{\tau_*/\mu} - I_v^\downarrow(0, \mu, \phi) = \int_0^{\tau_*} \frac{d\tau'}{\mu} e^{\tau'/\mu} B_v(\tau')$$

Rozwiązując go otrzymujemy wyrażenie na radiację na powierzchni ziemi

$$I_v^\downarrow(\tau_*, \mu, \phi) = I_v^\downarrow(\tau = 0, \mu, \phi) e^{-\tau_*/\mu} + \int_0^{\tau_*} \frac{d\tau'}{\mu} e^{-(\tau_* - \tau')/\mu} B_v(\tau')$$

Podobnie dla promieniowania skierowanego do góry można pokazać, że radiancja na wysokości, gdzie grubość optyczna wynosi τ wyraża się wzorem

$$I_v^\uparrow(\tau, \mu, \phi) = I_v^\uparrow(\tau_*, \mu, \phi) e^{-(\tau_* - \tau)/\mu} + \int_\tau^{\tau_*} \frac{d\tau'}{\mu} e^{-(\tau' - \tau)/\mu} B_v(\tau').$$

Przykład

Promieniowanie propagujące się horyzontalnie. W horyzontalnie jednorodnej atmosferze radiancja w granicy $\mu \rightarrow 0$ wynosi

$$I_v^{\uparrow\downarrow}(\tau, \mu = 0, \phi) = B_v(T).$$

Rozważmy obecnie przybliżenie szarej atmosfery (gray approximation). Przez I będziemy oznaczać scałkowaną po częstotliwości (obejmującej zakres promieniowania długofalowego) radiancję $I(\tau, \mu, \phi) = \int dv I_v(\tau, \mu, \phi)$. Ponieważ atmosfera nie otrzymuje promieniowania długofalowego z przestrzeni kosmicznej, zatem warunek brzegowy na górnej granicy ma postać $I^\downarrow(0, \mu, \phi) = 0$. Ponadto założymy, że powierzchnia ziemi o temperaturze

$$T_s \text{ promieniuje jak ciało doskonale czarne } I^\uparrow(\tau_*, \mu, \phi) = \sigma_B \frac{T_s^4}{\pi}.$$

Korzystając z poprzednich rozwiązań otrzymujemy

$$I^\downarrow(\tau, \mu, \phi) = \int_0^\tau \frac{d\tau'}{\mu} e^{-(\tau - \tau')/\mu} \frac{\sigma_B T^4(\tau')}{\pi}$$

$$I^\uparrow(\tau, \mu, \phi) = \frac{\sigma_B}{\pi} T_s^4 e^{-(\tau_* - \tau)/\mu} + \int_\tau^{\tau_*} \frac{d\tau'}{\mu} e^{-(\tau' - \tau)/\mu} \frac{\sigma_B}{\pi} T^4(\tau')$$

Odpowiednio strumienie promieniowania skierowanego w dół oraz w górę mają postać

$$F^\downarrow(\tau) = 2 \int_0^\tau d\tau' \sigma_B T^4(\tau') E_2(\tau - \tau')$$

$$F^{\uparrow}(\tau) = 2\sigma_B T_s^4 E_3(\tau_* - \tau) + 2 \int_{\tau}^{\tau_*} d\tau' \sigma_B T^4(\tau') E_2(\tau' - \tau)$$

gdzie $E_n(x)$ jest funkcją zdefiniowaną dla $n > 0$ oraz $x \geq 0$ w postaci

$$E_n(x) \equiv \int_0^1 d\mu \mu^{n-2} e^{-x/\mu} = \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^n} e^{-tx}.$$

6. Rozwiązanie równania transferu w zakresie promieniowania krótkofalowego

W rozważaniach transferu promieniowania słonecznego w atmosferze musimy uwzględnić procesy rozpraszania. Ze względu na rozłączność widm promieniowania słonecznego i ziemskiego możemy zaniedbać promieniowanie termiczne, co prowadzi do następującego równania transferu promieniowania krótkofalowego

$$\mu \frac{dI_v}{d\tau} = -I_v + J_v$$

gdzie funkcja źródłowa ma postać

$$J = \frac{\Omega}{4\pi} F_0^s P(\theta, \phi; \theta_0, \phi_0) e^{-\tau/\mu_0} + \frac{\Omega}{4\pi} \int I(\theta', \phi') P(\theta, \phi; \theta', \phi') \sin \theta' d\theta' d\phi'.$$

Jak wcześniej wspomniano pierwszy człon w wyrażeniu na funkcję źródłową związany jest z pojedynczym rozpraszaniem, zaś drugi z rozpraszaniem wielokrotnym.

6.1 Przybliżenie pojedynczego rozpraszania

Najprostszym przybliżeniem równania transferu promieniowania słonecznego jest przypadek pojedynczego rozpraszania. Pomińmy na razie rozważania, w jakim przypadku takie przybliżenie jest spełnione i rozwiążmy analitycznie równanie transferu. Podobnie jak w przypadku promieniowania długofalowego rozważmy dwa przypadki (promieniowania propagujące się w górę oraz dół).

$$\begin{aligned} \mu \frac{dI_v^\uparrow(\tau, \mu, \phi)}{d\tau} &= I_v^\uparrow(\tau, \mu, \phi) - J_v \\ -\mu \frac{dI_v^\downarrow(\tau, \mu, \phi)}{d\tau} &= I_v^\downarrow(\tau, \mu, \phi) - J_v. \end{aligned}$$

Mnożąc pierwsze z równań przez czynnik całkujący $e^{-\tau/\mu}$ zaś drugie przez $e^{\tau/\mu}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} d[I_v^\uparrow(\tau, \mu, \phi) e^{-\tau/\mu}] &= -\frac{1}{\mu} e^{-\tau/\mu} J_v d\tau \\ d[I_v^\downarrow(\tau, \mu, \phi) e^{\tau/\mu}] &= +\frac{1}{\mu} J_v e^{\tau/\mu} d\tau \end{aligned}$$

Całkując pierwsze równanie od poziomu powierzchni ziemi ($\tau = \tau_*$) do poziomu końcowego zdefiniowanego przez grubość optyczną τ oraz drugie od górnej granicy atmosfery ($\tau = 0$) do tego samego poziomu końcowego mamy

$$I_v^\uparrow(\tau, \mu, \phi) e^{-\tau/\mu} - I_v^\uparrow(\tau_*, \mu, \phi) e^{-\tau_*/\mu} = -\int_{\tau_*}^{\tau} \frac{1}{\mu} e^{-\tau'/\mu} J_v d\tau'$$

$$I_v^\downarrow(\tau, \mu, \phi) e^{\tau/\mu} - I_v^\downarrow(0, \mu, \phi) = \int_0^{\tau} \frac{1}{\mu} e^{\tau'/\mu} J_v d\tau'.$$

Ostatecznie wzory na radiancję promieniowania propagującego się w górę i w dół mają postać

$$\begin{aligned} I_v^\uparrow(\tau, \mu, \phi) &= I_v^\uparrow(\tau_*, \mu, \phi) e^{-(\tau_*-\tau)/\mu} + \int_{\tau}^{\tau_*} \frac{1}{\mu} e^{-(\tau'-\tau)/\mu} J_v d\tau' \\ I_v^\downarrow(\tau, \mu, \phi) &= I_v^\downarrow(0, \mu, \phi) e^{-\tau/\mu} + \int_0^{\tau} \frac{1}{\mu} e^{-(\tau-\tau')/\mu} J_v d\tau' \end{aligned} \quad (xx)$$

oraz dla przypadku horyzontalnego ($\mu = 0$) mamy

$$I_v^\rightarrow(\tau, \mu, \phi) = J_v(\tau).$$

Pierwsze człony w tych równaniach związane są z promieniowaniem bezpośrednim, które osłabiane jest zgodnie z prawem Lamberta-Beera, drugie zaś z promieniowaniem rozproszonym. Uwzględniając, że funkcja źródłowa ograniczona jest tylko do członu związanego z pojedynczym rozpraszaniem radiancja promieniowania rozproszonego w przypadku promieniowania w górę $I_d^\uparrow(\tau, \mu, \phi)$ i w dół $I_d^\downarrow(\tau, \mu, \phi)$ ma postać

$$\begin{aligned} I_d^\uparrow(\tau, \mu, \phi) &= \frac{\mu_o}{\mu + \mu_o} \frac{\omega}{4\pi} F_o^s P(\theta, \phi; \theta_o, \phi_o) \left[e^{\tau/\mu_o} - e^{-[(\tau_*-\tau)/\mu + \tau_*/\mu_o]} \right] \\ I_d^\downarrow(\tau, \mu, \phi) &= \frac{\mu_o}{\mu_o - \mu} \frac{\omega}{4\pi} F_o^s P(\theta, \phi; \theta_o, \phi_o) \left[e^{-\tau/\mu_o} - e^{-\tau/\mu} \right] \end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę warunki brzegowe: na górnej granicy atmosfery $I^\downarrow(0, \mu, \phi) = F_o^s \delta(\mu - \mu_o) \delta(\phi - \phi_o)$ oraz zakładając, że powierzchnia ziemi jest doskonale absorbująca otrzymujemy

$$\begin{aligned} I^\uparrow(\tau, \mu, \phi) &= \overbrace{I_v^\uparrow(\tau_*, \mu, \phi)}^0 e^{-(\tau_*-\tau)/\mu} + I_d^\uparrow(\tau, \mu, \phi) \\ I^\downarrow(\tau, \mu, \phi) &= F_o^s e^{-\tau/\mu_o} \delta(\mu - \mu_o) \delta(\phi - \phi_o) + I_d^\downarrow(\tau, \mu, \phi) \end{aligned}$$

W tym przypadku uzyskujemy kompletne rozwiązanie równania transferu promieniowania w atmosferze. Jeśli powierzchnia ziemi odbija promieniowanie słoneczne otrzymujemy układ dwóch równań z trzema niewiadomymi. Dodatkowym równaniem jest związek dwukierunkowego albedo z promieniowaniem idącym w górę i w dół tuż nad powierzchnią.

Własności przybliżenia pojedynczego rozpraszania:

- rozwiązanie poprawne dla dowolnej funkcji fazowej $P(\theta, \phi, \theta_o, \phi_o)$
- prosto daje się uogólnić uwzględniając polaryzację promieniowania.
- może być zastosowane do dowolnej geometrii w szczególności geometrii sferycznej.
- stosuje się go jako początkowe rozwiązanie do bardziej złożonych metod np. do metody iteracyjnej Lambda.

6.2 Metoda kolejnych rozprożeń

Logicznym rozszerzeniem przybliżenia pojedynczego rozpraszania jest metoda kolejnych przybliżeń związana z rozpraszaniem dwukrotnym, trzykrotnym itd. W tym przypadku całkowita radiancja jest sumą radiancji pochodzących od fotonów rozproszonych raz, dwa, trzy,...i wyraża się wzorami

$$I^{\uparrow}(\tau, \mu, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} I_n^{\uparrow}(\tau, \mu, \phi),$$

$$I^{\downarrow}(\tau, \mu, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} I_n^{\downarrow}(\tau, \mu, \phi),$$

gdzie n oznacza liczbę rozprożeń fotonu. Zbieganie powyższych szeregów do rozwiązania rzeczywistego zależy w głównej mierze od albedo pojedynczego rozpraszania ω . Dla wartości $\omega \approx 1$ (brak absorpcji) szeregi te są słabo zbieżne. Metoda ta jest efektywna dla ośrodka o znacznej absorpcji, dla którego strumień promieniowania rozproszonego jest istotnie osłabiany poprzez procesy pochłaniania.

Założmy dla uproszczenia, że na powierzchni ziemi nie występuje człon związany z promieniowaniem odbitym. W tym przypadku radiancja promieniowania rozproszonego zgodnie z tym, co pokazano powyżej ma postać

$$I^{\uparrow}(\tau, \mu, \phi) = \int_{\tau}^{\tau_0} J(\tau', \mu, \phi) \exp[-(\tau' - \tau)/\mu] \frac{d\tau'}{\mu}$$

$$I^{\downarrow}(\tau, \mu, \phi) = \int_0^{\tau} J(\tau', \mu, \phi) \exp[-(\tau - \tau')/\mu] \frac{d\tau'}{\mu}$$

W pierwszym przybliżeniu wyznaczmy pole radiancji zakładając, że funkcja źródłowa zawiera tylko człon związany z pojedynczym rozpraszaniem. Następnie, nowe pole radiancji wykorzystujemy do obliczania kolejnego przybliżenia. Otrzymujemy w ten sposób rekurencję, którą można zdefiniować w następujący sposób

$$J_{n+1}(\tau, \mu, \phi) = \frac{\omega}{4\pi} \int_0^1 \int_{-1}^1 P(\mu, \phi; \mu', \phi') I_n(\tau, \mu', \phi') d\mu' d\phi',$$

$$I_n^{\uparrow}(\tau, \mu, \phi) = \int_{\tau}^{\tau_0} J_n(\tau', \mu, \phi) \exp[-(\tau' - \tau)/\mu] \frac{d\tau'}{\mu}, \text{ dla } n \geq 1$$

$$I_n^{\downarrow}(\tau, \mu, \phi) = \int_0^{\tau} J_n(\tau', \mu, \phi) \exp[-(\tau - \tau')/\mu] \frac{d\tau'}{\mu}, \text{ dla } n \geq 1$$

gdzie przybliżenie zerowego rzędu ma postać

$$I_0^{\downarrow}(\tau, \mu, \phi) = F_0^s e^{-\tau/\mu_0} \delta(\mu - \mu_0) \delta(\phi - \phi_0).$$

Zaletą powyżej metody jest to, że pozwala ona w sposób analityczny wyprowadzić wzory na kolejne przybliżenia. Jednak dla $n > 2$ stają się one na tyle skomplikowane, że trudno stosować

je do fizycznych problemów. Obliczenia w tym przypadku są jednak stosunkowo proste i ograniczają się do całkowania numerycznego podwajającego wyznaczyć kolejne iteracje.

Zauważmy, że znajomość funkcji źródłowej wraz z warunkami brzegowymi jest równoznaczna z rozwiązaniem na radiancję. Tak, więc zamiast obliczać radiancję promieniowania można równanie transferu sprowadzić do równania na funkcję źródłową.

Zastanówmy się obecnie, w jakich sytuacjach w atmosferze ziemskiej możemy stosować przybliżenie pojedynczego rozpraszania? Postaramy się odpowiedzieć na pytanie ile razy foton doznaje rozproszenia w atmosferze. Intuicyjnie liczba ta zależy od ilości cząstek w jednostce objętości oraz efektywności rozpraszania przez te cząstki. Rozpatrzmy jednorodną atmosferę a przez \tilde{I}_0 oznaczmy ograniczenie górne na radiancję w zerowym przybliżeniu. Wówczas radiancja I-rzędu ma postać (promieniowanie idące w dół)

$$I_1 = \int_0^{\tau} J_1 \exp[-(\tau - \tau')/\mu] \frac{d\tau'}{\mu}$$

$$\text{gdzie } J_1 = \frac{\omega}{4\pi} \int_{\Omega^+} P(\mu, \phi; \mu' \phi') I_0 d\mu' d\phi'.$$

Mamy, więc

$$J_1 \leq \frac{\omega}{4\pi} \int_{\Omega} P(\mu, \phi; \mu' \phi') \tilde{I}_0 d\mu' d\phi' = \frac{\omega}{4\pi} \tilde{I}_0 \int_{\Omega} P(\mu, \phi; \mu' \phi') d\mu' d\phi' = \omega \tilde{I}_0$$

gdzie wykorzystano normalizację funkcji fazowej. Podstawiając do wzoru na I_1 otrzymujemy

$$I_1 \leq \omega \tilde{I}_0 \int_0^{\tau} \exp[-(\tau - \tau')/\mu] \frac{d\tau'}{\mu} = \omega \tilde{I}_0 (1 - \exp[-\tau/\mu]) = \omega \tilde{I}_0 \eta$$

gdzie $\eta = (1 - \exp[-\tau/\mu])$

Kontynuując dla radiancji wyższych rzędów można pokazać, że

$$I_n \leq \tilde{I}_0 (\eta \omega_0)^n$$

Przez Δ oznaczmy różnicę pomiędzy dokładnym rozwiązaniem a rozwiązaniem k-tego rzędu

$$\Delta = I - \sum_{n=1}^k I_n.$$

Zatem różnica ta jest równa

$$\Delta = \sum_{j=k+1}^{\infty} I_j \leq \tilde{I}_0 \sum_{j=k+1}^{\infty} (\eta \omega)^j$$

Przenumerowując wyrazy szeregu oraz uwzględniając wzór na sumę szeregu geometrycznego dostajemy

$$\Delta \leq \tilde{I}_0 \sum_{j=0}^{\infty} (\eta \omega)^j = \tilde{I}_0 \frac{(\eta \omega)^{k+1}}{(1 - \eta \omega)}$$

Przykłady

1. Rozpatrzmy atmosferę, dla której albedo pojedynczego rozpraszania ω wynosi 0.5, zaś grubość optyczna $\tau = 0.1$. Załóżmy, że wymagamy aby różnica rozwiązania na

radiancję do k-tego rzędu rozpraszania i rozwiązania uwzględniającego wszystkie rzędy rozpraszania (rozwiązanie dokładne) nie przekraczała 1% wartości \tilde{I}_0 ($\Delta/\tilde{I}_0 \leq 0.01$). Wówczas po podstawieniu tej wartości otrzymujemy nierówność $0.01 \geq \frac{0.05^{k+1}}{0.95}$. Implikuje ona, aby $k=1$. Użycie modelu pojedynczego rozpraszania w tym przypadku jest w pełni uzasadnione.

2. Powtórzmy obliczenia dla $\omega = 1.0$. Wówczas nierówność $0.01 \geq \frac{0.1^{k+1}}{0.9}$ jest spełniona praktycznie dla $k=2$.
3. Powtórzmy obliczenia dla $\omega = 0.5$ oraz $\tau \gg 1$. W tym przypadku mamy nierówność $0.01 \geq \frac{0.5^{k+1}}{0.5}$. Najbliższą liczbą naturalną k spełniającą tę nierówność jest $k=7$.

Przykłady te pokazują wpływ albedo pojedynczego rozpraszania oraz grubości optycznej na rząd rozpraszania jaki należy stosować do rozwiązania równania transferu promieniowania w atmosferze. Zauważmy, że typowa wartość albedo pojedynczego rozpraszania w obszarze widzialnym jest z reguły większa niż 0.9, podczas gdy w dalekiej podczerwieni jest mniejsza od 0.5. W przypadku atmosfery pozbawionej chmur i aerozoli typowe grubości optyczne atmosfery wynoszą dla obszaru widzialnego 0.1-0.2. Grubości optyczne aerozoli najczęściej zmieniają się od 0.1 do 0.4 podczas gdy grubości optyczne chmur są znacznie większe i mogą sięgać 5-100.

6.3 Probabilistyczny aspekt równania transferu – metoda Monte Carlo

Na równanie transferu promieniowania możemy w sposób odmienny niż do tej pory. Fala elektromagnetyczna ma naturę dualną, dlatego możemy opisywać ją przez strumień fotonów przechodzących przez ziemską atmosferę. Rozważmy promieniowanie, które przechodzi przez warstwę o grubości optycznej τ_0 . Zakładać będziemy dla uproszczenia, że atmosfera jest jednorodna (nie jest jednak warunek konieczny i przypadek niejednorodnej atmosfery może być również rozważany). Strumień promieniowania po przejściu przez nią jest zredukowany o czynnik $T = e^{-\tau}$ zwany transmisją. Ponieważ transmisja przyjmuje wartości z przedziału od 0 do 1 więc może być interpretowana w kategoriach prawdopodobieństwa. Grubość optyczna związana jest z transmisją wzorem $\tau = -\ln T$. Jeśli teraz rozpatrzmy promieniowanie elektromagnetyczne, jako wiązkę fotonów przechodzącą przez warstwę grubości optycznej τ_0 , to używając generatora liczb losowych o rozkładzie

płaskim w przedziale 0 do 1 możemy przypisać każdemu fotonowi wartość z tego przedziału odpowiadającej jego transmisji. Jeśli teraz wyznaczona ze wzoru $\tau = -\ln T$ grubość optyczna dla poszczególnego fotonu jest większa od τ_0 , to foton przechodzi przez warstwę bez oddziaływania. W przeciwnym razie ulegnie absorpcji lub rozproszeniu w zależności od wartości albedo pojedynczego rozproszenia ω . Również parametr ten może być utożsamiany, jako prawdopodobieństwo tyle, że w tym przypadku jest to prawdopodobieństwo, że foton zostanie rozproszony. Kontynuując wędrówkę fotonu przez atmosferę musimy wylosować kolejną liczbę używając tego samego generatora. Jeśli tym razem wylosowana liczba będzie większa od ω , to foton zostanie zaabsorbowany i jego wędrówka się kończy w tym miejscu. W przeciwnym razie ulegnie on rozproszeniu, ale nowy kierunek propagacji nie jest nam jeszcze znany. Ze względu na fakt normalizacji funkcji fazowej na rozpraszanie do jedności może być ona interpretowana jako prawdopodobieństwo, że foton zostanie rozproszony pod kątem Θ .

$$\int_{\Omega} \frac{P(\Theta)}{4\pi} d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{P(\theta', \phi', \theta, \phi)}{4\pi} \sin \theta d\theta d\phi = 1$$

gdzie kąt rozproszenia $\cos \Theta = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi')$

zaś primem oznaczone są kąty dla promieniowania początkowego. W dalszej części będziemy jednak pomijać te kąty w argumentach funkcji fazowej. Dla cząstek o symetrii obrotowej kąt zenitalny oraz azymutalny są niezależne. Ponadto rozproszenie w kącie azymutalnym jest jednakowo prawdopodobne, a zatem używając generatora liczb losowych o rozkładzie jednorodnym można wyznaczyć ten kąt ze wzoru $\phi = 2\pi r$, gdzie r jest liczbą losową. Korzystając z niezależności kątów mamy

$$2\pi \int_0^{\pi} \frac{P(\theta)}{4\pi} \sin \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} P(\theta) \sin \theta d\theta = 1.$$

Oznaczmy przez $p(\theta)$ funkcję fazową związaną z kątem zenitalnym

$$p(\theta) = \frac{1}{2} P(\theta)$$

Obliczmy dystrybuantę D funkcji fazowej względem $\cos \theta$

$$D = \int_{-1}^{\cos \Theta} p(\cos \theta) d \cos \theta$$

Przyjmuje ona wartości od zera do jedności, więc może być generowana przy pomocy tego samego generatora liczb losowych o rozkładzie jednorodnym. Wyznaczenie kąta rozproszenia fotonu sprowadza się więc do odwrócenia wzoru na dystrybuantę, co w ogólności można zrobić tylko numerycznie.

Przykłady

Funkcja fazowa (część azymutalna) dla rozpraszania Rayleigha ma postać
 $p(\theta) = \frac{1}{2} \frac{3}{4} (1 + \cos^2 \theta)$. Dystrybuanta zaś ma postać

$$D = \int_{-1}^{\cos \theta} \frac{3}{8} (1 + \cos^2 \theta) d \cos \theta = \frac{3}{8} \left[\cos \theta + \frac{1}{3} \cos^3 \theta - \frac{4}{3} \right].$$

Po rozwiązaniu równania trzeciego stopnia mamy

$$\cos \theta = u - \frac{1}{u}$$

$$u = \sqrt[3]{-q + \sqrt{1 + q^2}}$$

gdzie

$$q = 4r - 2$$

$r = D$ jest liczbą losową o rozkładzie jednorodnym w przedziale (0,1)

2. Funkcja fazowa Henyey-Greensteina (część azymutalna)

$$p(\theta) = \frac{1}{2} \frac{1 - g^2}{(1 + g^2 - 2g \cos \theta)^{3/2}}$$

Dystrybuanta

$$D = \frac{1 - g^2}{2g} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + g^2 - 2g \cos \theta}} - \frac{1}{1 + g} \right]$$

Po znalezieniu funkcji odwrotnej mamy

$$\cos \theta = \frac{1}{2g} \left[1 + g^2 - \left(\frac{1 - g^2}{2gr - g + 1} \right)^2 \right].$$

Po wyznaczeniu nowego kierunku propagacji fotonu losowana jest kolejna liczba, którą będzie odpowiadać drodze optycznej fotonu do punktu gdzie nastąpi kolejne oddziaływanie z materią. Jeśli foton przejdzie przez warstwę lub zostanie zaabsorbowany obliczana jest trajektoria kolejnego fotonu. Sprecyzowania wymaga jeszcze warunek na powierzchni ziemi. Dla uproszczenia założymy, że mamy Lambertowską powierzchnię o stałym albedzie A . Jeśli foton dochodzi do powierzchni ziemi, losujemy kolejną liczbę i jeśli jest ona mniejsza od A , to wówczas foton jest odbijany od niej i nowy kierunek propagacji jest określony przez kąty $\theta = \theta_0$, $\phi = \phi_0 + \pi$

gdzie θ_0 , ϕ_0 są kątami przed odbiciem. W przeciwnym razie foton jest absorbowany przez powierzchnię ziemi. Jak widać uwzględnienie zmiany współczynnika odbicia od kąta padania promieniowanie nie jest trudne.

Rozwiązanie problemu transferu promieniowania metodą Monte Carlo jest więc bardzo proste i łatwe do zaimplementowania. Po symulacji określonej liczby fotonów wykonuje się zliczanie ich i określa się niedokładność metody. W tym celu dzieli się atmosferę na warstwy i zlicza fotony zaabsorbowane w kolejnych warstwach. Ponadto liczbę

fotonów, które przechodzą przez górną i dolną powierzchnię. Jednak wiadomym jest, że jeden foton może przejść przez daną powierzchnię wiele razy i sumowanie go za każdym razem byłoby błędem. Aby tego uniknąć przypisuję się fotonowi wagę "w" od 0 do 1 w zależności od tego ile razy dany foton przechodzi przez określoną powierzchnię poziomą. Radiancja na poziomie "z" z kąta bryłowego $\Omega(\Delta\theta, \Delta\phi)$ wyraża się wzorem

$$I^\downarrow(z, \Delta\theta, \Delta\phi) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N_c} \sum_{i=1}^{n_k} w_i$$

gdzie N liczba fotonów użytych do symulacji, pierwsza suma przebiega po fotonach, zaś druga po ich kolejnych realizacjach. N_c oznacza liczbę fotonów, które na wysokości z miały kierunek określony przez kąt bryłowy Ω , zaś n_k oznacza ile razy foton "k" przechodził przez powierzchnię na wysokości „z” w kącie bryłowym Ω .

Podobnie strumień promieniowania może być wyznaczony ze wzoru

$$F^\downarrow(z) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N_c} \sum_{i=1}^{n_k} w_i \cos(\theta_i)$$

gdzie kąt θ_i oznacza kąt zenitalny fotonu.

Względne odchylenie standardowe może być obliczone ze wzoru $\sigma = \sqrt{\frac{N - N_c}{NN_c}}$,

gdzie N_c jest liczbą zarejestrowanych fotonów, zaś N liczbą fotonów użytą podczas symulacji.

Niepewność metody dla $N_c \ll N$ jest proporcjonalna do $\frac{1}{\sqrt{N_c}}$. Dla przykładu, jeśli interesuje

nas niepewność współczynnika absorpcji w określonej warstwie lub niepewność strumienia promieniowania na powierzchni ziemi to w tych przypadkach N_c oznacza odpowiednio liczbę fotonów, które zostały zaabsorbowane w atmosferze, lub które dotarły do powierzchni ziemi. Nie jest więc to liczba fotonów użytych do symulacji.

Własności metody Monte Carlo

- Stosunkowo długi czas obliczeń gdyż z reguły żądana dokładność wymaga użycia, co najmniej miliona fotonów.
- Umożliwia uwzględnienie polaryzacji promieniowania. Czas obliczeń w tym przypadku zwiększa się około dwa razy.
- Umożliwia w prosty sposób obliczenia w geometrii sferycznej.
- Metoda ta daje się prosto stosować do problemów trójwymiarowych

7. Ogólne rozwiązanie równania transferu

W wielu metodach stosowanych do rozwiązywania równania transferu promieniowania stosuje się rozwinięcia funkcji fazowej względem cosinusa kąta rozpraszania Θ . Najczęściej funkcja fazowa rozwija jest na wielomiany Legendre w następującej postaci:

$$P(\cos \Theta) = \sum_{l=0}^N \tilde{\omega}_l P_l(\cos \Theta)$$

gdzie P_l są wielomianami Legendre'a zaś $\tilde{\omega}_l$ współczynnikami rozwinięcia. Korzystając z ortogonalności funkcji Legendre'a wyznaczamy współczynniki rozwinięcia

$$\tilde{\omega}_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 P(\cos \Theta) P_l(\cos \Theta) d \cos \Theta, \quad l=0,1,\dots,N.$$

Zauważmy, że $l=0$, $\tilde{\omega}_0 = 1$, $P_0=1$ co odpowiada normalizacji funkcji fazowej. Dla $l=1$ mamy zaś ($P_1 = \cos \Theta$)

$$g = \frac{\tilde{\omega}_1}{3} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P(\cos \Theta) \cos \Theta d \cos \Theta$$

gdzie g nosi nazwę parametru w asymetrii. Ten ważny parametr określa stopień asymetryczności rozpraszania i tak dla rozpraszania izotropowego wynosi 0 (rozpraszanie Rayleigha). Jego przedział zmienności zawiera się w przedziale $(-1,1)$. Wartość 1 osiągnięta jest, gdy promieniowanie rozpraszane jest tylko do przodu zaś -1 gdy rozpraszane jest wstecznie. Typowa wartość parametru asymetrii dla kropelek chmurowych wynosi 0.8-0.9, zaś dla aerozolu 0.6-0.7.

Przykłady

1. Wielomiany Legendrea

$$P_0 = 1$$

$$P_1 = x$$

$$P_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

2. Funkcja fazowa dla rozpraszania Rayleigha $P(\Theta) = \frac{3}{4}(1 + \cos^2 \Theta)$.

współczynniki rozwinięcia Legendrea

$$\tilde{\omega}_0 = 1$$

$$\tilde{\omega}_1 = 0$$

$$\tilde{\omega}_2 = \frac{1}{2}$$

$$3. \text{ Funkcja Henyey-Greensteina } P(\Theta) = \frac{1-g^2}{(1+g^2-2g \cos \Theta)^{3/2}}$$

$$\tilde{\omega}_0 = 1$$

$$\tilde{\omega}_1 = 3g$$

$$\tilde{\omega}_2 = 5g^2$$

Korzystając, ze związku łączącego cosinus kąta rozproszenia z kątami zenitalnym i azymutalnym promieniowania przed i po rozproszeniu możemy zapisać

$$P(\mu, \phi; \mu', \phi') = \sum_{l=0}^N \tilde{\omega}_l P_l \left[\mu \mu' + \sqrt{1-\mu^2} \sqrt{1-\mu'^2} \cos(\phi - \phi') \right]$$

Można pokazać używając harmonik sferycznych, że funkcję fazową można rozwinąć zgodnie ze wzorem

$$P(\mu, \phi; \mu', \phi') = \sum_{m=0}^N \sum_{l=m}^N \tilde{\omega}_l^m P_l^m(\mu) P_l^m(\mu') \cos m(\phi - \phi'),$$

gdzie

$$\tilde{\omega}_l^m = (2 - \delta_{0,m}) \tilde{\omega}_l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \quad (l=m, \dots, N, 0 \leq m \leq N)$$

$$\delta_{0,m} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } m = 0 \\ 0 & \text{gdy } m \neq 0 \end{cases}$$

zaś P_l^m oznacza stowarzyszone wielomiany Legendre'a. Podobnie jak funkcję fazową w szereg można rozwinąć również poszukiwaną radiancję

$$I(\tau; \theta, \phi) = \sum_{m=0}^N I^m(\tau, \mu) \cos m(\phi_0 - \phi).$$

Podstawiając oba rozwinięcia do równania transferu promieniowania otrzymujemy $N+1$ niezależnych równań

$$\mu \frac{dI^m(\tau; \mu)}{d\tau} = I^m(\tau; \mu) - (1 + \delta_{0,m}) \frac{\omega}{4} \sum_{l=m}^N \tilde{\omega}_l^m P_l^m(\mu) \int_{-1}^1 P_l^m(\mu') I^m(\tau, \mu') d\mu' +$$

$$- \frac{\omega}{4\pi} \sum_{l=m}^N \tilde{\omega}_l^m P_l^m(\mu) P_l^m(\mu_0) F_0^s e^{-\tau/\mu_0} + \delta_{0,m} (1 - \omega) B[T(\tau)] \quad (m=0, 1, 2, \dots, N).$$

Zauważmy, że przypadek z $m=0$ odpowiada niezależnemu od kąta azymutalnego rozwiązaniu na radiancję. Jeśli pominiemy indeks 0 to równania transferu możemy zapisać w tym przypadku w postaci

$$\mu \frac{dI(\tau; \mu)}{d\tau} = I(\tau; \mu) - \frac{\omega}{2} \sum_{l=0}^N \tilde{\omega}_l P_l(\mu) \int_{-1}^1 P_l(\mu') I(\tau, \mu') d\mu' +$$

$$- \frac{\omega}{4\pi} \sum_{l=0}^N \tilde{\omega}_l P_l(\mu) P_l(\mu_0) F_0^s e^{-\tau/\mu_0} + (1 - \omega) B[T(\tau)]$$

W celu rozwiązania tego równania całkowanie zastępuje się sumowanie po skończonej liczbie punktów. Do dyskretyzacji użyjemy kwadratur Gaussa w przedziale $(-1,1)$. Tak więc,

$$\int_{-1}^1 f(\mu) d\mu = \sum_{j=-n}^n a_j f(\mu_j)$$

gdzie wagi a_j można wyznaczyć ze wzoru

$$a_j = \frac{1}{P'_{2n}(\mu_j)} \int_{-1}^1 \frac{P_{2n}(\mu)}{\mu - \mu_j} d\mu$$

zaś znak prim oznacza pochodną. Dodatkowo zachodzą związki

$$a_{-j} = a_j, \quad \mu_{-j} = -\mu_j, \quad \sum_{j=-n}^n a_j = 2$$

Wartości punktów Gaussa oraz wag a_n dla $n=1,2,3$ przedstawia poniższa tabela.

n	2n	$\pm \mu$	a_n
1	2	$\mu_1=0.577$	$a_1=1$
2	4	$\mu_1=0.340$	$a_1=0.652$
		$\mu_2=0.861$	$a_2=0.348$
3	6	$\mu_1=0.239$	$a_1=0.468$
		$\mu_2=0.661$	$a_2=0.361$
		$\mu_3=0.932$	$a_3=0.171$

Po zastosowaniu kwadratur Gaussa do równania transferu promieniowania otrzymujemy równanie

$$\begin{aligned} \mu_i \frac{dI(\tau; \mu_i)}{d\tau} = & I(\tau; \mu_i) - \frac{\omega}{2} \sum_{l=0}^N \tilde{\omega}_l P_l(\mu_i) \sum_{j=-n}^n a_j P_l(\mu_j) I(\tau, \mu_j) + \\ & - \frac{\omega}{4\pi} F_o^s e^{-\tau/\mu_o} \sum_{l=0}^N (-1)^l \tilde{\omega}_l P_l(\mu_i) P_l(\mu_o) + (1-\omega) B[T(\tau)], \quad i=-n, -n+1, \dots, n-1, n \end{aligned}$$

gdzie $\mu(-n, n)$ określa kierunek strumienia promieniowania.

7.1 Przybliżenie 2-strumieniowe

Rozpatrzmy przybliżenie 2-strumieniowe, dla którego $j=-1$ oraz $j=1$, $N=1$. Ponadto $\mu_1 = 1/\sqrt{3}$ oraz $a_1 = a_{-1} = 1$. W tym przypadku mamy dwa równania, jedno na radiancję skierowaną do góry $I^\uparrow = I(\tau, \mu_1)$ oraz radiancję skierowaną w dół $I^\downarrow = I(\tau, -\mu_1)$. Rozpatrujemy promieniowanie skierowane do góry ($n=1$) wówczas równanie transferu przyjmuje postać

$$\mu_1 \frac{dI^\uparrow}{d\tau} = I^\uparrow - \frac{\omega}{2} \left\{ \begin{aligned} & \tilde{\omega}_0 P_0(\mu_1) [a_{-1} P_0(\mu_{-1}) I^\downarrow + a_1 P_0(\mu_1) I^\uparrow] + \\ & + \tilde{\omega}_1 P_1(\mu_1) [a_{-1} P_1(\mu_{-1}) I^\downarrow + a_1 P_1(\mu_1) I^\uparrow] \end{aligned} \right\} - \frac{\omega F_0^s}{4\pi} e^{-\tau/\mu_0} \left[\begin{aligned} & \tilde{\omega}_0 P_0(\mu_1) P_0(\mu_0) - \\ & - \tilde{\omega}_1 P_1(\mu_1) P_1(\mu_0) \end{aligned} \right],$$

Po redukcji wyrażeń otrzymujemy

$$\mu_1 \frac{dI^\uparrow}{d\tau} = I^\uparrow - \frac{\omega}{2} \{ I^\downarrow + I^\uparrow \} + \tilde{\omega}_1 \mu_1 [-\mu_1 I^\downarrow + \mu_1 I^\uparrow] - \frac{\omega F_0^s}{4\pi} e^{-\tau/\mu_0} [1 - \tilde{\omega}_1 \mu_1 \mu_0].$$

Uwzględniając, że $\mu_1^2 = 3$ oraz wprowadzając oznaczenia

$$g = \frac{\tilde{\omega}_1}{3},$$

$$b = \frac{1-g}{2} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P(\cos \Theta) \frac{1 - \cos \Theta}{2} d \cos \Theta,$$

$$S^\pm = \frac{F_0^s \omega}{4\pi} (1 \pm 3g\mu_0\mu_1).$$

Otrzymujemy końcową postać

$$\mu_1 \frac{dI^\uparrow}{d\tau} = I^\uparrow - \omega(1-b)I^\uparrow - \omega b I^\downarrow - S^- e^{-\tau/\mu_0}$$

Podobnie drugie równanie

$$-\mu_1 \frac{dI^\downarrow}{d\tau} = I^\downarrow - \omega(1-b)I^\downarrow - \omega b I^\uparrow - S^+ e^{-\tau/\mu_0}.$$

Parametr b może być interpretowany jako stosunek energii rozproszonej wstecznie do całkowitej energii promieniowania rozproszonego, zaś $1-b$ jako część energii rozproszonej do przodu. Interpretacja kolejnych czynników w równaniu transferu promieniowania nie budzi wątpliwości. Weźmy pod uwagę promieniowanie skierowane w kierunku powierzchni ziemi. Wówczas pierwszy czynnik jest osłabieniem promieniowania przez ekstynkcję, drugi jest dodatkowym promieniowaniem skierowanym w dół pochodzącym od rozproszenia do przodu, trzeci również promieniowaniem skierowanym w dół, ale pochodzącym od rozproszenia wstecznego promieniowania, które propagowało się do góry. Ostatni oznacza pojedyncze rozproszenie promieniowania słonecznego.

Dodając i odejmując stronami równania i wprowadzając oznaczenia $M = I^\uparrow + I^\downarrow$ i

$N = I^\uparrow - I^\downarrow$ otrzymujemy sprzężony układ równań różniczkowych

$$\mu_1 \frac{dM}{d\tau} = (1 - \omega g)N - (S^- - S^+) e^{-\tau/\mu_0},$$

$$\mu_1 \frac{dN}{d\tau} = (1 - \omega)M - (S^- + S^+) e^{-\tau/\mu_0}.$$

Różniczkując je stronami po grubości optycznej oraz podstawiając możemy rozdzielić zmienne M i N . W rezultacie otrzymujemy równania różniczkowe II-go rzędu w postaci

$$\frac{d^2 M}{d\tau^2} = k^2 M + Z_1 e^{-\tau/\mu_0},$$

$$\frac{d^2N}{d\tau^2} = k^2N + Z_2e^{-\tau/\mu_0},$$

gdzie $k^2 = (1 - \omega)(1 - \omega g) / \mu_1^2$

$$Z_1 = -\frac{(1 - \omega g)(S^- + S^+)}{\mu_1^2} + \frac{S^- - S^+}{\mu_1\mu_0},$$

$$Z_2 = -\frac{(1 - \omega)(S^- - S^+)}{\mu_1^2} + \frac{S^- + S^+}{\mu_1\mu_0}.$$

Rozwiązanie tych równań prowadzi do następujących wzorów

$$I^\uparrow = Kve^{k\tau} + Hue^{-k\tau} + \varepsilon e^{-\tau/\mu_0},$$

$$I^\downarrow = Kue^{k\tau} + Hve^{-k\tau} + \gamma e^{-\tau/\mu_0},$$

gdzie

$$v = (1 + a) / 2, \quad u = (1 - a) / 2$$

$$a^2 = (1 - \omega) / (1 - \omega g)$$

$$\varepsilon = (\alpha + \beta) / 2, \quad \gamma = (\alpha - \beta) / 2$$

$$\alpha = Z_1\mu_0^2 / (1 - \mu_0^2k^2), \quad \beta = Z_2\mu_0^2 / (1 - \mu_0^2k^2).$$

Stałe K oraz H są wyznaczone z warunków brzegowych dla promieniowania rozproszonego na górnej granicy atmosfery i na powierzchni ziemi. Jeśli albedo powierzchni ziemi wynosi zero, wówczas stałe te wynoszą

$$K = -\left(\varepsilon v e^{-\tau_*/\mu_0} - \gamma u e^{-k\tau_*}\right) / \left(v^2 e^{k\tau_*} - u^2 e^{-k\tau_*}\right),$$

$$H = -\left(\varepsilon u e^{-\tau_*/\mu_0} - \gamma v e^{-k\tau_*}\right) / \left(v^2 e^{k\tau_*} - u^2 e^{-k\tau_*}\right).$$

Używając wyrażen na radiancję możemy obliczyć strumienie promieniowania. W przypadku przybliżenia 2-strumieniowego mają one następującą postać

$$F^\uparrow(\tau) = 2\pi\mu_1 I^\uparrow$$

$$F^\downarrow(\tau) = 2\pi\mu_1 I^\downarrow$$

Metoda 2-strumieniowa została po raz pierwszy opisana przez Schustera w 1905 roku. Używana jest często do badań klimatycznych, gdyż umożliwia oszacowanie strumieni radiacyjnych i w konsekwencji bilansu promieniowania na górnej granicy atmosfery, w atmosferze oraz na powierzchni ziemi. Własności przybliżenia 2-strumieniowego

- Rozwiązanie wykazuje dobrą dokładności, ale w ograniczonym przedziale zmienności parametrów optycznych.
- Jest bardzo efektywną metodą rozwiązywania równania transferu (metoda bardzo szybka).
- Zakłada, że zmienność radiancji względem kąta azymutalnego może być pominięta.

7.2 Przybliżenie Eddingtona

Kolejna metoda używana do rozwiązywania równania transferu promieniowania jest przybliżenie Eddingtona. Zostało ono wyprowadzone w 1916 roku i jest bardzo zbliżone do przybliżenia 2-strumieniowego. Zakładamy w nim, że wyrażenia na radiancję i funkcję fazową mają następującą postać

$$I(\tau, \mu) = I_o(\tau) + \mu I_1(\tau), \quad -1 \leq \mu \leq 1$$

$$P(\mu, \mu') = 1 + 3g\mu\mu'$$

Podstawiając do równania transferu otrzymujemy

$$\frac{dI_1}{d\tau} = 3(1 - \omega)I_o - \frac{3}{4\pi}\omega F_o^s e^{-\tau/\mu_o}$$

$$\frac{dI_o}{d\tau} = 3(1 - \omega g)I_1 + \frac{3}{4\pi}\omega g\mu_o F_o^s e^{-\tau/\mu_o}$$

zaś strumienie promieniowania mają postać

$$F^\uparrow(\tau) = \pi \left[I_o(\tau) + \frac{3}{2} I_1(\tau) \right]$$

$$F^\downarrow(\tau) = \pi \left[I_o(\tau) - \frac{3}{2} I_1(\tau) \right]$$

Metoda 2-strumieniowa oraz przybliżenie Eddingtona sprawdzają się dla ośrodków optycznie grubych. Mogą jednak prowadzić do znacznych błędów dla cienkich warstw powietrza oraz, gdy absorpcja promieniowania jest duża. Jednym z największych problemów jest kształt funkcji fazowej, która dla dużych cząstek wykazuje silne maksimum w kierunku do przodu. Dla przykładu energia rozproszona na kropkach chmurowych w obszarze 5° jest o kilka rzędów wielkości większa, niż w kierunku wstecznym. W metodzie Delta-Eddington energia promieniowania rozproszonego do przodu w wąskim kącie bryłowym jest sztucznie usuwana z promieniowania rozproszonego (nie dając wkładu do wielokrotnego rozpraszania). Usuwana część promieniowania dodawana jest do strumienia promieniowania bezpośredniego. Jeśli primem oznaczymy poprawione zgodnie z tą metodą wartości optyczne, to grubość optyczna przyjmuje wartość:

$$\tau'_s = (1 - f)\tau_s,$$

$$\tau'_a = \tau_a,$$

gdzie indeksy „s” i „a” oznaczają odpowiednio grubość optyczną związaną z rozpraszaniem i absorpcją. Całkowita grubość optyczna ma więc postać

$$\tau' = \tau'_s + \tau'_a = \tau(1 - f\omega).$$

Podobnie poprawiona wartość albedo pojedynczego rozpraszania wyraża się wzorem

$$\omega' = \frac{\tau'_s}{\tau'} = \frac{(1 - f)\tau_s}{(1 - f\omega)\tau} = \frac{(1 - f)\omega}{1 - f\omega}.$$

Aby obliczyć nowy współczynnik asymetrii korzystamy z własności, że parametr asymetrii dla usuwanego promieniowania rozproszonego do przodu wynosi 1. Wówczas mnożąc parametr asymetrii przez grubość optyczną na rozpraszanie mamy

$$g\tau_s = g'\tau'_s + 1(\tau_s - \tau'_s).$$

Stąd

$$g' = \frac{g - f}{1 - f}.$$

Funkcja fazowa składa się z dwóch członów, pierwszego związanego z rozpraszaniem w kierunku $\Theta = 0$ oraz w pozostałych kierunkach i zapisywana jest w postaci

$$P(\mu, \mu') = 2f\delta(\mu - \mu') + (1 - f)(1 + 3g'\mu\mu')$$

Na koniec musimy określić wartość parametru f . Okazuje się jednak, że nie ma jednoznacznej metody wyboru optymalnej wartości f gdyż istnieje wiele alternatywnych możliwości.

Pominiemy je tutaj podając jedynie, że dla funkcji fazowej Henyey-Greenstein $f = g^2$.

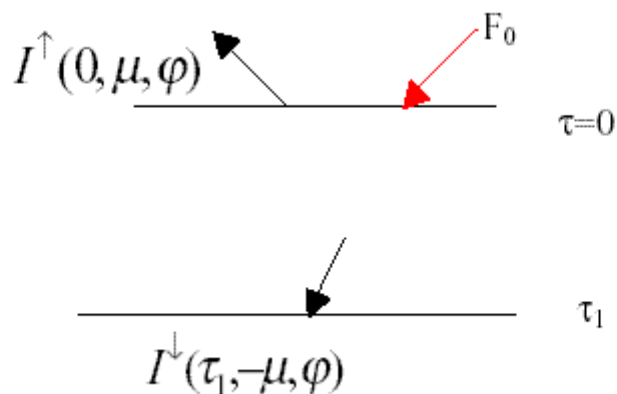
Okazuje się, że metoda Delta Eddington poprawia znacząco rozwiązanie równanie transferu i dlatego jest dość często stosowana wraz z metodami pochodnymi do niej.

8. Pozostałe metody rozwiązania równania transferu

8.1 Metoda dodawania dwóch warstw (adding, doubling)

Jedną z metod używanych do rozwiązywania równania transferu jest metoda zwana sumującą (adding) rozwinięta przez Stoksa w 1862 roku. Metoda ta pozwala rozwiązać dokładnie równanie transferu w przypadku wielokrotnego rozpraszania. W metodzie tej na podstawie współczynników transmisji i odbicia od każdej z dwóch warstw oblicza się transmisję oraz odbicie od nich jako całości. W przypadku, gdy obie warstwy mają tę samą grubość optyczną metoda ta nosi nazwę podwajania (doubling).

Rozpatrzmy warstwę atmosfery o grubości optycznej τ_1 . Niech $I^\uparrow(0, \mu, \phi)$ będzie radiancją promieniowania odbitego (promieniowanie rozproszone), zaś $I^\downarrow(\tau_1, \mu, \phi)$ radiancją promieniowania rozproszonego, które przeszło przez tą warstwę.



Rys. 8.1 Transmisja oraz odbicie promieniowania od warstwy powietrza.

Funkcja (współczynnik) odbicia od warstwy, na którą pada promieniowanie słoneczne definiujemy jako

$$R(\mu, \phi, \mu_0, \phi_0) = \frac{I^\uparrow(0, \mu, \phi)}{\mu_0 F_0},$$

zaś funkcja (współczynnik) transmisji wyraża się wzorem

$$T(\mu, \phi, \mu_0, \phi_0) = \frac{I^\downarrow(\tau_1, -\mu, \phi)}{\mu_0 F_0}.$$

W ogólności definicje te określone są w bardziej niejawniej postaci

$$I^\uparrow(0, \mu, \phi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^1 R(\mu, \phi, \mu', \phi') I^\downarrow(\mu', \phi') \mu' d\mu'$$

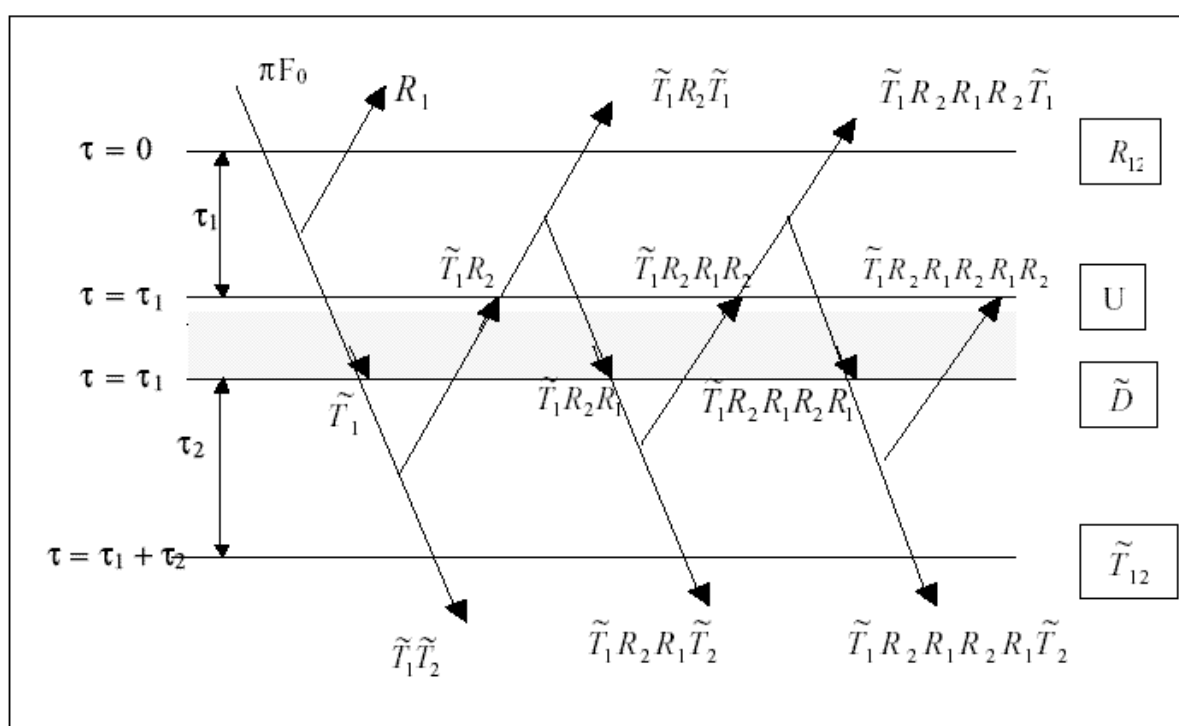
$$I^\downarrow(\tau_1, \mu, \phi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^1 T(\mu, \phi, \mu', \phi') I^\downarrow(\mu', \phi') \mu' d\mu'$$

Funkcja transmisji związana z promieniowaniem bezpośrednim wynosi

$$T_{\text{dir}}(\mu_o, \phi_o) = \frac{I_{\text{dir}}(\tau_1, -\mu_o, \phi_o)}{\mu_o F_o} = \exp(-\tau_1 / \mu_o).$$

Rozważmy dwie warstwy powietrza o współczynniku odbicia R_1 i R_2 oraz całkowitej transmisji (transmisja promieniowania rozproszonego plus bezpośredniego) \tilde{T}_1 \tilde{T}_2 . Oznaczmy przez R_{12} oraz \tilde{T}_{12} odbicie oraz transmisję przez tak zdefiniowany układ. U oraz \tilde{D} są odbiciem oraz transmisją pomiędzy warstwą 1 oraz 2. Całkowity współczynnik odbicia można więc zapisać (patrz rys. 8.2) w postaci

$$\begin{aligned} R_{12} &= R_1 + \tilde{T}_1 R_2 \tilde{T}_1 + \tilde{T}_1 R_2 R_1 R_2 \tilde{T}_1 + \tilde{T}_1 R_2 R_1 R_2 R_1 R_2 \tilde{T}_1 + \dots = \\ &= R_1 + \tilde{T}_1 R_2 \tilde{T}_1 [1 + R_1 R_2 + (R_1 R_2)^2 + \dots] = R_1 + R_2 \tilde{T}_1^2 (1 - R_1 R_2)^{-1}. \end{aligned}$$



Rys. 8.2 Opis metody dodawania dwóch warstw atmosfery

Podobnie całkowity współczynnik transmisji

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{12} &= \tilde{T}_1 \tilde{T}_2 + \tilde{T}_1 R_2 R_1 \tilde{T}_2 + \tilde{T}_1 R_2 R_1 R_2 R_1 \tilde{T}_2 + \dots = \\ &= \tilde{T}_1 \tilde{T}_2 [1 + R_1 R_2 + (R_1 R_2)^2 + \dots] = \tilde{T}_1 \tilde{T}_2 (1 - R_1 R_2)^{-1} \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} U &= \tilde{T}_1 R_2 + \tilde{T}_1 R_2 R_1 R_2 + \tilde{T}_1 R_2 R_1 R_2 R_1 R_2 + \dots = \\ &= \tilde{T}_1 R_2 [1 + R_1 R_2 + (R_1 R_2)^2 + \dots] = \tilde{T}_1 R_2 (1 - R_1 R_2)^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{D} &= \tilde{T}_1 + \tilde{T}_1 R_2 R_1 + \tilde{T}_1 R_2 R_1 R_2 R_1 + \dots = \\ &= \tilde{T}_1 [1 + R_1 R_2 + (R_1 R_2)^2 + \dots] = \tilde{T}_1 (1 - R_1 R_2)^{-1}. \end{aligned}$$

Współczynniki te można zapisać w prostej formie

$$R_{12} = R_1 + \tilde{T}_1 U$$

$$\tilde{T}_{12} = \tilde{T}_2 \tilde{D}$$

$$U = R_2 \tilde{D}$$

Wprowadzając oznaczenia

$$S = R_1 R_2 (1 - R_1 R_2)^{-1}$$

oraz rozdzielając transmisję na część związaną z promieniowaniem rozproszonym oraz bezpośrednim mamy

$$\tilde{T} = T + e^{-\tau/\mu_0}$$

Możemy podobnie rozdzielić współczynnik \tilde{D} i wówczas

$$\tilde{D} = D + e^{-\tau_1/\mu_0} = (1+S)(T_1 + e^{-\tau_1/\mu_0}) = (1+S)T_1 + S e^{-\tau_1/\mu_0} + e^{-\tau_1/\mu_0}$$

oraz

$$\tilde{T}_{12} = (T_2 + e^{-\tau_2/\mu_0})(D + e^{-\tau_1/\mu_0}) = D e^{-\tau_2/\mu_0} + T_2 e^{-\tau_1/\mu_0} + T_2 D + \exp\left[-\left(\frac{\tau_1}{\mu_0} + \frac{\tau_2}{\mu}\right)\right] \delta(\mu - \mu_0)$$

gdzie T_1 , T_2 , D oznaczają składowe dla promieniowania rozproszonego. Ostatecznie wszystkie współczynniki mają postać

$$Q = R_1 R_2$$

$$S = Q(1 - Q)^{-1}$$

$$D = T_1 + S T_1 + S \exp(-\tau_1/\mu_0)$$

$$U = R_2 D + R_2 \exp(-\tau_1/\mu_0)$$

$$R_{12} = R_1 + U \exp(-\tau_1/\mu) + T_1 U$$

$$T_{12} = D \exp(-\tau_2/\mu) + T_2 \exp(-\tau_1/\mu) + T_2 D.$$

Zauważmy, że mnożenie dwóch funkcji związane jest z obliczeniem całki jak w poniższym przykładzie

$$R_1 R_2 = 2 \int_0^1 R_1(\mu', \mu_0) R_2(\mu, \mu') \mu' d\mu'.$$

Numeryczna procedura metody adding

1. Startujemy od optycznie bardzo cienkiej warstwy ($\Delta\tau = 10^{-8}$) dla której przybliżenie pojedynczego rozpraszania może być stosowane.
2. Następnie używając wyprowadzonych wzorów na transmisję oraz odbicie obliczamy te współczynniki dla warstwy o grubości optycznej równej $2\Delta\tau$.
3. Powtarzamy krok 2 do momentu, aż grubość optyczna nie osiągnie wymaganej wartości.

8.2 Metoda DISORT

Metoda rzędnych dyskretnych (discrete ordinate method) została rozwinięta przez Chandrasekhara w 1950 roku. Jest ona obecnie szeroko stosowana w kodach radiacyjnych

wymagających dużej precyzji. Rozpatrzmy dla uproszczenia przypadek izotropowego rozpraszania $P(\mu, \mu') = 1$. Wówczas równanie transferu przyjmuje postać

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu)}{d\tau} = I(\tau, \mu) - \frac{\omega}{2} \int_{-1}^1 I(\tau, \mu') d\mu' - \frac{\omega F_o^s}{4} e^{-\tau/\mu_o}.$$

Po zastosowaniu formuły Gaussa otrzymujemy

$$\mu_i \frac{dI(\tau; \mu_i)}{d\tau} = I(\tau; \mu_i) - \frac{\omega}{2} \sum_{j=-n}^n a_j I(\tau, \mu_j) - \underbrace{\frac{\omega F_o^s}{4\pi} e^{-\tau/\mu_o}}_{\text{czynniki niejednorodny}}$$

Powyższe równanie opisuje $2n$ niejednorodnych równań różniczkowych pierwszego rzędu.

Jeśli oznaczymy $I_i = I_i(\tau, \mu_i)$, to ogólne rozwiązanie równań jednorodnych ma postać

$$I_i = g_i \exp(-k\tau),$$

gdzie k oraz g_i są stałymi. Podstawiając rozwiązanie do równania jednorodnego mamy

$$g_i (1 + \mu_i k) = \frac{\omega}{2} \sum_{j=-n}^n a_j g_j$$

Współczynniki g_i mogą być wyznaczone z równania

$$g_i = \frac{L}{1 + \mu_i k}$$

gdzie L jest stała. Po podstawieniu do równania na g_i otrzymujemy

$$1 = \frac{\omega}{2} \sum_{j=-n}^n \frac{a_j}{1 + \mu_j k} = \omega \sum \frac{a_j}{1 - \mu_j^2 k^2}.$$

Równanie to daje $2n$ rozwiązań na współczynniki $\pm k_j$ ($n=1,2,\dots,n$). Ostatecznie rozwiązanie równania jednorodnego przyjmuje postać

$$I_i = \sum_j \frac{L_j}{1 + \mu_i k_j} \exp(-k_j \tau)$$

gdzie L_i są stałymi. Rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego ma prosta postać

$$I_i = \frac{\omega F_o^s}{4} h_i \exp(-\tau/\mu_o).$$

Podstawiając do równania wyjściowego mamy

$$h_i (1 + \mu_i / \mu_o) = \frac{\omega}{2} \sum_{j=-n}^n a_j h_j + 1.$$

gdzie

$$h_i = \frac{\gamma}{1 + \mu_i / \mu_o}$$

zaś

$$\gamma = 1 / \left[1 - \frac{\omega}{2} \sum_{j=1}^n \frac{a_j}{1 - \mu_j^2 / \mu_o^2} \right]$$

Ostatecznie pełne rozwiązanie równania transferu ma postać

$$I_i = \sum_j \frac{L_j}{1 + \mu_i k_j} \exp(-k_j \tau) + \frac{\omega F_o^s \gamma}{4(1 + \mu_i / \mu_o)} \exp(-\tau/\mu_o)$$

gdzie stałe L_i są wyznaczone z warunków brzegowych.

Na koniec rozważań na temat metod rozwiązywania równania transferu uogólnijmy metodę dyskretnych rzędnych w przypadku anizotropowego rozpraszania. Radiancja promieniowania może być zapisana w postaci szeregu

$$I(\tau, \mu, \phi) = \sum_{m=0}^N I^m(\tau, \mu) \cos m(\phi_o - \phi)$$

Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego podobnie jak w przypadku rozpraszania izotropowego ma postać

$$I^m(\tau, \mu_i) = \sum_{j=-n}^n L_j^m \phi_j^m(\mu_j) \exp(-k_j^m \tau)$$

gdzie L_j^m, k_j^m, ϕ_j^m są współczynnikami. Rozwiązanie szczególne równania jednorodnego może być zapisane w formie

$$I_p^m(\tau, \mu_i) = Z^m(\mu_i) \exp(-\tau/\mu_o)$$

gdzie funkcje

$$Z^m(\mu_i) = \frac{\gamma}{4(1 + \mu_i/\mu_o)} \omega F_o^s P_m^m(-\mu_o) \sum_{l=0}^N \tilde{\omega}_l \zeta_l^m \frac{1}{\mu_o} P_l^m(\mu_i).$$

Ostatecznie rozwiązanie na radiancję ma postać

$$I^m(\tau, \mu_i) = \sum_{j=-n}^n L_j^m \phi_j^m(\mu_j) \exp(-k_j^m \tau) + Z^m(\mu_i) = \frac{\gamma}{4(1 + \mu_i/\mu_o)} \omega F_o^s P_m^m(-\mu_o) \sum_{l=0}^N \tilde{\omega}_l \zeta_l^m \frac{1}{\mu_o} P_l^m(\mu_i)$$

gdzie $i=-n, \dots, n$.

Własności metody DISORT (numeryczny kod metody rzędnych dyskretnych)

- Stosowany dla niejednorodnej atmosfery (przybliżenie płasko-równoległe)
- Możliwe jest zadanie dowolnej liczby warstw w atmosferze.
- Każda warstwa jest scharakteryzowana przez efektywną grubość optyczną, albedo pojedynczego rozpraszania, oraz parametr asymetrii lub funkcję fazową.
- Możliwe jest zadanie dowolnej funkcji fazowej przez podanie współczynników rozwinięcia w wielomiany Legendre'a.
- Liczba strumieni radiacyjnych jest zadawana przez użytkownika (czas obliczeń jest proporcjonalny do sześciangu liczby strumieni!).
- Kluczowym problemem jest uzyskanie rozwiązania dla funkcji fazowych z silnym rozpraszaniem do przodu.

- DISORT pozwala na wyznaczenie radiancji jako funkcji kierunku oraz położenia w atmosferze nie tylko na granicach warstw, ale i w ich środku.

Rozważane do tej pory metody rozwiązywania równania transferu promieniowania w atmosferze dotyczyły monochromatycznego promieniowania. Rozwiązanie równania transferu dla każdej linii spektralnej jest bardzo kosztowne obliczeniowo i używane jedynie do obliczeń, gdy wymagana jest wysoka rozdzielczość spektralna. Do tego typu modeli (model linia po linii) można zaliczyć LBLRITM oraz GENSPEC. Ten ostatni został napisany w środowisku MATLAB i umożliwia obliczanie transmisji promieniowania. Poza modelami linia po linii znacznie częściej używane są modele pasmowe oraz model rozkładu-k. Pierwsze z nich stosują różne metody do obliczania efektywnej transmisji przez pasmo. W najprostszym przypadku dla jednorodnej atmosfery efektywna transmisja wynosi

$$T_{\bar{\nu}} = \frac{1}{\Delta\nu} \int_{\Delta\nu} \exp(-k_{\nu} u) d\nu.$$

W dalszej części pominiemy metody obliczania efektywnej transmisji dla modeli pasmowych. W metodzie rozkładu-k całe spektrum dzielone jest na N przedziałów $\Delta\nu_i$ w taki sposób, że każdy z nich zawiera dużą liczbę linii absorpcyjnych. Z drugiej strony są one na tyle wąskie, aby można było założyć, że funkcja Plancka w obrębie takiego pasma była stała. Rozważać będziemy dla uproszczenia przypadek atmosfery jednorodnej. W metodzie tej całkowanie po częstotliwości złożonej zależności współczynnika absorpcji jest zastępowane całkowaniem znacznie gładziej funkcji w przestrzeni k . Ponadto określona wartość k jest brana tylko raz do obliczeń, podczas gdy w określonym paśmie może być ich wiele. Wprowadzamy funkcje gęstości $f(k)$ według wzoru

$$f(k) = \frac{1}{\Delta\nu} \frac{d\nu}{dk} = \frac{1}{\Delta\nu} \sum_j \left| \frac{d\nu_j}{dk} \right|$$

gdzie przedział $\Delta\nu_j$ zawiera się w rozważanym paśmie. Normalizacja funkcji gęstości ma postać

$$\int_0^{\infty} f(k) dk = 1.$$

Przez $g(k)$ oznaczmy dystrybuantę związaną z funkcją gęstości $f(k)$

$$g(k) = \int_0^k f(k) dk$$

gdzie $g(0)=0$ zaś $g(\infty)=1$ oraz

$$dg(k)=f(k)dk.$$

Z definicji dystrybuanty $g(k)$ wynika, że jest to monotonicznie gładka i niemalejąca funkcja w przestrzeni k . Korzystając z tego możemy zapisać wzór na transmisję w postaci

$$T_{\bar{v}} = \frac{1}{\Delta v} \int_{\Delta v} \exp(-k_v u) dv = \int_0^{\infty} \exp(-ku) f(k) dk = \int_0^{\infty} \exp(-k(g)u) dg .$$

Ze względu na gładkość funkcji $g(k)$, $k(g)$ wyrażenie na transmisję możemy przybliżyć przez sumę szeregu

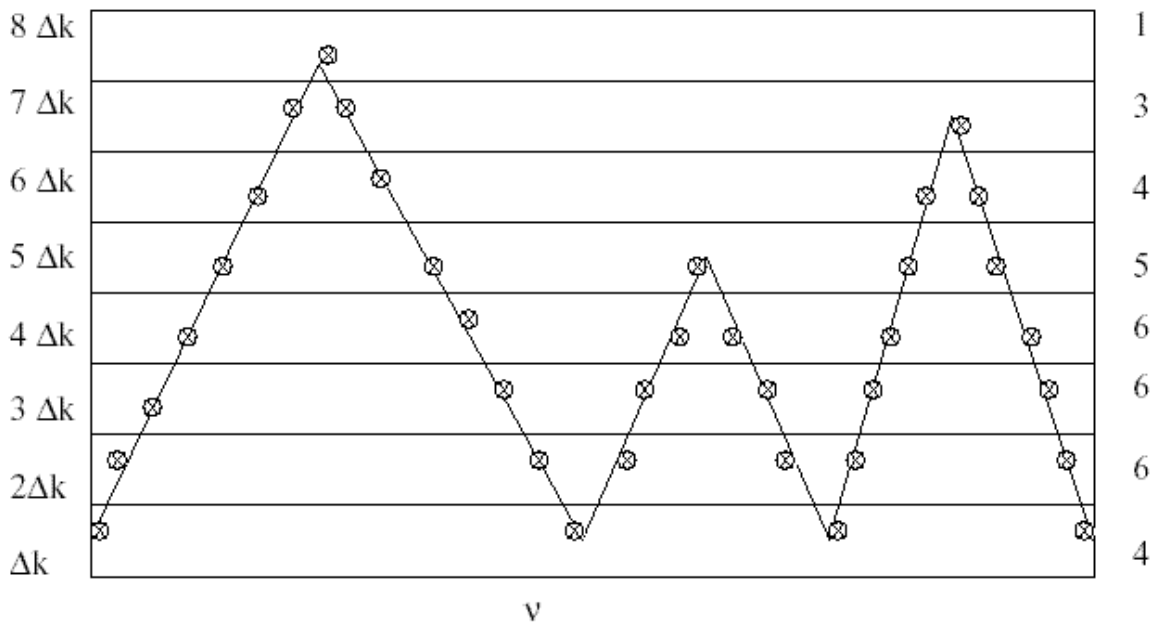
$$T_{\bar{v}} \approx \sum_{i=1}^N \exp(-k(g_i)u) \Delta g_i = \Delta g_1 e^{-k_1 u} + \Delta g_2 e^{-k_2 u} + \dots + \Delta g_N e^{-k_N u} .$$

Przykład

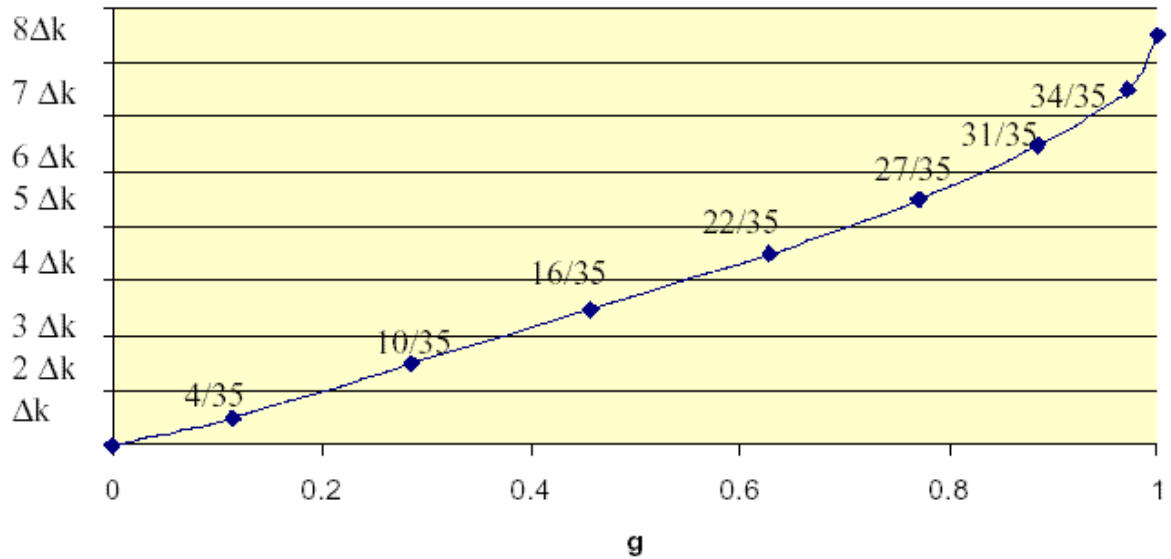
Rys 8.3 przedstawia zależność współczynnika absorpcji od częstotliwości. Zakres zmienności k dzielimy na przedziały Δk (w tym przypadku na osiem przedziałów). Zliczając liczbę punktów w domenie częstotliwości, jakie odpowiadają danemu przedziałowi Δk rysujemy histogram i kolejno wykreślamy dystrybuantę (Rys. 8.4), która wyraża się wzorem

$$g(k) = \frac{n(0, k)}{N}$$

gdzie N jest liczba wszystkich punktów ($N=35$), zaś $n(0, k)$ określa liczbę punktów dla których współczynnik absorpcji jest mniejszy, lub równy k .



Rys 8.3 Zależność współczynnika absorpcji od częstotliwości fali



Rys. 8.4 Dystrybuanta $g(k)$

W ogólnym przypadku (dla niejednorodnej atmosfery) stosowana jest analogiczna metoda nosząca nazwę k-correlated distribution.

8.3 Modele transferu promieniowania

Lista aktualnych modeli:

https://en.wikipedia.org/wiki/Atmospheric_radiative_transfer_codes

8.4 Fu-Liou - modelu transferu promieniowania w atmosferze

2 i 4 strumieniowy szybki model transferu promieniowania w zakresie krótko- i długofalowym. Wersja on-line modelu jest dostępna tutaj:

<https://cloudgate2.larc.nasa.gov/cgi-bin/fuliou/runfl.cgi>

Model wykorzystywany jest m. in. w symulacjach globalnych. Charakteryzuje się względnie dobrą dokładnością (szczególnie dla warunków bezchmurnych) oraz bardzo krótkim czasem obliczeniowym.

8.5 MODTRAN - model transferu promieniowania w atmosferze

Model wysokiej rozdzielczości spektralnej i wysokiej dokładności obliczeniowej. Wersje online:

- <http://climatemodels.uchicago.edu/modtran/>

- <http://climatemodels.uchicago.edu/rtrm/>

8.6 Streamer jako przykład modelu transferu promieniowania w atmosferze

Charakterystyka modelu STREAMER

- Model Płasko-równoległy
- Używa DISORT-u dla większej liczby strumieni niż dwa.
- Oblicza strumienie promieniowania oraz radiancję

- 24 pasma w obszarze promieniowania krótkofalowym i 20 pasma w obszarze długofalowym.
- 5 optycznych modeli aerozolu.
- 7 standardowych profili atmosferycznych (możliwość specyfikacji własnego profilu)
- 11 modeli podłoża (modele Lamberta) z możliwością zadania BRDF-u.
- możliwość zadania optycznych własności chmur.
- Uwzględnia tylko podstawowe gazy atmosferyczne

Przykładowy plik wejściowy do modelu

```

$OPTIONS
Streamer sample input file - Fluxes
.TRUE.           ; Compute fluxes (or radiances)?      (FLUXES)
.FALSE.          ; Include thermal emission in band 106? (IR106)
.TRUE.           ; Compute cloud forcing?            (CLDFRC)
2 2              ; Number of streams, short and long  (NSTR*)
0 0              ; Number of Legendre coeff., method  (NCOEF,IMTHD)
.TRUE.           ; Include gaseous absorption?            (GASABS)
.TRUE.           ; Include Rayleigh scatter (shortwave)? (RAYLISHRT)
2                ; Surface albedo control            (ALBTYPE)
4                ; Surface emissivity control       (EMISSTYPE)
5 .TRUE.         ; Std prof; extend input profile to 100 km?
5 1              ; Aerosol model and profile
1 2 3 1 1 3     ; Height, temp, wv, oz, cloud units
4                ; Output levels control
.FALSE.          ; Log to file?
.TRUE.           ; Descriptive output desired?
testflx.des
.FALSE.          ; User-customized output?
.FALSE.          ; Apply spectral (band) weights?
$CASE
Clear sky only, April conditions
92 4 28 22.0 72.88 144.50 -99.0
                ; Viewing geometry
1 129
0.75 2 1 0.05 3 0.95
-25.15 0.99
0
                ; Cloud overlap
1 1 1 1 0 0 13 1.0 1.0 1.0 1.0 1.0 1.0
14.101 125.4 -50.9 2.0
10.948 204.9 -56.2 7.0
8.486 303.5 -60.2 35.0
7.864 335.1 -57.1 43.0
6.651 404.8 -50.0 47.0
6.041 444.1 -45.5 43.0
4.860 528.4 -36.8 58.0
3.702 622.4 -26.8 39.0
2.618 721.7 -19.7 67.0
1.592 828.2 -16.2 72.0
    
```

PROCESY RADIACYJNE W ATMOSFERZE

```

0.973 898.3 -10.9 60.0
0.577 945.8 -12.2 67.0
0.000 1022.0 -23.2 78.0
300.0 0.25
$CASE
Cloudy sky, 2 clouds, April conditions, shortwave only
92 4 28 22.0 72.88 144.50 -99.0
                                ; Viewing geometry

106 129
0.75 2 1 0.05 3 0.95
-25.15 0.99
2 1 0.4 -19.15 725.0 5.0 6.0 0.1 0
3 0.6 -60.15 300.0 1.0 20.0 0.01 1
0                                ; Cloud overlap
-1 -1 -1 -1 0 0 13 1.0 1.0 1.0 1.0 1.0
    
```

Przykładowy plik wynikowy

Streamer sample input file - Fluxes

Input File: testflx.inp

No spectral weighting.

INITIAL OPTIONS (Later changes will not be noted):

Number of Streams, Shortwave: 2, Longwave: 2

Gaseous absorption included.

Rayleigh scattering included.

Default profile: Subarctic Winter

Default aerosol optical model: Arctic

Default aerosol vertical profile: Background trop. and strat.

```

+++++
++
    
```

Case Number in Input File: 1

Clear sky only, April conditions

Band number range: 1 - 129

Spectral Interval: 20 1/cm (500.00 um) to 35710 1/cm (.28 um)

Year: 1992, Month: 4, Day: 28, Hour: 22.00

Lat: 72.880, Lon: 144.500, Zenith Angle (degrees): 58.82

Unscaled Atmospheric Profiles (22 Levels)

Height(km)	Press(mb)	T(K)	H2O(g/m ³)	RH(%)	O3(g/m ³)	Aer(km ⁻¹)	
1	100.00	.00	210.00	.000000	.00	.0000000	.000000
2	70.00	.04	245.70	.000000	.00	.0000001	.000000
3	50.00	.57	259.30	.000003	.00	.0000028	.000004
4	45.00	1.11	247.00	.000005	.00	.0000084	.000008
5	40.00	2.24	234.70	.000011	.01	.0000265	.000016
6	35.00	4.70	222.20	.000024	.04	.0000595	.000032
7	30.00	10.20	216.00	.000054	.20	.0000970	.000129
8	25.00	22.56	211.20	.000123	.82	.0002070	.000254
9	20.00	50.14	214.10	.000269	1.25	.0003622	.001086
10	14.10	125.40	222.25	.001110	2.00	.0003215	.001035
11	10.95	204.90	216.95	.002119	7.00	.0002043	.002234
12	8.49	303.50	212.95	.006548	35.00	.0000802	.004192
13	7.86	335.10	216.05	.011700	43.00	.0000565	.008141
14	6.65	404.80	223.15	.028831	47.00	.0000410	.012096

KRZYSZTOF MARKOWICZ

15	6.04	444.10	227.65	.042846	43.00	.0000323	.015238
16	4.86	528.40	236.35	.139006	58.00	.0000302	.018521
17	3.70	622.40	246.35	.234690	39.00	.0000287	.022815
18	2.62	721.70	253.45	.736630	67.00	.0000273	.037149
19	1.59	828.20	256.95	1.050423	72.00	.0000265	.051794
20	.97	898.30	262.25	1.321236	60.00	.0000265	.080575
21	.58	945.80	260.95	1.336072	67.00	.0000265	.080575
22	.00	1022.00	249.95	.640325	78.00	.0000265	.000000

Total Column Amounts (scaled) -

Water Vapor: 3671.07 g/m²

Ozone: 6.43 g/m²

Aerosols Optical Depth: .25 (unitless)

Scaling Factors - w.v., O3, haze RH, CO2, O2, w.v. continuum:

1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00

Cloud/clear types (models) in scene (21=clear): 21

SURFACE CHARACTERISTICS:

Clear Sky Fraction: 1.00

Surface Type Fractions -

Sea Water: .05, Meltponds: .00, Snow: .95, Bare Ice: .00

Vegetation: .00, Dry Sand: .00, Freshwater: .00

Observed (Input) Surface Albedo (0.6 um): .750

Observed Surface Temp (K): 248.0

Emissivity (all bands): .9900

Broadband All-sky Surface Albedo, by type:

21: .608

Broadband All-sky Surface Albedo: .608

ALL-SKY FLUXES (W/m²), CLOUD RADIATIVE EFFECT (W/m²), HEATING RATE (degrees K/day):

	DirSW	DiffSW	TotalSW	LW	DiffSW	LW	Heating	
	Down	Down	Down	Down	Up	Up	Rate	
1	691.31	.00	691.31	.00	357.68	181.98	151.65	.302
2	691.29	.01	691.30	.00	357.67	181.98	151.65	-2.926
3	691.10	.11	691.21	.23	357.65	181.95	151.84	-4.940
4	690.91	.19	691.10	.53	357.63	181.84	152.16	-2.812
5	690.38	.36	690.75	1.04	357.60	181.65	152.54	-.800
6	689.11	.73	689.84	1.85	357.55	181.37	152.78	-.452
7	686.90	1.51	688.41	3.26	357.44	181.15	153.08	-.372
8	682.75	3.48	686.23	5.79	357.25	181.14	153.63	-.152
9	675.27	7.56	682.83	10.48	356.95	182.23	154.13	-.363
10	655.42	20.54	675.95	22.21	355.73	185.05	157.39	-.407
11	640.68	30.15	670.83	29.21	354.34	184.46	161.24	-.053
12	621.89	42.20	664.09	36.05	352.31	185.96	161.86	.163
13	614.91	46.43	661.35	39.72	351.61	188.20	161.25	.078
14	595.04	58.13	653.17	51.79	349.94	194.40	160.61	-.017
15	582.41	65.51	647.93	60.14	348.98	198.40	160.69	-.060
16	553.60	81.54	635.14	81.29	346.97	208.17	161.29	-.070
17	522.73	97.98	620.71	105.66	344.83	219.48	162.07	-.347
18	488.80	114.83	603.63	134.40	343.00	228.88	166.15	-.086
19	449.46	136.10	585.57	157.18	341.04	234.46	167.25	-.330
20	422.94	151.75	574.69	173.89	339.83	238.76	169.99	-.762
21	401.39	164.71	566.10	179.41	339.25	231.97	174.28	.104
22	373.75	182.40	556.15	169.28	338.13	213.96	173.34	.000

PROCESY RADIACYJNE W ATMOSFERZE

Cloud Radiative Effect - Level: 1, Shortwave: .0, Longwave: .0
 Cloud Radiative Effect - Level: 22, Shortwave: .0, Longwave: .0

+++++
 ++

Case Number in Input File: 2
 Cloudy sky, 2 clouds, April conditions, shortwave only
 Band number range: 106 - 129
 Spectral Interval: 2500 1/cm (4.00 um) to 35710 1/cm (.28 um)
 Year: 1992, Month: 4, Day: 28, Hour: 22.00
 Lat: 72.880, Lon: 144.500, Zenith Angle (degrees): 58.82
 >>> Previous profiles used.

Cloud/clear types (models) in scene (21=clear): 1 3 21

INDIVIDUAL CLOUD CHARACTERISTICS:

Model	Top	Bott	Zthick	Pthick	Frac	Tau	Ttop	Ptop	Re	WC	Phase
Index	(m)	(mb)			(K)	(mb)	(um)	(g/m ³)			

1	18	19	187.1	18.4	.40	5.0	254.0	725.0	6.0	.100	Liq
3	12	13	562.9	28.1	.60	1.0	213.0	300.0	20.0	.010	Ice

(Note: Above fraction does not include overlapping portion, if any.)

SURFACE CHARACTERISTICS:

Clear Sky Fraction: .00
 Surface Type Fractions -
 Sea Water: .05, Meltponds: .00, Snow: .95, Bare Ice: .00
 Vegetation: .00, Dry Sand: .00, Freshwater: .00
 Observed (Input) Surface Albedo (0.6 um): .750
 Broadband All-sky Surface Albedo, by type:
 1: .645 3: .616 21: .608
 Broadband All-sky Surface Albedo: .628

ALL-SKY FLUXES (W/m²), CLOUD RADIATIVE EFFECT (W/m²), HEATING RATE (degrees K/day):

	DirSW	DiffSW	TotalSW	LW	DiffSW	LW	Heating
	Down	Down	Down	Down	Up	Up	NET
1	691.31	.00	691.31	.00	406.40	.00	284.91 .941
2	691.29	.01	691.30	.00	406.40	.00	284.90 1.077
3	691.10	.11	691.21	.00	406.38	.00	284.83 1.318
4	690.91	.20	691.11	.00	406.36	.00	284.75 2.400
5	690.38	.37	690.75	.00	406.33	.00	284.42 2.895
6	689.11	.74	689.85	.00	406.29	.00	283.57 2.025
7	686.90	1.53	688.43	.00	406.20	.00	282.23 1.353
8	682.75	3.53	686.27	.00	406.04	.00	280.23 .951
9	675.27	7.66	682.93	.00	405.83	.00	277.10 .643
10	655.42	20.82	676.24	.00	404.90	.00	271.34 .405
11	640.68	30.59	671.27	.00	403.77	.00	267.50 .502
12	621.25	42.61	663.86	.00	402.25	.00	261.61 2.830
13	299.33	308.59	607.92	.00	356.94	.00	250.98 .574
14	289.64	312.21	601.85	.00	355.62	.00	246.23 .705
15	283.55	314.41	597.96	.00	355.02	.00	242.94 .873
16	269.59	318.46	588.05	.00	353.84	.00	234.20 .932
17	254.58	321.91	576.49	.00	352.70	.00	223.80 1.267
18	236.83	324.58	561.41	.00	352.55	.00	208.86 1.115
19	39.13	449.43	488.56	.00	293.79	.00	194.77 .951
20	36.82	442.93	479.75	.00	292.89	.00	186.86 1.037

KRZYSZTOF MARKOWICZ

21	34.94	439.02	473.95	.00	292.93	.00	181.02	.730
22	32.53	434.61	467.14	.00	292.72	.00	174.42	.000

Cloud Radiative Effect - Level: 1, Shortwave: -48.7, Longwave: .0

Cloud Radiative Effect - Level: 22, Shortwave: -43.6, Longwave: .0